

Mathematische Grundkompetenzen für die SRP in Mathematik (AHS)

Inhaltliche Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen

Stand: November 2024

Inhaltsbereich *Algebra und Geometrie (AG)*

Die Algebra ist die Sprache der Mathematik, in der zugleich auch zwei zentrale Ideen der Mathematik besonders deutlich sichtbar werden: Generalisierung und operative Beweglichkeit. Variablen lenken die Aufmerksamkeit von speziellen Zahlen hin zu einer definierten Menge von Zahlen (oder anderen mathematischen Objekten), definierte Operationen ermöglichen es, Variablen miteinander zu verknüpfen und so Beziehungen zwischen ihnen darzustellen, und schließlich stellt die Algebra ein System von Regeln zur formal-operativen Umformung derartiger Beziehungen zur Verfügung, wodurch weitere Beziehungen sichtbar werden.

Für das Betreiben von Mathematik ebenso wie für die Kommunikation und Reflexion mit und über Mathematik ist ein verständiger Umgang mit grundlegenden Begriffen und Konzepten der Algebra unerlässlich. Dies betrifft insbesondere verschiedene Zahlenbereiche, Variablen, Terme, Gleichungen (Formeln) und Ungleichungen sowie Gleichungssysteme. Ein verständiger Umgang umfasst eine angemessene Interpretation dieser Begriffe und Konzepte im jeweiligen Kontext ebenso wie eine zweckmäßige Verwendung dieser Begriffe und Konzepte zur Darstellung abstrakter Sachverhalte und deren regelhafte Umformung. Aber auch Reflexionen über Lösungsmöglichkeiten bzw. -fälle sowie die (Grenzen und das Ausloten der) Anwendbarkeit der jeweiligen Konzepte sind in entsprechenden Kommunikationssituationen von Bedeutung.

Die Erweiterung des Zahlbegriffs auf Zahlentupel (Vektoren) und die Festlegung von zweckmäßigen Regeln zur operativen Verknüpfung dieser mathematischen Objekte führt zu einer wichtigen Verallgemeinerung des Zahl- bzw. Variablenbegriffs.

Durch die Einführung von Koordinaten ist es möglich, Punkte in der Ebene oder im Raum so zu verorten, dass geometrische Objekte algebraisch durch Vektoren beschrieben werden können, und sich so von rein geometrisch-anschaulichen Betrachtungsweisen (mit Winkel, Länge oder Volumen) zu lösen und geometrische Probleme mithilfe der Algebra zu behandeln.

Dieser Zusammenhang zwischen Algebra und Geometrie ermöglicht es aber nicht nur, geometrische Sachverhalte mit algebraischen Mitteln darzustellen (z. B. Vektoren als algebraische Darstellung von Pfeilen oder Punkten) und zu bearbeiten, sondern auch umgekehrt algebraische Sachverhalte geometrisch zu deuten (z. B. Zahlentripel als Punkte oder Pfeile im Raum) und daraus neue Einsichten zu gewinnen. Solche Deutungen algebraischer Objekte in der Geometrie wie auch Darstellungen geometrischer Objekte in der Algebra und

ein flexibler Wechsel zwischen diesen Darstellungen bzw. Deutungen sind in verschiedenen Kommunikationssituationen von großer Bedeutung.

In der Trigonometrie interessieren vor allem Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck, allenfalls Erweiterungen auf allgemeine Dreiecke. Elementare Beziehungen dieser Art sollten gekannt, komplexere geometrische Zusammenhänge auf diese elementaren Beziehungen zurückgeführt werden können.

Grundkompetenzen

Grundbegriffe der Algebra

AG 1.1 Wissen über die Zahlenmengen, -bereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ verständig einsetzen können

AG 1.2 Wissen über algebraische Begriffe angemessen einsetzen können: Variablen, Terme, Formeln, (Un-)Gleichungen, Gleichungssysteme, Äquivalenz, Umformungen, Lösbarkeit

Anmerkungen:

Bei den Zahlenmengen (Zahlenbereiche) soll man die Mengenbezeichnungen und die Teilmengenbeziehungen kennen, Elemente angeben sowie zuordnen können und die reellen Zahlen als Grundlage kontinuierlicher Modelle kennen. Zum Wissen über die reellen Zahlen gehört auch, dass es Zahlenbereiche gibt, die über $\mathbb{R}$ hinausgehen.

Die algebraischen Begriffe soll man anhand von einfachen Beispielen beschreiben/erklären und verständig verwenden können.

(Un-)Gleichungen und Gleichungssysteme

AG 2.1 einfache Terme und Formeln aufstellen, umformen und im Kontext deuten können

AG 2.2 lineare Gleichungen aufstellen, interpretieren, umformen/lösen und die Lösung im Kontext deuten können

AG 2.3 quadratische Gleichungen in einer Variablen umformen/lösen, über Lösungsfälle Bescheid wissen, Lösungen und Lösungsfälle (auch geometrisch) deuten können

AG 2.4 lineare Ungleichungen aufstellen, interpretieren, umformen/lösen, Lösungen (auch geometrisch) deuten können

AG 2.5 lineare Gleichungssysteme in zwei Variablen aufstellen, interpretieren, umformen/lösen, über Lösungsfälle Bescheid wissen, Lösungen und Lösungsfälle (auch geometrisch) deuten können

Anmerkungen:

Einfache Terme können auch Potenzen, Wurzeln, Logarithmen, Sinus etc. beinhalten.

Mit dem Einsatz elektronischer Hilfsmittel können auch komplexere Umformungen von Termen, Formeln und Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen durchgeführt werden.

Vektoren

- AG 3.1 Vektoren als Zahlentupel verständig einsetzen und im Kontext deuten können
- AG 3.2 Vektoren geometrisch (als Punkte bzw. Pfeile) deuten und verständig einsetzen können
- AG 3.3 Definitionen der Rechenoperationen mit Vektoren (Addition, Multiplikation mit einem Skalar, Skalarprodukt) kennen, Rechenoperationen verständig einsetzen und (auch geometrisch) deuten können
- AG 3.4 Geraden in $\mathbb{R}^2$ durch Parameterdarstellungen und Gleichungen, in $\mathbb{R}^3$ durch Parameterdarstellungen angeben und diese Darstellungen interpretieren können; Lagebeziehungen (zwischen Geraden und zwischen Punkt und Gerade) analysieren, Schnittpunkte ermitteln können
- AG 3.5 Normalvektoren in $\mathbb{R}^2$ aufstellen, verständig einsetzen und interpretieren können

Anmerkungen:

Vektoren sind als Zahlentupel, also als algebraische Objekte, zu verstehen und in entsprechenden Kontexten verständig einzusetzen. Punkte und Pfeile in der Ebene und im Raum müssen als geometrische Veranschaulichung dieser algebraischen Objekte interpretiert werden können.

Die geometrische Deutung des Skalarprodukts (in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$) meint hier nur den Spezialfall $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Geraden sollen in Parameterdarstellung, in $\mathbb{R}^2$ auch in parameterfreier Form (Gleichungen), angegeben und interpretiert werden können.

Trigonometrie

- AG 4.1 Definitionen von *Sinus*, *Cosinus* und *Tangens* im rechtwinkligen Dreieck kennen und zur Auflösung rechtwinkliger Dreiecke einsetzen können
- AG 4.2 Definitionen von *Sinus* und *Cosinus* für Winkel größer als 90° kennen und einsetzen können

Anmerkungen:

Die Kontexte beschränken sich auf einfache Fälle in der Ebene und im Raum, komplexe (Vermessungs-)Aufgaben sind hier nicht gemeint; Sinus- und Cosinussatz werden dabei nicht benötigt.

Inhaltsbereich *Funktionale Abhängigkeiten (FA)*

Wenn Expertinnen und Experten Mathematik verwenden, bedienen sie sich oftmals des Werkzeugs der Funktionen. Für eine verständige Kommunikation ist es daher notwendig, mit der spezifischen funktionalen Sichtweise verständig und kompetent umzugehen. Das meint, die Aufmerksamkeit auf die Beziehung zwischen zwei (oder mehreren) Größen in unterschiedlichen Kontexten fokussieren zu können sowie die gängigen Darstellungsformen zu kennen und mit ihnen flexibel umgehen zu können.

Im Zentrum des mathematischen Grundwissens steht dann das Kennen der für die Anwendungen wichtigsten Funktionstypen: Namen und Gleichungen kennen, typische Verläufe von Graphen (er)kennen, zwischen den Darstellungsformen wechseln, charakteristische Eigenschaften wissen und im Kontext deuten (können).

Insgesamt sind eher kommunikative Handlungen (Darstellen, Interpretieren, Begründen) bedeutsam, manchmal können auch konstruktive Handlungen (Modellbildung) hilfreich sein; mathematisch-operative Handlungen hingegen sind in Kommunikationssituationen von eher geringer Bedeutung.

Darüber hinaus ist (Reflexions-)Wissen um Vor- und Nachteile der funktionalen Betrachtung sehr wichtig. Hilfreich ist in diesem Zusammenhang das Wissen über unterschiedliche Typen von Modellen (konstruktive, erklärende, beschreibende) sowie deren Bedeutung und Verwendung.

Wenn die wichtigsten Funktionstypen überblickt werden und wichtige Eigenschaften für das Beschreiben von Funktionen bekannt sind (Monotonie, Monotoniewechsel, Wendepunkte, Periodizität, Nullstellen, Polstellen), ist die Kommunikation auch auf zunächst unbekannte Funktionen bzw. Kompositionen von Funktionen erweiterbar.

Grundkompetenzen

Funktionsbegriff, reelle Funktionen, Darstellungsformen und Eigenschaften

- FA 1.1 für gegebene Zusammenhänge entscheiden können, ob man sie als Funktionen betrachten kann
- FA 1.2 Formeln als Darstellung von Funktionen interpretieren und dem Funktionstyp zuordnen können
- FA 1.3 zwischen tabellarischen und grafischen Darstellungen funktionaler Zusammenhänge wechseln können
- FA 1.4 aus Tabellen, Graphen* und Gleichungen von Funktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können
- FA 1.5 Eigenschaften von Funktionen erkennen, nennen, im Kontext deuten und zum Erstellen von Funktionsgraphen einsetzen können: Monotonie(wechsel), lokale Extrema, Wendepunkte, Periodizität, Achsensymmetrie, asymptotisches Verhalten, Schnittpunkte mit den Achsen
- FA 1.6 Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen grafisch und rechnerisch ermitteln und im Kontext interpretieren können

* Der Graph einer Funktion ist als Menge der Wertepaare definiert. Einer verbreiteten Sprechweise folgend nennen wir die grafische Darstellung des Graphen im kartesischen Koordinatensystem jedoch ebenfalls kurz „Graph“.

- FA 1.7 Funktionen als mathematische Modelle verstehen und damit verständlich arbeiten können
- FA 1.8 durch Gleichungen (Formeln) gegebene Funktionen mit mehreren Veränderlichen im Kontext deuten können, Funktionswerte ermitteln können
- FA 1.9 einen Überblick über die wichtigsten (unten angeführten) Typen mathematischer Funktionen geben, ihre Eigenschaften vergleichen können

Anmerkungen:

Auf eine sichere Unterscheidung zwischen funktionalen und nichtfunktionalen Zusammenhängen wird Wert gelegt, auf theoretisch bedeutsame Eigenschaften (z. B. Injektivität, Surjektivität, Umkehrbarkeit) wird aber nicht fokussiert. Im Vordergrund steht die Rolle von Funktionen als Modelle und die verständige Nutzung grundlegender Funktionstypen und deren Eigenschaften sowie der verschiedenen Darstellungsformen von Funktionen (auch $f: A \rightarrow B, x \mapsto f(x)$).

Die Bearbeitung von Funktionen mit mehreren Veränderlichen beschränkt sich auf die Interpretation der Funktionsgleichung im jeweiligen Kontext sowie auf die Ermittlung von Funktionswerten.

Der Verlauf von Funktionen soll nicht nur mathematisch beschrieben, sondern auch im jeweiligen Kontext gedeutet werden können.

Lineare Funktion [$f(x) = k \cdot x + d$]

- FA 2.1 verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene lineare Zusammenhänge als lineare Funktionen erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können
- FA 2.2 aus Tabellen, Graphen und Gleichungen linearer Funktionen Werte(paare) sowie die Parameter k und d ermitteln und im Kontext deuten können
- FA 2.3 die Wirkung der Parameter k und d kennen und die Parameter in unterschiedlichen Kontexten deuten können
- FA 2.4 wichtige Eigenschaften kennen und im Kontext deuten können:

$$f(x + 1) = f(x) + k; \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = k = [f'(x)]$$
- FA 2.5 die Angemessenheit einer Beschreibung mittels linearer Funktion bewerten können
- FA 2.6 direkte Proportionalität als lineare Funktion vom Typ $f(x) = k \cdot x$ beschreiben können

Anmerkungen:

Die Parameter k und d sollen sowohl für konkrete Werte als auch allgemein im jeweiligen Kontext interpretiert werden können. Entsprechendes gilt für die Wirkung der Parameter und deren Änderung.

Potenzfunktion mit $f(x) = a \cdot x^z$ und Funktionen vom Typ $f(x) = a \cdot x^z + b$ mit $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ oder $z = \frac{1}{2}$

- FA 3.1 verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene Zusammenhänge dieser Art als entsprechende Funktionen erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können
- FA 3.2 aus Tabellen, Graphen und Gleichungen dieser Funktionen Werte(paare) sowie die Parameter a und b ermitteln und im Kontext deuten können
- FA 3.3 die Wirkung der Parameter a und b kennen und die Parameter im Kontext deuten können
- FA 3.4 indirekte Proportionalität als Potenzfunktion vom Typ $f(x) = \frac{a}{x}$ (bzw. $f(x) = a \cdot x^{-1}$) beschreiben können

Polynomfunktion $[f(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i \text{ mit } n \in \mathbb{N}]$

- FA 4.1 typische Verläufe von Graphen in Abhängigkeit vom Grad der Polynomfunktion (er)kennen
- FA 4.2 zwischen tabellarischen und grafischen Darstellungen von Zusammenhängen dieser Art wechseln können
- FA 4.3 aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Polynomfunktionen Funktionswerte, aus Tabellen und Graphen sowie aus einer quadratischen Funktionsgleichung Argumentwerte ermitteln können
- FA 4.4 den Zusammenhang zwischen dem Grad der Polynomfunktion und der Anzahl der (möglichen) Null-, Extrem- und Wendestellen wissen

Anmerkungen:

Der Zusammenhang zwischen dem Grad der Polynomfunktion und der Anzahl der (möglichen) Null-, Extrem- und Wendestellen sollte für beliebige n bekannt sein, konkrete Aufgabenstellungen beschränken sich auf Polynomfunktionen mit $n \leq 4$.

Mithilfe elektronischer Hilfsmittel können Argumentwerte auch für Polynomfunktionen höheren Grades ermittelt werden.

Exponentialfunktion $[f(x) = a \cdot b^x \text{ bzw. } f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x} \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}^+, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}]$

- FA 5.1 verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene exponentielle Zusammenhänge als Exponentialfunktion erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können
- FA 5.2 aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Exponentialfunktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können
- FA 5.3 die Wirkung der Parameter a und b bzw. λ kennen und die Parameter in unterschiedlichen Kontexten deuten können
- FA 5.4 wichtige Eigenschaften ($f(x+1) = b \cdot f(x)$; $[e^x]' = e^x$) kennen und im Kontext deuten können
- FA 5.5 die Begriffe *Halbwertszeit* und *Verdoppelungszeit* kennen, die entsprechenden Werte berechnen und im Kontext deuten können

FA 5.6 die Angemessenheit einer Beschreibung mittels Exponentialfunktion bewerten können

Anmerkungen:

Die Parameter a und b bzw. λ sollen sowohl für konkrete Werte als auch allgemein im jeweiligen Kontext interpretiert werden können. Entsprechendes gilt für die Wirkung der Parameter und deren Änderung.

Sinusfunktion, Cosinusfunktion

FA 6.1 grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene Zusammenhänge der Art $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ als allgemeine Sinusfunktion erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können

FA 6.2 aus Graphen und Gleichungen von allgemeinen Sinusfunktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können

FA 6.3 die Wirkung der Parameter a und b kennen und die Parameter im Kontext deuten können

FA 6.4 Periodizität als charakteristische Eigenschaft kennen und im Kontext deuten können

FA 6.5 wissen, dass $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

FA 6.6 wissen, dass gilt: $[\sin(x)]' = \cos(x)$, $[\cos(x)]' = -\sin(x)$

Anmerkungen:

Während zur Auflösung von rechtwinkligen Dreiecken Sinus, Cosinus und Tangens verwendet werden, beschränkt sich die funktionale Betrachtung (weitgehend) auf die allgemeine Sinusfunktion. Wesentlich dabei sind die Interpretation der Parameter (im Graphen wie auch in entsprechenden Kontexten) sowie der Verlauf des Funktionsgraphen und die Periodizität.

Inhaltsbereich *Analysis (AN)*

Die Analysis stellt Konzepte zur formalen, kalkulatorischen Beschreibung von diskretem und stetigem Änderungsverhalten bereit, die nicht nur in der Mathematik, sondern auch in vielen Anwendungsbereichen von grundlegender Bedeutung sind. Die Begriffe Differenzenquotient und Differenzialquotient sind allgemeine mathematische Mittel, dieses Änderungsverhalten von Größen in unterschiedlichen Kontexten quantitativ zu beschreiben, was in vielen Sachbereichen auch zur Bildung neuer Begriffe genutzt wird.

Im Sinne der Kommunikationsfähigkeit wird es daher wichtig sein, diese mathematischen Begriffe in diversen Anwendungsfällen deuten zu können, darüber hinaus aber auch allfällige Zusammenhänge von Fachbegriffen auf der Basis der hier genannten mathematischen Konzepte zu erkennen (z. B. den Zusammenhang Ladung – Stromstärke in der Physik oder allgemein den Zusammenhang von Bestands- und Flussgrößen). Manche der hier angesprochenen Begriffe werden auch umgangssprachlich gebraucht (z. B. Momentangeschwindigkeit, Beschleunigung, Zerfallsgeschwindigkeit, progressives Wachstum). Im Sinne einer Kommunikation mit der Allgemeinheit ist es für einen allgemeingebildeten Menschen daher auch wichtig, bei einer allfälligen Explikation der Fachbegriffe auf deren mathematischen Kern zurückgreifen zu können.

Der hinsichtlich der Kommunikationsfähigkeit zentrale Begriff der Integralrechnung ist das bestimmte Integral. Es ist wichtig zu wissen, was das dahinterstehende Konzept allgemein in der Mathematik und konkret in diversen Anwendungssituationen leistet. Daraus ergibt sich einerseits, dass man das bestimmte Integral als Grenzwert einer Summe von Produkten in verschiedenen Kontexten deuten kann, andererseits aber auch, dass man die typischen Anwendungsfälle des bestimmten Integrals allgemein beschreiben und den Begriff selbst in verschiedenen Kontexten zur Darstellung entsprechender Zusammenhänge verwenden kann (z. B. die physikalische Arbeit als Wegintegral der Kraft, der zurückgelegte Weg als Zeitintegral der Geschwindigkeit).

Die mathematische Darstellung der einzelnen Begriffe ist im Allgemeinen eine symbolische, wobei die Zeichen auch eine bestimmte Bedeutung innerhalb des Kalküls haben. Für die Zugänglichkeit elementarer Fachliteratur ist ein verständiger Umgang mit diesem Formalismus notwendig, d. h., die zum Teil unterschiedlichen symbolischen Darstellungen des Differenzialquotienten, der Ableitungsfunktion sowie des bestimmten Integrals sollten als solche erkannt, im jeweiligen Kontext gedeutet und auch eigenständig als Darstellungsmittel eingesetzt werden können. Es ist wichtig zu wissen, dass mit Zeichen auch gerechnet wird und was im konkreten Fall damit berechnet wird; die Durchführung der Rechnung selbst kann aber weitgehend unterbleiben. Es genügt, sich auf die einfachsten Regeln des Differenzierens zu beschränken, zumal neben der symbolischen Darstellung der Begriffe auch die grafische Darstellung der entsprechenden Funktionen zur Verfügung steht, an der die relevanten Eigenschaften und Zusammenhänge erkannt und auch quantitativ abgeschätzt werden können.

Grundkompetenzen

Änderungsmaße

- AN 1.1 absolute und relative (prozentuelle) Änderungsmaße unterscheiden und angemessen verwenden können
- AN 1.2 den Zusammenhang *Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate)* – *Differenzialquotient („momentane“ bzw. lokale Änderungsrate)* auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffs kennen und diese Konzepte (verbal sowie in formaler Schreibweise) auch kontextbezogen anwenden können
- AN 1.3 den Differenzen- und Differenzialquotienten in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch den Differenzen- bzw. Differenzialquotienten beschreiben können

Anmerkungen:

Der Fokus liegt auf dem Darstellen von Änderungen durch Differenzen von Funktionswerten, durch prozentuelle Veränderungen, durch Differenzenquotienten und durch Differenzialquotienten, ganz besonders aber auch auf der Interpretation dieser Änderungsmaße im jeweiligen Kontext.

Durch den Einsatz elektronischer Hilfsmittel ist auch die Berechnung von Differenzen- und Differenzialquotienten beliebiger (differenzierbarer) Funktionen möglich.

Regeln für das Differenzieren

- AN 2.1 einfache Regeln des Differenzierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, Regeln für $[k \cdot f(x)]'$ und $[f(k \cdot x)]'$ (vgl. Inhaltsbereich *Funktionale Abhängigkeiten*)

Ableitungsfunktion/Stammfunktion

- AN 3.1 die Begriffe *Ableitungsfunktion* und *Stammfunktion* kennen und zur Beschreibung von Funktionen einsetzen können
- AN 3.2 den Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion (bzw. Funktion und Stammfunktion) in deren grafischer Darstellung (er)kennen und beschreiben können
- AN 3.3 Eigenschaften von Funktionen mithilfe der Ableitung(sfunktion) beschreiben können: Monotonie, lokale Extrema, Links- und Rechtskrümmung, Wendestellen

Anmerkungen:

Der Begriff der *Ableitung(sfunktion)* soll verständlich und zweckmäßig zur Beschreibung von Funktionen eingesetzt werden.

Durch den Einsatz elektronischer Hilfsmittel ist das Ableiten von Funktionen nicht durch die in den Grundkompetenzen angeführten Differenzierungsregeln eingeschränkt.

Summation und Integral

- AN 4.1 den Begriff des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summe von Produkten deuten und beschreiben können
- AN 4.2 einfache Regeln des Integrierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, $\int k \cdot f(x) dx$, $\int f(k \cdot x) dx$ (vgl. Inhaltsbereich *Funktionale Abhängigkeiten*), bestimmte Integrale von Polynomfunktionen ermitteln können
- AN 4.3 das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können

Anmerkungen:

Analog zum Differenzialquotienten liegt der Fokus beim bestimmten Integral auf der Beschreibung entsprechender Sachverhalte durch bestimmte Integrale sowie vor allem auf der angemessenen Interpretation des bestimmten Integrals im jeweiligen Kontext.

Durch den Einsatz elektronischer Hilfsmittel ist die Berechnung von bestimmten Integralen nicht durch die in den Grundkompetenzen angeführten Integrationsregeln eingeschränkt.

Inhaltsbereich *Wahrscheinlichkeit und Statistik (WS)*

Mathematikerinnen und Mathematiker wie auch Anwenderinnen und Anwender bedienen sich häufig der Begriffe, der Darstellungsformen und der (grundlegenden) Verfahren der beschreibenden Statistik und der Wahrscheinlichkeitstheorie. Für allgemeingebildete Laiinnen und Laien wird es im Hinblick auf die Kommunikationsfähigkeit vor allem darauf ankommen, die stochastischen Begriffe und Darstellungen im jeweiligen Kontext angemessen interpretieren und deren Aussagekraft bzw. Angemessenheit einschätzen und bewerten zu können.

Die eigenständige Erstellung von statistischen Tabellen und Grafiken wird sich auf Situationen geringer Komplexität und auf einfache Grafiken beschränken (z. B. bei der Kommunikation mit der Allgemeinheit), für die Ermittlung statistischer Kennzahlen (Zentral- und Streuungsmaße) gilt Ähnliches.

Auch bei der Wahrscheinlichkeit kann man sich auf grundlegende Wahrscheinlichkeitsinterpretationen, auf grundlegende Begriffe (Zufallsgröße, (Zufalls-)Stichprobe, Wahrscheinlichkeitsverteilung, Erwartungswert und Varianz/Standardabweichung) und Konzepte (Binomialverteilung) sowie einfachste Wahrscheinlichkeitsberechnungen beschränken; wichtig hingegen erscheint es, Wahrscheinlichkeit als eine (vom jeweiligen Informationsstand) abhängige Modellierung und Quantifizierung des Zufalls zu verstehen.

Grundkompetenzen

Beschreibende Statistik

WS 1.1 Werte aus tabellarischen und elementaren grafischen Darstellungen ablesen (bzw. zusammengesetzte Werte ermitteln, d. h. aus den Grafiken ablesbare Daten zur Berechnung weiterer Kennzahlen verwenden können) und im jeweiligen Kontext angemessen interpretieren können

Anmerkungen:

(un)geordnete Liste, Strichliste, Piktogramm, Säulen-, Balken-, Linien-, Stängel-Blatt-, Punktwolkendiagramm, Histogramm (als Spezialfall eines Säulendiagramms), Prozentstreifen, Kastenschaubild (Boxplot)

WS 1.2 Tabellen und einfache statistische Grafiken erstellen, zwischen Darstellungsformen wechseln können

WS 1.3 statistische Kennzahlen (absolute und relative Häufigkeiten; arithmetisches Mittel, Median, Modus, Quartile, Spannweite, empirische Varianz/Standardabweichung) im jeweiligen Kontext interpretieren können; die angeführten Kennzahlen für einfache Datensätze ermitteln können

WS 1.4 Definition und wichtige Eigenschaften des arithmetischen Mittels und des Medians angeben und nutzen, Quartile ermitteln und interpretieren können, die Entscheidung für die Verwendung einer bestimmten Kennzahl begründen können

Anmerkungen:

Wenn auch statistische Kennzahlen (für einfache Datensätze) ermittelt und elementare statistische Grafiken erstellt werden sollen, liegt das Hauptaugenmerk auf verständigen Interpretationen von Grafiken (unter Beachtung von Manipulationen) und Kennzahlen. Speziell für das arithmetische Mittel und den Median (auch als Quartile) müssen die wichtigsten Eigenschaften (definitorische Eigenschaften, Datentyp-Verträglichkeit, Ausreißerempfindlichkeit) gekannt und verständlich eingesetzt bzw. berücksichtigt werden. Beim arithmetischen Mittel sind allenfalls erforderliche Gewichtungen zu beachten („gewogenes arithmetisches Mittel“) und zu nutzen (Bildung des arithmetischen Mittels aus arithmetischen Mitteln von Teilmengen).

Wahrscheinlichkeitsrechnung

WS 2.1 Grundraum (Menge der möglichen Versuchsausgänge) und Ereignisse in angemessenen Situationen verbal bzw. formal angeben können

WS 2.2 relative Häufigkeit als Schätzwert von Wahrscheinlichkeit verwenden und anwenden können

WS 2.3 Wahrscheinlichkeiten unter der Verwendung der Laplace-Annahme (Laplace-Wahrscheinlichkeit) berechnen und interpretieren können, Additionsregel und Multiplikationsregel anwenden und interpretieren können

Anmerkungen:

Die Multiplikationsregel kann unter Verwendung der kombinatorischen Grundlagen und der Anwendung der Laplace-Regel (auch) umgangen werden.

WS 2.4 Binomialkoeffizienten berechnen und interpretieren können

Wahrscheinlichkeitsverteilung(en)

- WS 3.1 die Begriffe *Zufallsvariable*, (*Wahrscheinlichkeits-*)*Verteilung*, *Erwartungswert* und *Standardabweichung* verständig deuten und einsetzen können
- WS 3.2 Binomialverteilung als Modell einer diskreten Verteilung kennen – Erwartungswert sowie Varianz/Standardabweichung binomialverteilter Zufallsgrößen ermitteln können, Wahrscheinlichkeitsverteilung binomialverteilter Zufallsgrößen angeben können, Arbeiten mit der Binomialverteilung in anwendungsorientierten Bereichen
- WS 3.3 Situationen erkennen und beschreiben können, in denen mit Binomialverteilung modelliert werden kann
- WS 3.4** die Normalverteilung kennen und anwenden; Wahrscheinlichkeiten als Flächeninhalte unter dem Graphen der Dichtefunktion deuten und anwenden; die Bedeutung des Erwartungswerts und der Standardabweichung für den Graphen der Dichtefunktion kennen und anwenden
- WS 3.5** Wahrscheinlichkeiten, Quantile und um den Erwartungswert symmetrische Intervalle einer normalverteilten Zufallsvariablen interpretieren und mit Technologieinsatz ermitteln; die σ -Regeln (σ , 2σ , 3σ ; siehe Formelsammlung) für normalverteilte Zufallsvariablen kennen und anwenden

** gültig ab Haupttermin 2026/27 (Mai 2027)

Kontexte

Zentrale Aufgabe der Schule ist die Vermittlung fundierten Wissens, insbesondere sollen die Schülerinnen und Schüler zur selbstständigen und aktiven Aneignung von Wissen befähigt und angehalten werden. Zudem sollen sie im Laufe der Schulzeit immer wieder zur kritisch prüfenden Auseinandersetzung mit dem verfügbaren Wissen ermutigt werden.

Die Schülerinnen und Schüler erlernen auf diese Weise, ihrem Alter entsprechend Problemstellungen zu definieren, zu bearbeiten und ihren Erfolg zu kontrollieren. Die in unterschiedlichen Bildungsbereichen entwickelten „überfachlichen“ Kompetenzen können bzw. sollen Eingang in die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik finden. Dabei ist besonders darauf hinzuweisen, dass den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit gegeben werden muss, an Vorerfahrungen und Vorkenntnisse zu entsprechenden Kontexten anzuknüpfen.

Die angegebene Aufzählung von Kontexten und deren Konkretisierung stellt eine Auswahl vorhandener Einsatzgebiete von Mathematik dar. Diese Konkretisierung ist als Hilfestellung zur Vorbereitung auf die standardisierte schriftliche Reifeprüfung gedacht. Die nachfolgend angeführten Kontexte können jedenfalls ohne detaillierte Erklärung bei der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung vorkommen. Bei allen anderen Kontexten werden in der jeweiligen Aufgabenstellung im einleitenden Text notwendige und hinreichend genaue Erklärungen gegeben.

Bei der Anwendung von Mathematik in alltäglichen Situationen kommt man nicht umhin, sich auch mit Größenverhältnissen, (physikalischen) Größen im Allgemeinen und Einheiten im Speziellen auseinanderzusetzen. Der korrekte Umgang mit Größen(verhältnissen) und Einheiten ist jedenfalls in Kommunikationssituationen unumgänglich und zeugt von einem tiefergehenden Verständnis für Zusammenhänge.

1 Prozent = 10^{-2} = 10 000 ppm = Teile pro Hundert = 1 %

1 Promille = 10^{-3} = 1 000 ppm = Teile pro Tausend = 0,1 % = 1 ‰

1 ppm (parts per million) = 10^{-6} = Teile pro Million = 0,0001 %

Vorsilben

Vorsilbe	Bedeutung	Symbol	
Tera-	Billion	T	10^{12} = 1 000 000 000 000
Giga-	Milliarde	G	10^9 = 1 000 000 000
Mega-	Million	M	10^6 = 1 000 000
Kilo-	tausend	k	10^3 = 1 000
Hekto-	hundert	h	10^2 = 100
Deka-	zehn	da	10^1 = 10
Dezi-	Zehntel	d	10^{-1} = 0,1
Zenti-	Hundertstel	c	10^{-2} = 0,01
Milli-	Tausendstel	m	10^{-3} = 0,001
Mikro-	Millionstel	μ	10^{-6} = 0,000 001
Nano-	Milliardstel	n	10^{-9} = 0,000 000 001
Pico-	Billionstel	p	10^{-12} = 0,000 000 000 001

Größen und ihre Einheiten

Größe	Einheit	Symbol	Beziehung
Temperatur	Grad Celsius bzw. Kelvin	°C, K	$\Delta t = \Delta T$
Frequenz	Hertz	Hz	$1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$
Energie, Arbeit, Wärmemenge	Joule	J	$1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$
Kraft	Newton	N	$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Drehmoment	Newtonmeter	N · m	$1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$
elektrischer Widerstand	Ohm	Ω	$1 \Omega = 1 \text{ V} \cdot \text{A}^{-1} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-3}$
Druck	Pascal	Pa	$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
elektrische Stromstärke	Ampere	A	$1 \text{ A} = 1 \text{ C} \cdot \text{s}^{-1}$
elektrische Spannung	Volt	V	$1 \text{ V} = 1 \text{ J} \cdot \text{C}^{-1} =$ $1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{s}^{-3}$
Leistung	Watt	W	$1 \text{ W} = 1 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$

Technisch-naturwissenschaftliche Grundlagen

Dichte	$\rho = \frac{m}{V}$		
Leistung	$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$	$P = \frac{dW}{dt}$	
Kraft	$F = m \cdot a$		
Arbeit	$W = F \cdot s$		
	$W = \int F(s) ds$	$F = \frac{dW}{ds}$	
kinetische Energie	$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$		
potenzielle Energie	$E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$		
gleichförmige geradlinige Bewegung	$v = \frac{s}{t}$	$v = \frac{ds}{dt}$	$v(t) = s'(t)$
gleichmäßig beschleunigte geradlinige Bewegung	$v = a \cdot t + v_0$	$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$	$a(t) = v'(t) = s''(t)$

Finanzmathematik

Der Lehrplan für Mathematik nimmt nicht nur Bezug auf naturwissenschaftlich-technische Aspekte, sondern thematisiert auch wirtschaftliche Belange. Daher sind grundlegende Begriffe in diesem Bereich ebenfalls notwendig.

Zinseszinsrechnung

K_0 ... Anfangskapital

K_n ... Endkapital nach n Jahren

i ... Jahreszinssatz

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$$

Kosten- und Preistheorie

x ... produzierte, angebotene, nachgefragte bzw. verkaufte Menge ($x \geq 0$)

Kostenfunktion K	$K(x)$
Fixkosten F	$K(0)$
variable Kostenfunktion $K_v(x)$	$K_v(x) = K(x) - F$
Grenzkostenfunktion K'	$K'(x)$
Preisfunktion p	$p(x)$
Erlösfunktion (Umsatzfunktion) E	$E(x) = p(x) \cdot x$
Grenzerlösfunktion E'	$E'(x)$
Gewinnfunktion G	$G(x) = E(x) - K(x)$
Grenzgewinnfunktion G'	$G'(x)$
untere Gewinngrenze (Break-even-Point, Gewinnschwelle)	$E(x) = K(x)$... bei (erster) Nullstelle x der Gewinnfunktion