Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Sinusfunktion*

Aufgabennummer: B_437

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Eine Glimmlampe beginnt zu leuchten, sobald die angelegte Spannung eine Zündspannung U_Z übersteigt. Sie erlischt wieder, sobald die angelegte Spannung die Löschspannung U_L unterschreitet. Für eine bestimmte Glimmlampe gilt:

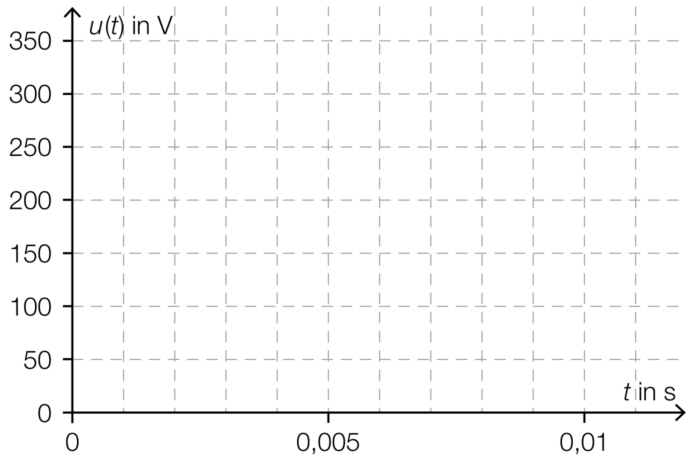
$U_Z = 150$ V
$U_L = 100$ V

Die angelegte Spannung kann näherungsweise durch die Funktion u beschrieben werden:

$u(t) = 325 \cdot \sin(2\pi \cdot 50 \cdot t)$

t ... Zeit in s
$u(t)$ ... Spannung zur Zeit t in Volt (V)

1) Veranschaulichen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Funktionsgraphen von u und kennzeichnen Sie dasjenige Zeitintervall $[t_1; t_2]$, in dem die Glimmlampe leuchtet.



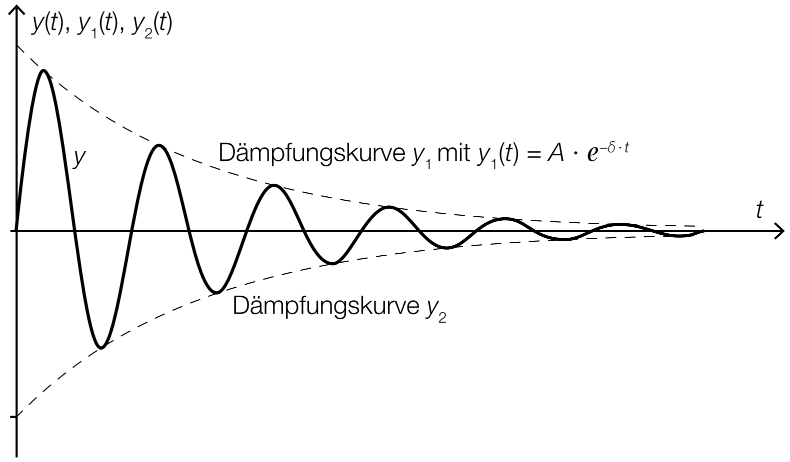
2) Berechnen Sie, wie viel Prozent der Zeit die Glimmlampe im Zeitintervall [0; 0,01] leuchtet.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die in der nachstehenden Abbildung dargestellte gedämpfte Schwingung wird durch die Funktion y beschrieben:

$y(t) = A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t)$

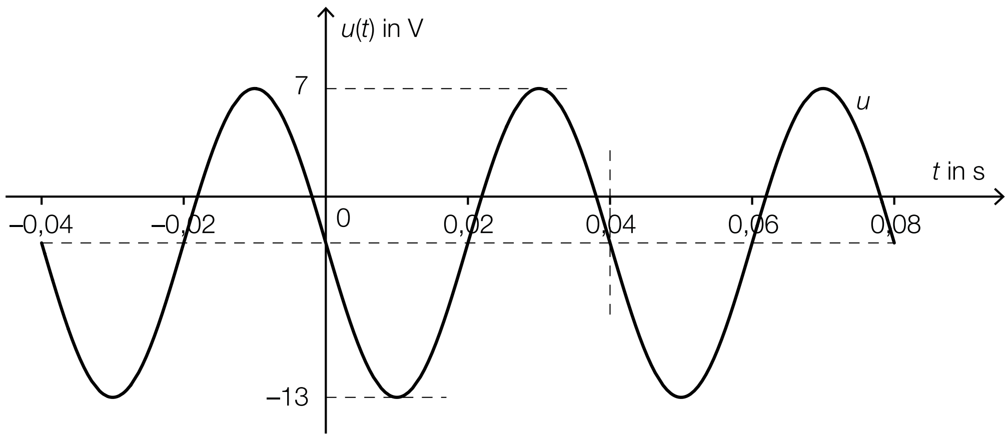
t ... Zeit
$y(t)$ ... Auslenkung zur Zeit t



1) Erstellen Sie eine Gleichung der zu y_1 symmetrischen Dämpfungskurve y_2 (siehe obige Abbildung).

2) Zeigen Sie, dass an den Stellen t_k, an denen der Funktionsgraph von y die Dämpfungskurve y_1 bzw. y_2 berührt, gilt:
$t_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{\omega}$ mit $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

c) Der zeitliche Verlauf einer Spannung kann durch eine Funktion u mit $u(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) + d$ beschrieben werden. Dabei ist t die Zeit in Sekunden und $A > 0$.



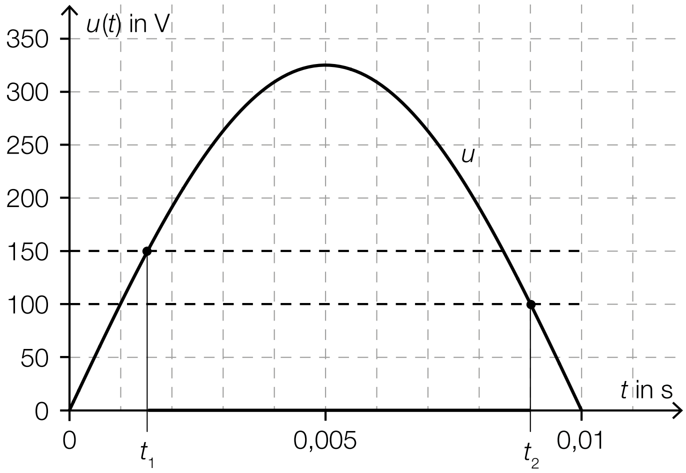
1) Lesen Sie aus dem obigen Diagramm die Parameter A und d ab.

2) Bestimmen Sie mithilfe des obigen Diagramms den Parameter ω.

3) Bestimmen Sie mithilfe des obigen Diagramms den Parameter φ.

Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) $u(t_1) = 150 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 0{,}00152\ldots$

$u(t_2) = 100 \quad \Rightarrow \quad t_2 = 0{,}00900\ldots$

$\frac{t_2 - t_1}{0{,}01} = 0{,}7477\ldots$

Im Zeitintervall [0; 0,01] leuchtet die Glimmlampe rund 74,8 % der Zeit.

b1) $y_2(t) = -A \cdot e^{-\delta \cdot t}$

b2) Die Stellen, an denen der Funktionsgraph von y die Dämpfungskurve y_1 bzw. y_2 schneidet, erhält man als Lösungen der Gleichung $A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) = \pm A \cdot e^{-\delta \cdot t}$.

$A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) = \pm A \cdot e^{-\delta \cdot t} \quad \Rightarrow \quad \sin(\omega \cdot t) = \pm 1$

$\omega \cdot t_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad t_k = \frac{\pi}{2 \cdot \omega} + k \cdot \frac{\pi}{\omega} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{\omega}$

c1) $A = 10$

$d = -3$

c2) Die Periodendauer T ist 0,04, daher ergibt sich:

$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{0{,}04} = 50 \cdot \pi$

c3) $t_0 = -0{,}02$ und $\varphi = -t_0 \cdot \omega$, daher ergibt sich:

$\varphi = 0{,}02 \cdot 50 \cdot \pi = \pi$

(Jeder Wert $\varphi = \pi + 2 \cdot k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ist als richtig zu werten.)

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige grafische Veranschaulichen des Zeitintervalls
a2) 1 × B: für die richtige Berechnung des Prozentsatzes

b1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichung von y_2
b2) 1 × A2: für den richtigen Ansatz (Gleichung zur Berechnung der Schnittpunkte)
1 x D: für den richtigen Nachweis

c1) 1 × C: für das richtige Ablesen von A und d
c2) 1 x B1: für das richtige Bestimmen von ω
c3) 1 x B2: für das richtige Bestimmen von φ