

Süßwarenproduktion

Ein Unternehmen produziert Süßwaren.

- a) Eine bestimmte Sorte von Schokoriegeln wird im Werk A und im Werk B produziert. Aufgrund unterschiedlicher Produktionsbedingungen sind die Kostenfunktionen für die Produktion in den beiden Werken unterschiedlich.

x ... Produktionsmenge in ME

$K_A(x)$... Gesamtkosten im Werk A bei der Produktionsmenge x in GE

$K_B(x)$... Gesamtkosten im Werk B bei der Produktionsmenge x in GE

Bei der Produktionsmenge x_1 sind die jeweiligen Gesamtkosten in beiden Werken gleich hoch.

- 1) Argumentieren Sie, dass bei der Produktionsmenge x_1 auch die jeweiligen Durchschnittskosten in beiden Werken gleich hoch sind. [0/1 P.]

Für K_A gilt:

$$K_A(x) = 0,0001 \cdot x^2 + 0,17 \cdot x + 200$$

Für K_B gilt:

K_B ist eine lineare Funktion. Die Fixkosten betragen 260 GE, die variablen Stückkosten betragen 0,3 GE/ME.

- 2) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion K_B auf. [0/1 P.]
- 3) Berechnen Sie diejenige Produktionsmenge, bei der die jeweiligen Grenzkosten in beiden Werken gleich hoch sind. [0/1 P.]

- b) Die Gesamtkosten bei der Produktion von Waffelschnitten können durch die lineare Kostenfunktion K beschrieben werden.

$$K(x) = a \cdot x + b$$

x ... Produktionsmenge in ME

$K(x)$... Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE

In Abbildung 1 sind die Graphen der Grenzkostenfunktion K' und der Durchschnittskostenfunktion \bar{K} dargestellt.

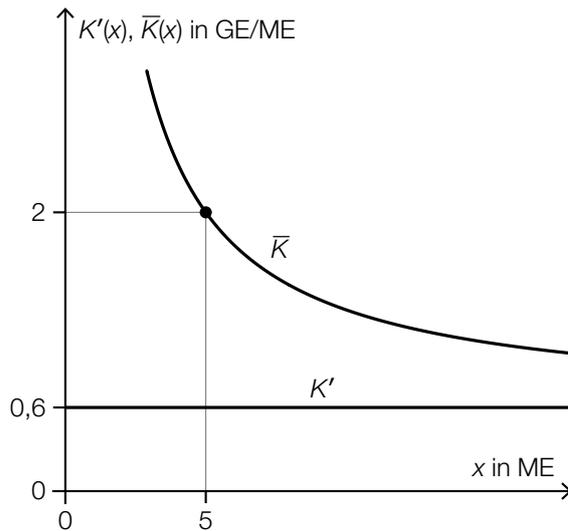


Abbildung 1

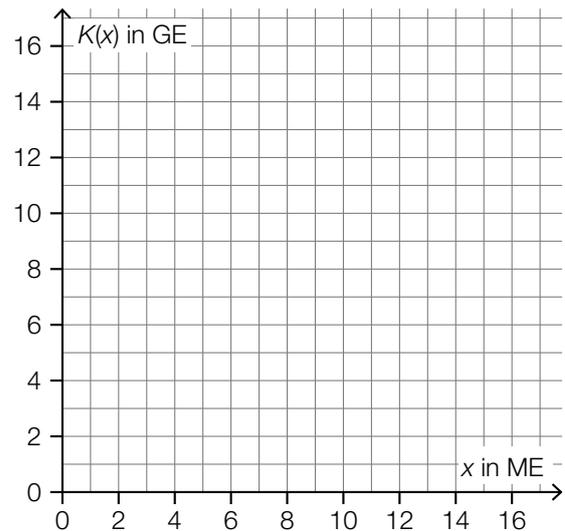


Abbildung 2

- 1) Geben Sie die Steigung a der Kostenfunktion K an.

$a =$ _____ GE/ME

[0/1 P.]

- 2) Zeichnen Sie in Abbildung 2 den Graphen der Kostenfunktion K ein.

[0/1 P.]

- c) Für die Produktion von Schokolinsen sind die Kostenfunktion K und die Erlösfunktion E bekannt:

$$K(x) = 0,0003 \cdot x^3 - 0,017 \cdot x^2 + 0,4 \cdot x + 40$$

$$E(x) = 1,5 \cdot x$$

x ... produzierte bzw. abgesetzte Menge in ME

$K(x)$... Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE

$E(x)$... Erlös bei der Absatzmenge x in GE

- 1) Stellen Sie eine Gleichung der Gewinnfunktion G auf. [0/1 P.]
- 2) Berechnen Sie den maximalen Gewinn. [0/1 P.]

Es wird folgende Berechnung durchgeführt:

$$\bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = 0,0003 \cdot x^2 - 0,017 \cdot x + 0,4 + \frac{40}{x}$$

$$0,0006 \cdot x - 0,017 - \frac{40}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x \approx 52,5$$

- 3) Interpretieren Sie die Zahl 52,5 im gegebenen Sachzusammenhang. [0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

Süßwarenproduktion

a1) Wenn $K_A(x_1) = K_B(x_1)$ gilt, dann gilt auch $\frac{K_A(x_1)}{x_1} = \frac{K_B(x_1)}{x_1}$, daher sind die jeweiligen Durchschnittskosten in beiden Werken gleich hoch.

a2) $K_B(x) = 0,3 \cdot x + 260$

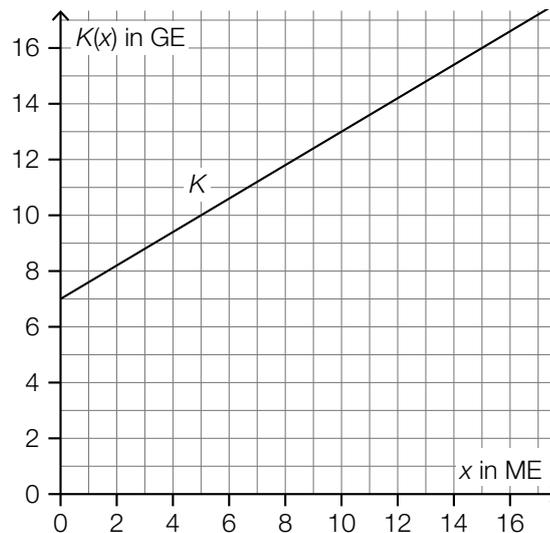
a3) $K_A'(x) = K_B'(x)$ oder $0,0002 \cdot x + 0,17 = 0,3$
 $x = 650$

Bei einer Produktion von 650 ME sind die jeweiligen Grenzkosten in beiden Werken gleich hoch.

- a1) Ein Punkt für das richtige Argumentieren.
a2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von K_B .
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Produktionsmenge.

b1) $a = 0,6$ GE/ME

b2)



- b1) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Wertes von a .
b2) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen der Kostenfunktion K .

c1) $G(x) = E(x) - K(x)$

$$G(x) = -0,0003 \cdot x^3 + 0,017 \cdot x^2 + 1,1 \cdot x - 40$$

c2) $G'(x) = 0$ oder $-0,0009 \cdot x^2 + 0,034 \cdot x + 1,1 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$x_1 = 58,62\dots \quad (x_2 = -20,84\dots)$$

$$G(58,62\dots) = 22,46\dots$$

Der maximale Gewinn beträgt rund 22,5 GE.

c3) Das Betriebsoptimum bei der Produktion von Schokolinsen liegt bei rund 52,5 ME.

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von G.

c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des maximalen Gewinns.

c3) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

Werkzeugproduktion

In einer Fabrik werden Werkzeuge hergestellt. Der Fabrik ist auch ein Shop für den Direktverkauf angeschlossen.

- a) Im Shop ist der Erlös aus dem Verkauf eines bestimmten Schraubenziehers, der zu einem fixen Preis verkauft wird, erfasst worden:

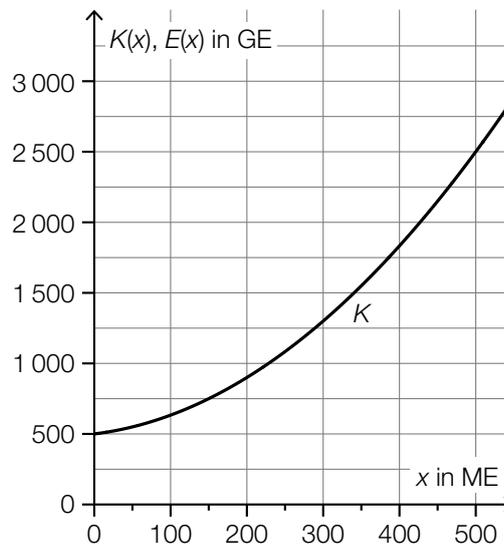
verkaufte Menge in ME	Erlös in GE
50	250
110	605

Die Daten in der obigen Wertetabelle sind allerdings fehlerhaft.

- 1) Weisen Sie nach, dass die obige Wertetabelle nicht zur Erlösfunktion des Schraubenziehers passen kann. [0/1 P.]

Es stellt sich heraus, dass nur der Erlös aus dem Verkauf von 50 ME korrekt erfasst wurde.

- 2) Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung den Graphen der zugehörigen Erlösfunktion E ein. [0/1 P.]



x ... produzierte bzw. abgesetzte Menge in ME
 $K(x)$... Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE
 $E(x)$... Erlös bei der Absatzmenge x in GE

- 3) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die Gewinngrenzen ab.

untere Gewinngrenze: _____ ME

obere Gewinngrenze: _____ ME

[0/1 P.]

- 4) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass für die Funktionen E und K eine richtige Aussage entsteht.

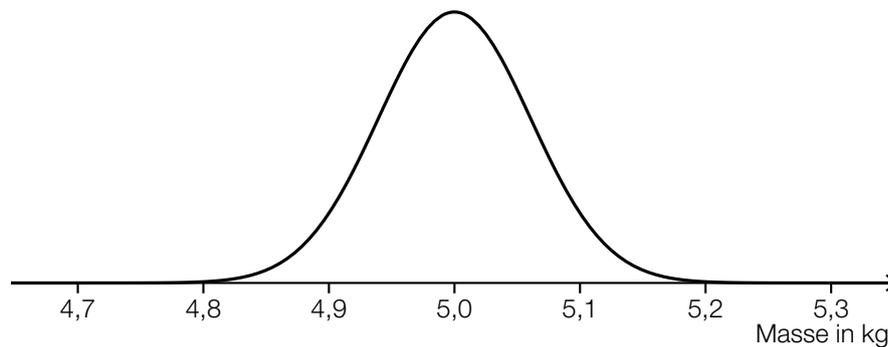
[0/1 P.]

Wenn für eine Menge x_0 der Zusammenhang _____^①_____ gilt, dann ist _____^②_____.

①	
$E(x_0) = K(x_0)$	<input type="checkbox"/>
$E'(x_0) = K'(x_0)$	<input type="checkbox"/>
$E(x_0) > K(x_0)$	<input type="checkbox"/>

②	
x_0 kleiner als der Break-even-Point	<input type="checkbox"/>
$x_0 = 0$	<input type="checkbox"/>
x_0 diejenige Menge, bei der der Gewinn maximal ist	<input type="checkbox"/>

- b) Für die Produktion eines bestimmten Werkzeugs wird ein Rohstoff in Packungen angeliefert. Die Masse dieser Packungen ist annähernd normalverteilt mit einem Erwartungswert von 5 kg. In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion dargestellt.



Die Wahrscheinlichkeit, dass die Masse einer zufällig ausgewählten Packung um höchstens 0,1 kg vom Erwartungswert abweicht, beträgt 90 %.

- 1) Veranschaulichen Sie diese Wahrscheinlichkeit in der obigen Abbildung. [0/1 P.]
- 2) Berechnen Sie die zugehörige Standardabweichung. [0/1 P.]

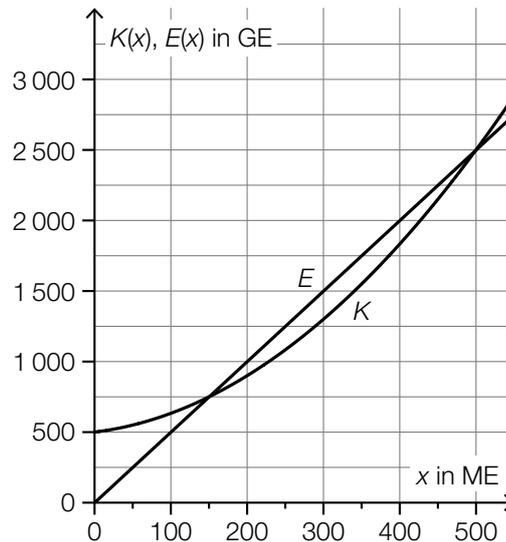
Möglicher Lösungsweg

a1) $p = \frac{250 \text{ GE}}{50 \text{ ME}} = 5 \text{ GE/ME}$

$p = \frac{605 \text{ GE}}{110 \text{ ME}} = 5,5 \text{ GE/ME}$

Dies steht im Widerspruch dazu, dass der Schraubenzieher zu einem fixen Preis verkauft wird.

a2)



a3) untere Gewinngrenze: 150 ME
obere Gewinngrenze: 500 ME

Toleranzbereich: jeweils ± 25 ME

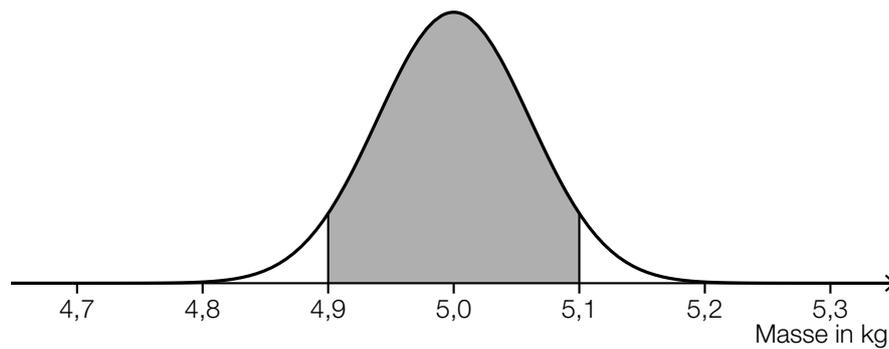
a4)

①	
$E'(x_0) = K'(x_0)$	<input checked="" type="checkbox"/>

②	
x_0 diejenige Menge, bei der der Gewinn maximal ist	<input checked="" type="checkbox"/>

- a1) Ein Punkt für das richtige Nachweisen.
a2) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen der Erlösfunktion E .
a3) Ein Punkt für das Ablesen der richtigen Gewinngrenzen.
a4) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile.

b1)



b2) X ... Masse in kg

$$P(X \leq 4,9) = 0,05$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$\sigma = 0,060... \text{ kg}$$

b1) Ein Punkt für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit.

b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Standardabweichung.

Pumpenproduktion

Aufgabennummer: B_169

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

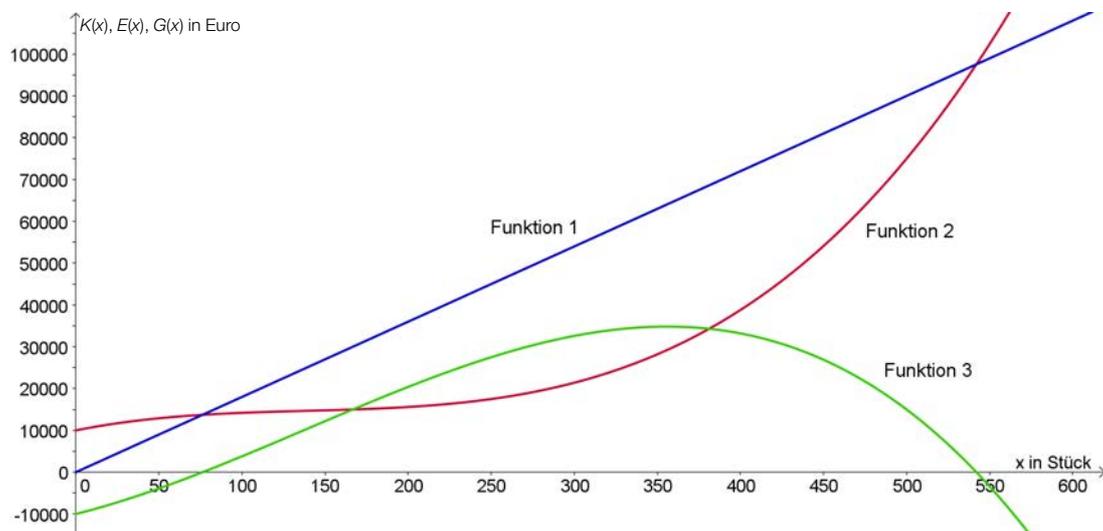
Bei der Produktion von Schmutzwasserpumpen wird ein bestimmtes Modell hergestellt. Für die Kostenfunktion K bei der Herstellung dieses Modells gilt:

$$K(x) = 0,0012 \cdot x^3 - 0,5 \cdot x^2 + 80 \cdot x + 10\,000$$

x ... Stückzahl produzierter Schmutzwasserpumpen

$K(x)$... Kosten bei der Produktion von x Schmutzwasserpumpen in Euro (€)

- a) Die unten stehende Abbildung zeigt die Funktionsgraphen
- der Kostenfunktion K
 - der Erlösfunktion E
 - der Gewinnfunktion G



– Begründen Sie, warum der Graph von Funktion 3 den Verlauf der Gewinnfunktion beschreibt.

- b) – Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Kosten, wenn die Produktion von 100 auf 101 Stück erhöht wird.
 – Berechnen Sie die Grenzkosten für 100 Stück mithilfe der Grenzkostenfunktion.
 – Begründen Sie, warum die Ergebnisse dieser Berechnungen unterschiedlich sind.

- c) Die Schmutzwasserpumpen werden zu einem Preis von € 200 pro Stück verkauft.
- Stellen Sie die Funktionsgleichung der Gewinnfunktion G auf.
 - Berechnen Sie, bei wie vielen verkauften Schmutzwasserpumpen der Gewinn maximal ist.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

- a) Funktion 3 stellt die Gewinnfunktion dar.
 Der Funktionsgraph der Gewinnfunktion schneidet die vertikale Achse bei € -10.000 (Fixkosten).
 Die Nullstellen der Gewinnfunktion liegen direkt unterhalb der Schnittpunkte der Kosten- und der Erlösfunktion.
 Zwischen den Gewinn Grenzen ist der Gewinn positiv, weil dort der Graph der Erlösfunktion oberhalb des Graphen der Kostenfunktion verläuft.

Alle richtigen Begründungen, die eine klare Entscheidung ermöglichen, sind zu akzeptieren.

b) $\frac{K(101) - K(100)}{1} = 15,861 \approx 15,86$

Die mittlere Änderungsrate beträgt rund € 15,86/Stück.

$$K'(x) = 0,0036 \cdot x^2 - x + 80 \Rightarrow K'(100) = 16$$

Die Grenzkosten bei 100 Stück betragen € 16/Stück.

Die Ergebnisse sind unterschiedlich, weil der Differenzenquotient die exakte Kostensteigerung angibt, während hingegen der Differenzialquotient einen Näherungswert für die Änderung der Kosten bei der Steigerung um ein Stück angibt.

- c) Gewinn = Erlös - Kosten
 $G(x) = 200 \cdot x - (0,0012 \cdot x^3 - 0,5 \cdot x^2 + 80 \cdot x + 10000)$
 $G(x) = -0,0012 \cdot x^3 + 0,5 \cdot x^2 + 120 \cdot x - 10000$
 $G'(x) = -0,0036 \cdot x^2 + x + 120$
 $-0,0036 \cdot x^2 + x + 120 = 0$ Berechnung mittels Technologieeinsatz: $x \approx 368,29$
 Der maximale Gewinn wird bei 368 Stück erzielt.

Auch andere korrekte Berechnungswege sind als richtig zu werten.

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) 3 Funktionale Zusammenhänge
- c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

- a) 4 Analysis
- b) 4 Analysis
- c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) D Argumentieren und Kommunizieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

- a) —
- b) D Argumentieren und Kommunizieren
- c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

- a) leicht
- b) mittel
- c) mittel

Punkteanzahl:

- a) 1
- b) 3
- c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Niedrigzinsphase

Infolge der Finanzmarktkrise 2008 entstand eine über Jahre andauernde Phase niedriger Zinsen.

- a) Für einen Kredit mit jährlich nachschüssigen Annuitäten in Höhe von je € 12.000 wurde in der Zeit vor der Niedrigzinsphase ein fixer Jahreszinssatz i vereinbart.

Die Zeile des Tilgungsplans für das Jahr 7 ist gegeben:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
7	€ 3.628,87	€ 8.371,13	€ 12.000,00	€ 78.030,55

- 1) Berechnen Sie den Jahreszinssatz i . [0/1 P.]
2) Berechnen Sie die Höhe des Kredits. [0/1 P.]

Nach dem Jahr 7 wird mit der Bank über einen neuen Zinssatz verhandelt. Mit dem ursprünglichen Zinssatz ergibt sich im Tilgungsplan folgende Zeile für das Jahr 8:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
8	Z_8	T_8	€ 12.000,00	K_8

Mit dem neuen, niedrigeren Zinssatz ergibt sich im Tilgungsplan folgende Zeile für das Jahr 8:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
8	Z_{neu}	T_{neu}	€ 12.000,00	K_{neu}

Diese beiden Zeilen für das Jahr 8 werden verglichen.

- 3) Tragen Sie jeweils das richtige Zeichen („<“ oder „>“) ein.

$$Z_{\text{neu}} \text{ ______ } Z_8 \quad T_{\text{neu}} \text{ ______ } T_8 \quad K_{\text{neu}} \text{ ______ } K_8 \quad \text{[0/1 P.]}$$

b) Bei Tilgungsplänen können verschiedene Sonderfälle auftreten.

- 1) Ordnen Sie den beiden Satzanfängen jeweils eine Fortsetzung aus A bis D so zu, dass zutreffende Aussagen entstehen. [0/1 P.]

Wenn der Tilgungsanteil in einem bestimmten Jahr gleich 0 ist,	
Wenn der Tilgungsanteil in einem bestimmten Jahr negativ ist,	

A	so wird die Restschuld in diesem Jahr vollständig beglichen.
B	so ist die Restschuld in diesem Jahr niedriger als im vorhergehenden Jahr.
C	so werden in diesem Jahr nur die anfallenden Zinsen beglichen.
D	so wird in diesem Jahr weniger als die anfallenden Zinsen zurückgezahlt.

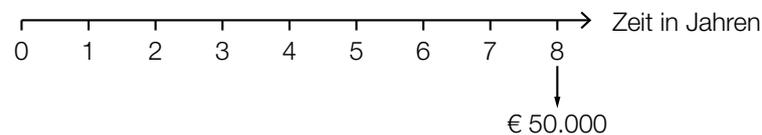
- c) In 8 Jahren sollen € 50.000 angespart werden. Die nachstehende Gleichung beschreibt den Ansparplan für einen positiven Jahreszinssatz.

$$R \cdot \frac{q^3 - 1}{q - 1} \cdot q^5 + 20\,000 \cdot q^2 = 50\,000$$

R ... Rate

q ... jährlicher Aufzinsungsfaktor

- 1) Tragen Sie alle Raten R und den Betrag in Höhe von € 20.000 auf der nachstehenden Zeitachse ein. [0/1/2 P.]



- 2) Berechnen Sie die Höhe der Rate R für den Fall, dass der Zinssatz 0 % p. a. ist. [0/1 P.]

- d) Die Europäische Zentralbank legt einen sogenannten *Leitzinssatz* fest. Seit der Finanzmarktkrise 2008 ist der Leitzinssatz gesunken (siehe nachstehende Tabelle):

Zeit ab 1.1.2008 in Jahren	0	1	2	3	4	5	6	7
Leitzinssatz in Prozent	4,00	2,50	1,00	1,00	1,00	0,75	0,25	0,05

Datenquelle: <https://www.finanzen.net/leitzins/@historisch> [21.10.2020].

Die zeitliche Entwicklung des Leitzinssatzes soll mithilfe von exponentieller Regression durch die Funktion L modelliert werden.

$$L(t) = a \cdot b^t$$

t ... Zeit ab 1.1.2008 in Jahren

$L(t)$... Leitzinssatz zur Zeit t in Prozent

- 1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der Funktion L auf. [0/1 P.]
- 2) Ermitteln Sie den Zeitraum, in dem sich der Leitzinssatz gemäß der Funktion L jeweils halbiert. [0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

a1) $K_6 = 78030,55 + 8371,13 = 86401,68$

$$i = \frac{3628,87}{86401,68} = 0,0419\dots$$

Der Zinssatz beträgt rund 4,2 % p. a.

a2) $K_0 \cdot 1,042^7 = 12000 \cdot \frac{1,042^7 - 1}{0,042} + 78030,55$

$$K_0 = 130000,001\dots$$

Die Höhe des Kredits betrug € 130.000.

a3) $Z_{\text{neu}} < Z_8 \quad T_{\text{neu}} > T_8 \quad K_{\text{neu}} < K_8$

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Jahreszinssatzes i .

a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Höhe des Kredits.

a3) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Zeichen.

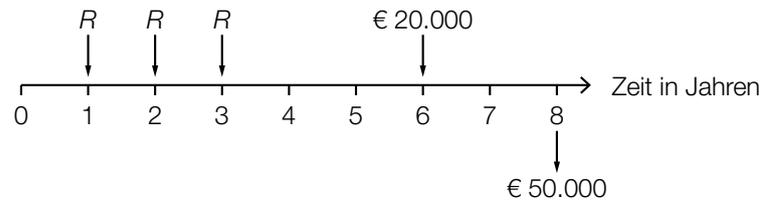
b1)

Wenn der Tilgungsanteil in einem bestimmten Jahr gleich 0 ist,	C
Wenn der Tilgungsanteil in einem bestimmten Jahr negativ ist,	D

A	so wird die Restschuld in diesem Jahr vollständig beglichen.
B	so ist die Restschuld in diesem Jahr niedriger als im vorhergehenden Jahr.
C	so werden in diesem Jahr nur die anfallenden Zinsen beglichen.
D	so wird in diesem Jahr weniger als die anfallenden Zinsen zurückgezahlt.

b1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

c1)



c2) $R \cdot 3 + 20\,000 = 50\,000$

$R = € 10.000$

- c1) Ein Punkt für das richtige Eintragen der Raten.
Ein Punkt für das richtige Eintragen des Betrags in Höhe von € 20.000.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen von R .

d1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$L(t) = 4,472 \cdot 0,599^t$ (Parameter gerundet)

d2) $0,5 = 0,599^t$

$t = \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,599)} = 1,352\dots$

Der Leitzinssatz halbiert sich gemäß der Funktion L jeweils in einem Zeitraum von rund 1,35 Jahren.

- d1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Funktion L .
d2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Zeitraums.

Smartphone-Akkus

a) Max notiert zu verschiedenen Zeitpunkten den Ladestand seines Smartphones.

Zeit nach Beendigung des Ladevorgangs in Stunden	2,5	4	5,5	6,5	8	10
Ladestand des Smartphones in Prozent	74	66	52	41	22	12

Die Zeit nach Beendigung des Ladevorgangs wird mit t bezeichnet. Der Ladestand des Smartphones soll in Abhängigkeit von t näherungsweise durch die lineare Funktion L beschrieben werden.

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Funktion L auf. [0/1 P.]

Das Smartphone gibt eine Warnung aus, wenn der Ladestand auf 15 % gesunken ist.

2) Ermitteln Sie, nach welcher Zeit dies gemäß der Funktion L der Fall ist. [0/1 P.]

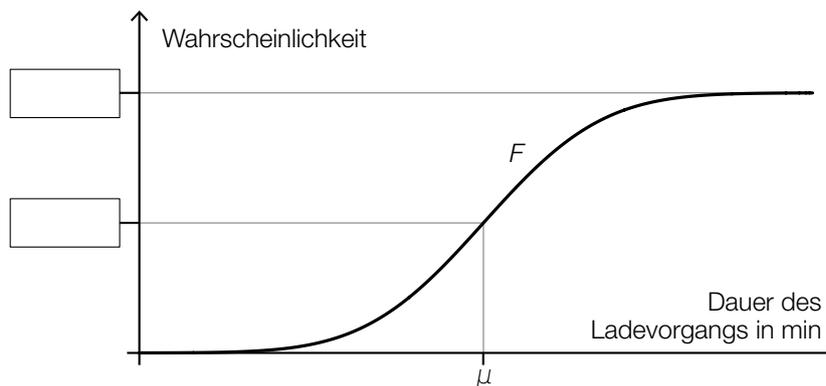
b) Die Dauer eines Ladevorgangs bei einem bestimmten Akkutyp kann als annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ angenommen werden.

1) Geben Sie mithilfe von μ und σ dasjenige Intervall an, in dem die Dichtefunktion negativ gekrümmt ist.

] _____ ; _____ [

[0/1 P.]

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Verteilungsfunktion F dargestellt.



2) Tragen Sie in der obigen Abbildung die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

[0/1 P.]

Es gilt: $\mu = 92$ min und $F(86) = 0,12$

3) Berechnen Sie die Standardabweichung σ .

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

a1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$L(t) = -8,90 \cdot t + 98,6 \quad (\text{Koeffizienten gerundet})$$

a2) $L(t) = 15$ oder $-8,90 \cdot t + 98,6 = 15$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$t = 9,39\dots$$

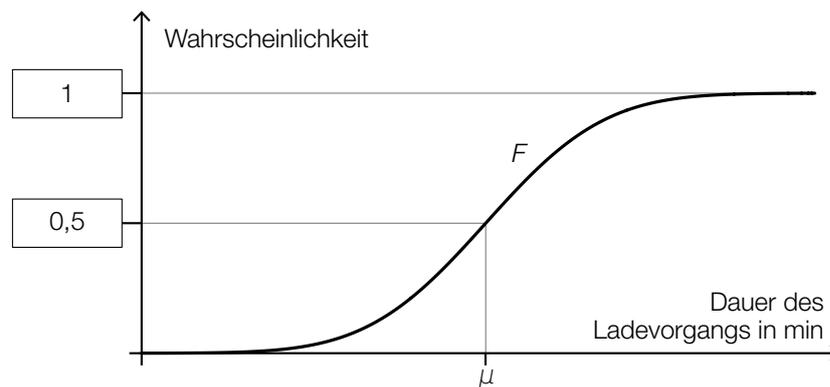
Gemäß der Funktion L gibt das Smartphone etwa 9,4 h nach Beendigung des Ladevorgangs eine Warnung aus.

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der linearen Funktion L .

a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Zeit.

b1) $]\mu - \sigma; \mu + \sigma[$

b2)



b3) X ... Dauer des Ladevorgangs in min

$$F(86) = P(X \leq 86) = 0,12$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$\sigma = 5,106\dots \text{ min}$$

b1) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Intervalls.

b2) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Zahlen.

b3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Standardabweichung σ .

Intelligenzquotient

Aufgabennummer: B_236

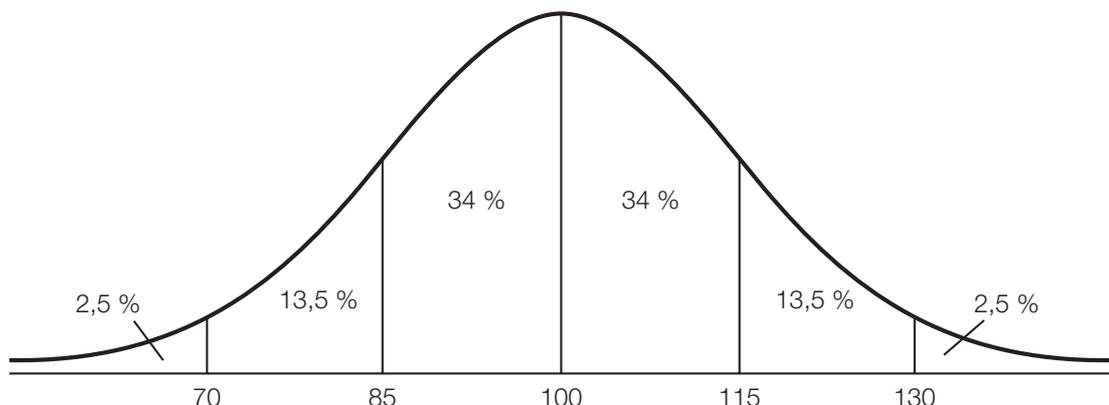
Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Der Intelligenzquotient (IQ) ist eine Kenngröße zur Bewertung des allgemeinen intellektuellen Leistungsvermögens (Intelligenz) eines Menschen. Er vergleicht die Intelligenz eines Menschen mit der mittleren Intelligenz der Gesamtbevölkerung im selben Zeitraum und im vergleichbaren Alter.

- a) Interpretieren Sie den IQ als normalverteilte Zufallsgröße mit Erwartungswert $\mu = 100$:
- Lesen Sie den ungefähren Wert der Standardabweichung aus der unten stehenden Grafik ab.
 - Lesen Sie die IQ-Untergrenze der intelligentesten 16 % ab.
 - Schätzen Sie aus der Grafik ab, wie viel Prozent der Personen einen höheren IQ als 90 haben.



- b) Bei einem IQ-Test erreichte eine Gruppe von 5 Schülerinnen und Schülern Werte von 90, 95, 100, 105 und 110 IQ-Punkten, eine andere Gruppe 85, 90, 95, 105 und 125 IQ-Punkte.
- Berechnen Sie die arithmetischen Mittel sowie die Streuungsmaße *Spannweite* und *Standardabweichung* (auf eine Dezimalstelle gerundet) der beiden Stichproben.
 - Interpretieren Sie die Unterschiede.

- c) Eine Gruppe von 10 Schülerinnen und Schülern machte einen Intelligenztest. Dieselben Schüler/innen füllten einen Fragebogen aus, der Aufschluss über das Selbstbewusstsein gibt (je höher die Punktezahl, desto größer das Selbstbewusstsein). Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

IQ-Punkte x	101	96	120	105	103	90	107	98	110	103
Selbstbewusstsein y	3	1	4	3	4	2	5	2	4	2

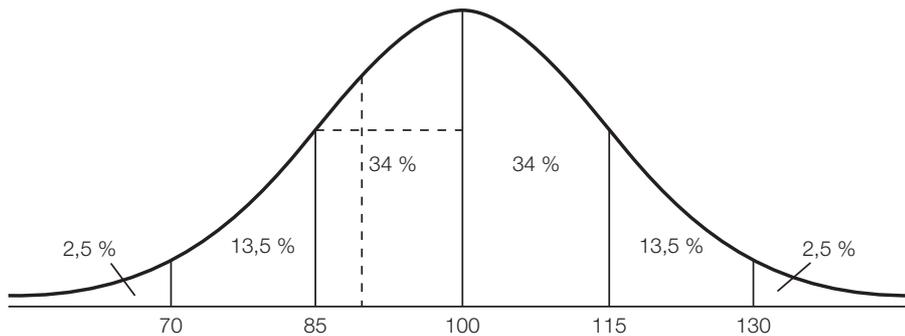
- Ermitteln Sie die Gleichung der Regressionsgeraden.
- Stellen Sie die Punktwolke und die Regressionsgerade grafisch dar.
- Berechnen Sie mithilfe dieses Modells das Selbstbewusstsein eines Schülers oder einer Schülerin mit einem IQ von 110.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

- a) Standardabweichung $\sigma \approx 15$ IQ-Punkte
Die IQ-Untergrenze der intelligentesten 16 % liegt bei 115 IQ-Punkten.



Abschätzen z. B. durch Aufteilen der Fläche unterhalb der Kurve:

Ca. $\frac{1}{4}$ der Fläche zwischen den Grenzen 85 und 100 liegt links von der strichlierten Linie.

$\frac{3}{4}$ von 34 % ≈ 25 %

Etwa 75 % haben einen höheren IQ als 90.

- b)

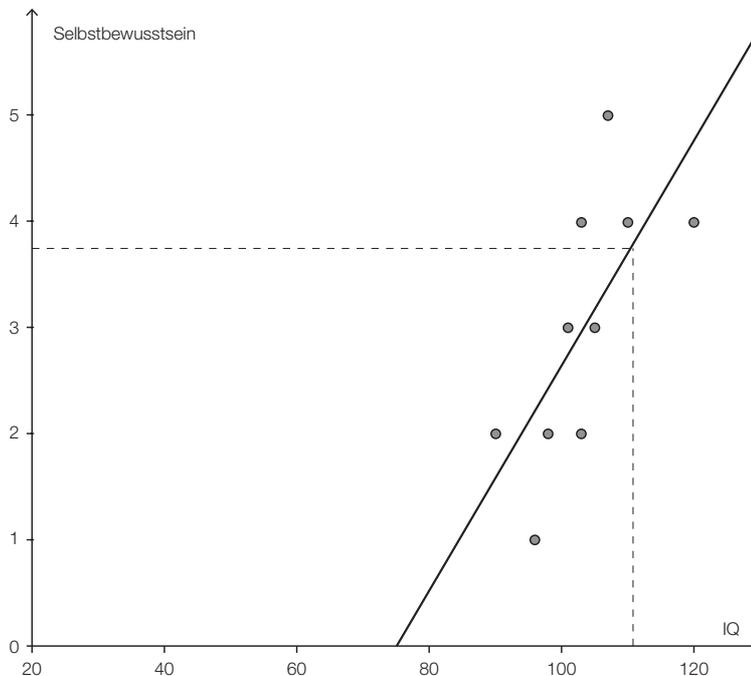
	Gruppe 1	Gruppe 2
arithmetisches Mittel in IQ-Punkten	100	100
Spannweite in IQ-Punkten	20	40
Standardabweichung in IQ-Punkten	7,905... $\approx 7,9$	15,811... $\approx 15,8$

Das arithmetische Mittel ist bei beiden Gruppen gleich.

Die Spannweite und die Standardabweichung sind bei Gruppe 2 doppelt so groß wie bei Gruppe 1.

Die Testergebnisse der Gruppe 2 (2. Stichprobe) sind um das arithmetische Mittel breiter gestreut. Sie liegen weniger dicht beisammen.

- c) Gleichung der Regressionsgeraden:
 $-640x + 6041y = -47$
bzw. $y = 0,106x - 7,944$ (auf 3 Dezimalstellen gerundet)
(mit GeoGebra ermittelt – kann bei anderer Technologie geringfügig abweichen)



Bei Verwendung eines grafikfähigen Taschenrechners reicht eine Handskizze.

Ein Schüler oder eine Schülerin mit einem IQ von 110 erreicht auf der Skala für das Selbstbewusstsein einen Wert von etwa 3,8.

Ableseungenauigkeiten (vor allem bei Handzeichnung) sind zu tolerieren.
Auch eine Berechnung mithilfe der Gleichung ist möglich.

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 5 Stochastik
- b) 5 Stochastik
- c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) C Interpretieren und Dokumentieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) C Interpretieren und Dokumentieren
- c) —

Schwierigkeitsgrad:

- a) leicht
- b) leicht
- c) leicht

Punkteanzahl:

- a) 3
- b) 2
- c) 3

Thema: Psychologie

Quelle: <http://www.dezimmer.net/HTML/1974iq5-korrelation.htm>

Großtrappen

Aufgabennummer: B_131

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Ein LIFE-Projekt in Ostösterreich widmet sich dem Schutz der Großtrappen, einer gefährdeten Vogelart. Zu Beginn des Beobachtungszeitraums wurden in Niederösterreich und im Burgenland 140 Tiere gezählt. 5 Jahre später waren es bereits 244.

- a) – Argumentieren Sie, warum ein lineares bzw. ein unbegrenztes exponentielles Wachstumsmodell die Entwicklung der Tierpopulation zwar beschreibt, dies aber langfristig gesehen nicht der Realität entspricht.
- b) Nehmen Sie ein begrenztes exponentielles Wachstum mit einer Obergrenze von $G = 1\,000$ an. Es gilt folgende Funktion:

$$y(t) = G - c \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

t ... Zeitdauer in Jahren (a)

$y(t)$... Anzahl der Tiere nach t Jahren

c ... Anzahl der Tiere, um die der Anfangsbestand bis zur Obergrenze zunehmen kann

– Berechnen Sie den Stand der Population nach 20 Jahren unter der Voraussetzung, dass die Entwicklung der Vogelpopulation diesem Modell folgt.

- c) In der Realität wird das Wachstum der Großtrappen-Population besser durch die folgende logistische Funktion beschrieben:

$$y(t) = \frac{1\,000}{1 + 6,143 \cdot e^{-0,1369 \cdot t}}$$

t ... Zeitdauer in Jahren (a)

$y(t)$... Anzahl der Tiere nach t Jahren

– Stellen Sie diese Funktion grafisch dar.

– Lesen Sie aus der Grafik ungefähr ab, wann sich der Bestand seit dem Beginn der Beobachtungszeit auf 280 Tiere verdoppelt hat.

– Überprüfen Sie durch Ablesung des Zeitraums bis zur nächsten Verdopplung, ob die Zeitdauer, in der sich der jeweilige Bestand an Tieren verdoppelt, in diesem Modell konstant bleibt.

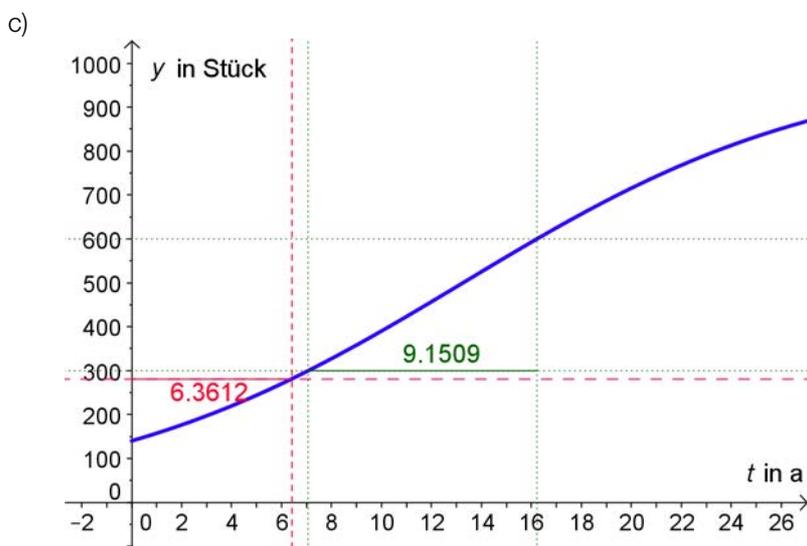
Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Das Wachstum hängt vom Lebensraum und den darin vorhandenen Lebensbedingungen für Großtrappen ab. Langfristig gesehen wird das räumlich begrenzte Schutzgebiet zwar die Vermehrung der Tiere fördern, aber auch nach oben hin einschränken. Daher kann die Zahl der Vögel zwar anfänglich möglicherweise nach einem linearen oder einem unbegrenzten exponentiellen Wachstum verlaufen, aber nicht unendlich steigen, wie es bei diesen beiden Wachstumsmodellen der Fall wäre.

b) $140 = 1000 - c \cdot e^0 \rightarrow c = 860$
 $244 = 1000 - c \cdot e^{5\lambda} \rightarrow \lambda = -0,02577... \approx -0,0258$
 Funktionsgleichung: $y(t) = 1000 - 860 \cdot e^{-0,0258 \cdot t}$
 Prognose $t = 20$ Jahre \rightarrow rund 486 Tiere



- Die Verdopplung vom Anfangsbestand von 140 auf 280 Tiere benötigt etwas mehr als 6 Jahre.
 - Die Verdopplung von 300 auf 600 Tiere benötigt nach diesem Modell einen Zeitraum von etwas mehr als 9 Jahren.
- Bei diesem Modell ist die Dauer, in der sich ein Bestand verdoppelt, nicht konstant.

Ableseungenauigkeiten werden toleriert, insbesondere bei Grafikrechnern und Handskizzen.

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) 3 Funktionale Zusammenhänge
- c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) D Argumentieren und Kommunizieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) —
- b) A Modellieren und Transferieren
- c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) mittel
- c) mittel

Punkteanzahl:

- a) 1
- b) 4
- c) 3

Thema: Biologie

Quellen: —

Bakterien

Aufgabennummer: B_172

Technologieeinsatz:

möglich

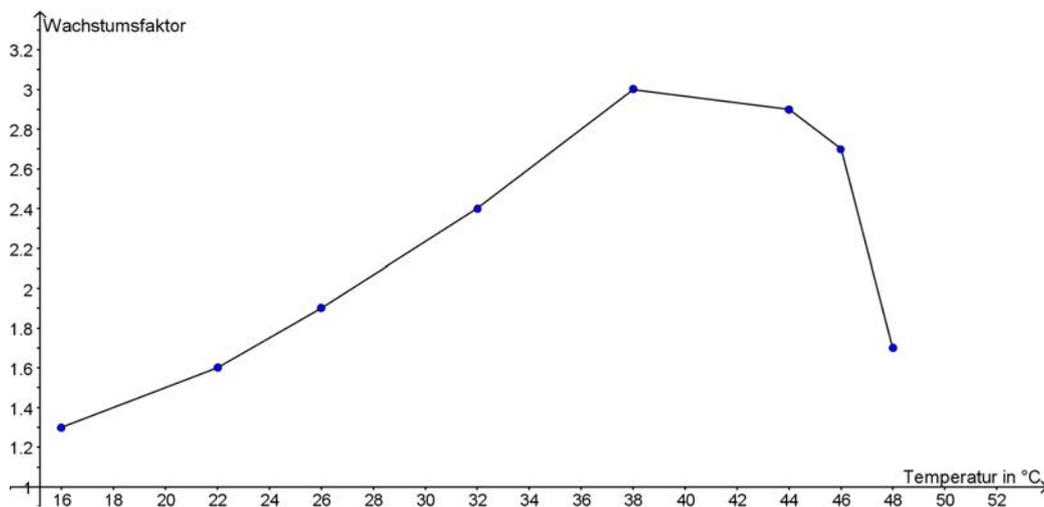
erforderlich

- a) Milchsäurebakterien haben Stäbchenform (sie sind also annähernd zylindrisch) und vermehren sich durch Zellteilung. Sie haben eine Länge von ca. 2 Mikrometern (μm) und einen Durchmesser von ca. $0,9 \mu\text{m}$.

In sauer gewordener Milch wurden in 1 Milliliter (ml) Milch ca. 1 Million Bakterien gemessen.

– Berechnen Sie, wie viel Prozent des Gesamtvolumens der Milch die Bakterien einnehmen.

- b) *Escherichia-coli*-Bakterien im Wasser sind gefährlich für die Gesundheit. In einem Labor wird deren Anzahl stündlich gemessen. Die Bakterien vermehren sich exponentiell, wobei der Wachstumsfaktor temperaturabhängig ist. In der nachstehenden Grafik ist der Wachstumsfaktor in Abhängigkeit von der Temperatur dargestellt.



- Lesen Sie den Wachstumsfaktor bei $32 \text{ }^\circ\text{C}$ warmem Wasser ab.
 – Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Anzahl von Stunden t , die es dauert, bis sich die *Escherichia-coli*-Bakterien in $32 \text{ }^\circ\text{C}$ warmem Wasser von einer ursprünglichen Anzahl N_0 auf eine kritische Anzahl K vermehren.

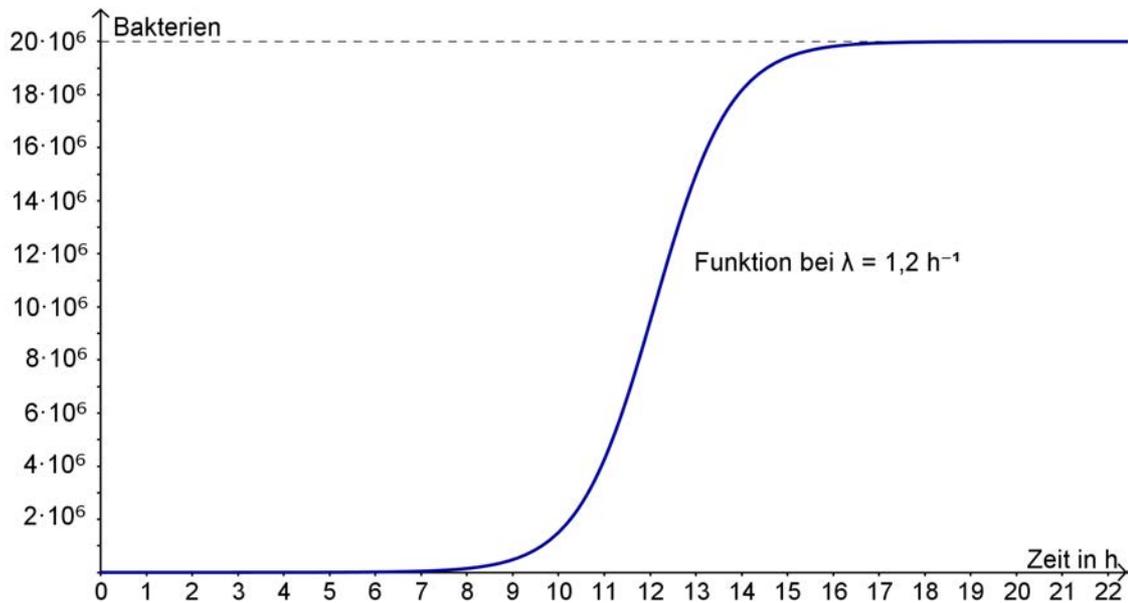
N_0 ... ursprüngliche Anzahl der Bakterien vor dem Vermehrungsprozess

K ... kritische Anzahl an Bakterien

t ... Anzahl der Stunden des Vermehrungsprozesses

- Lösen Sie die erstellte Formel nach t auf.

- c) Ein Bakterienwachstum verläuft nicht unbeschränkt exponentiell, sondern erreicht wegen der begrenzten Ressourcen eine Sättigungsmenge.



Die obenstehende Grafik zeigt das Wachstum einer Bakterienpopulation mit folgender Funktion N :

$$N(t) = \frac{20 \cdot 10^6}{1 + 20 \cdot 10^5 \cdot e^{-\lambda \cdot t}} \quad \text{mit } \lambda = 1,2 \text{ h}^{-1}$$

t ... Zeit in Stunden (h)

$N(t)$... Anzahl der Bakterien nach t Stunden

λ ... Wachstumsparameter in h^{-1}

- Skizzieren Sie in der Grafik den Verlauf der Kurve für $\lambda = 1,5 \text{ h}^{-1}$.

Betrachten Sie den Teilausdruck $e^{-\lambda \cdot t}$ des Nenners der Funktion N .

- Erklären Sie, welchen Einfluss eine Veränderung von $\lambda = 1,2 \text{ h}^{-1}$ auf $\lambda = 1,5 \text{ h}^{-1}$ auf den Teilausdruck $e^{-\lambda \cdot t}$ hat.
- Erklären Sie, welchen Einfluss die Veränderung im Teilausdruck $e^{-\lambda \cdot t}$ auf die gesamte Funktion N hat.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

- a) $1 \text{ ml} = 10^{-3} \text{ L} = 10^{-3} \text{ dm}^3 = 1 \text{ cm}^3$
 $2 \cdot 0,45^2 \cdot \pi \approx 1,27$
 Das Volumen eines Bakteriums beträgt ungefähr $1,27 \mu\text{m}^3$.
 $1,27 \mu\text{m}^3 = 1,27 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^3$
 1 Million Bakterien haben ein Volumen von $1,27 \cdot 10^{-12} \cdot 10^6 \text{ cm}^3 = 1,27 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^3$
 1 cm^3 sind 100 %. $\rightarrow 1,27 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^3$ sind $1,27 \cdot 10^{-4} \%$.
 Die Bakterien nehmen ca. $1,27 \cdot 10^{-4} \%$ des Gesamtvolumens ein.

(Umrechnungen mit anderen korrekten Maßeinheiten sind ebenfalls zu akzeptieren.)

- b) Bei $32 \text{ }^\circ\text{C}$ vermehren sich die Bakterien pro Stunde mit einem Wachstumsfaktor von 2,4.

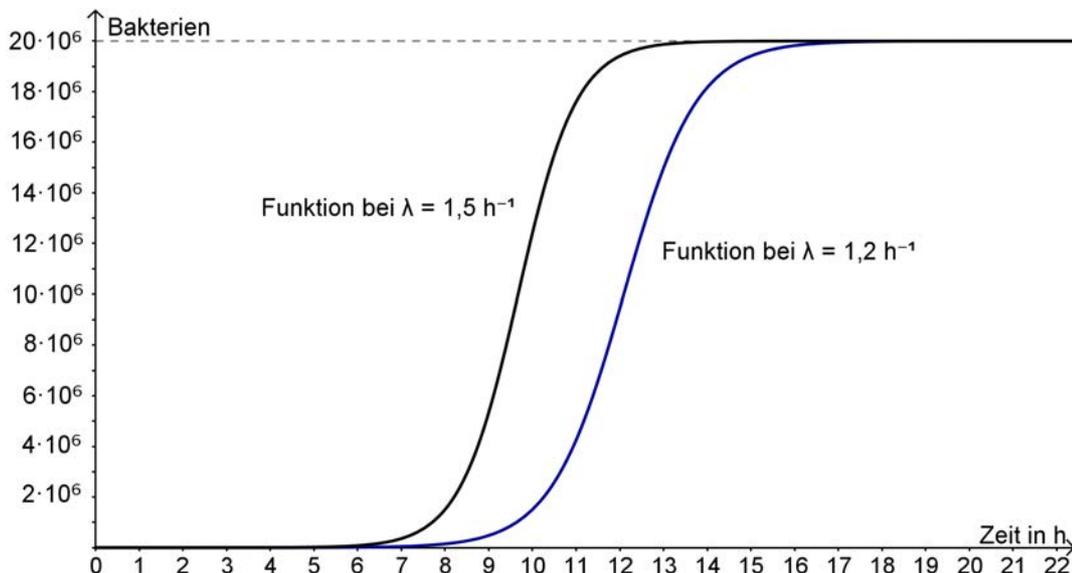
$$K = N_0 \cdot 2,4^t$$

$$\frac{K}{N_0} = 2,4^t$$

$$t = \frac{\log\left(\frac{K}{N_0}\right)}{\log(2,4)}$$

(Welcher Logarithmus verwendet wird, ist gleichgültig.)

- c)



Die Exponentialfunktion $e^{-\lambda \cdot t}$ fällt für $\lambda = 1,5 \text{ h}^{-1}$ schneller als für $\lambda = 1,2 \text{ h}^{-1}$. Ihr Wert nähert sich schneller null.

Fällt die Exponentialfunktion $e^{-\lambda \cdot t}$ schneller, nähert sich der Wert des Nenners schneller dem Wert 1.

Wird der Nenner kleiner, wird der gesamte Bruch größer.

Der Grenzwert von $20 \cdot 10^6$ Bakterien wird bei $\lambda = 1,5 \text{ h}^{-1}$ daher schneller angenähert.

(Alle richtigen Erklärungen sind zu akzeptieren.)

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 1 Zahlen und Maße
- b) 3 Funktionale Zusammenhänge
- c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) 2 Algebra und Geometrie
- c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) A Modellieren und Transferieren
- c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) —
- b) B Operieren und Technologieeinsatz, C Interpretieren und Dokumentieren
- c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) mittel
- c) schwer

Punkteanzahl:

- a) 3
- b) 3
- c) 3

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Spielzeugautos (1)

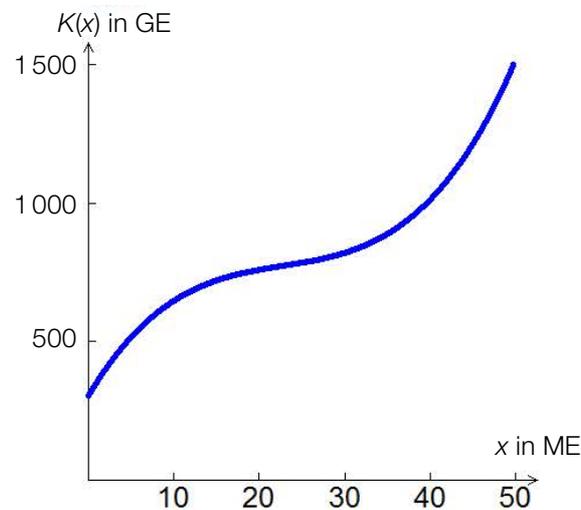
Aufgabennummer: B_200

Technologieeinsatz:

möglich

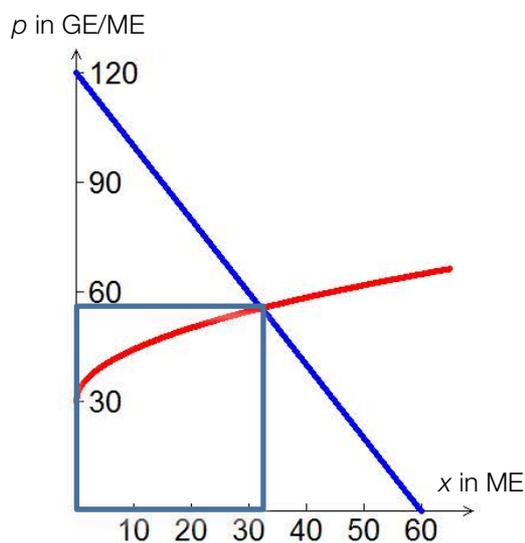
erforderlich

In der nachstehenden Grafik ist eine Kostenfunktion für die Produktion eines Spielzeugautos dargestellt.



- a) – Zeichnen Sie in der Grafik das Betriebsoptimum ein.
– Begründen Sie Ihre Vorgangsweise.
- b) Analysen der anfallenden Produktionskosten haben ergeben, dass die mittlere Kostenänderung bei einer Erhöhung der Produktionsmenge von 10 ME auf 12 ME 17,5 GE/ME beträgt. Die Grenzkosten bei einer Produktion von 10 ME betragen 19,7 GE/ME.
- Erklären Sie, warum sich die mittlere Kostenänderung und die Grenzkosten unterscheiden.
- c) Die Gleichung der Kostenfunktion K lautet $K(x) = 0,03x^3 - 2,05x^2 + 51,7x + 305$, wobei x in Mengeneinheiten (ME) und $K(x)$ in Geldeinheiten (GE) gegeben ist. Das Produkt kann zum Preis von 35,2 GE/ME verkauft werden.
- Berechnen Sie die Verkaufsmenge x , ab der das Unternehmen mit diesem Produkt einen Gewinn erzielen kann.

- d) In der nachstehenden Grafik sind die Angebots- und die Nachfragefunktion für das Produkt, die am Markt ermittelt wurden, dargestellt.



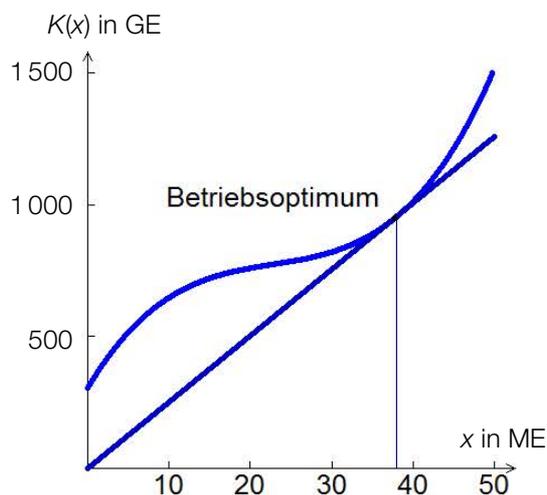
- Interpretieren Sie den Flächeninhalt des dargestellten Rechtecks.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Die Steigung einer Geraden durch den Ursprung entspricht in den Schnittpunkten mit dem Graphen der Kostenfunktion den jeweiligen Stückkosten.

Von allen möglichen Geraden hat diejenige die geringste Steigung, die die Kostenfunktion in nur einem Punkt berührt (Tangente). Ihre Steigung entspricht den geringsten Stückkosten. Sie berührt daher im Betriebsoptimum.

- b) 17,5 GE/ME ist die durchschnittliche Kostenänderung zwischen 10 ME und 12 ME. Es handelt sich um einen Differenzenquotienten. Die Grenzkosten entsprechen dem Differenzialquotienten. Grafisch entsprechen die Grenzkosten der Steigung der Tangente an die Kostenfunktion bei der Produktionsmenge 10.

- c) $K(x) = 0,03x^3 - 2,05x^2 + 51,7x + 305$
 $E(x) = 35,2x$
 $G(x) = E(x) - K(x) = -0,03x^3 + 2,05x^2 - 16,5x - 305$
 $G(x) = 0$

mittels Technologieeinsatz: $x_1 = 21,84$ ME, $x_2 = 54,96$ ME

Ab ca. 21,84 ME kann ein Gewinn erwirtschaftet werden.

- d) Das Produkt aus Menge und Preis ist der Erlös. Der Flächeninhalt entspricht dem Produkt von Marktpreis und Gleichgewichtsmenge.

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 4 Analysis
- b) 4 Analysis
- c) 4 Analysis
- d) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —
- d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren
- b) D Argumentieren und Kommunizieren
- c) B Operieren und Technologieeinsatz
- d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) C Interpretieren und Dokumentieren, D Argumentieren und Kommunizieren
- b) —
- c) A Modellieren und Transferieren, C Interpretieren und Dokumentieren
- d) —

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) mittel
- c) leicht
- d) mittel

Punkteanzahl:

- a) 4
- b) 2
- c) 3
- d) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Beleuchtungskörper

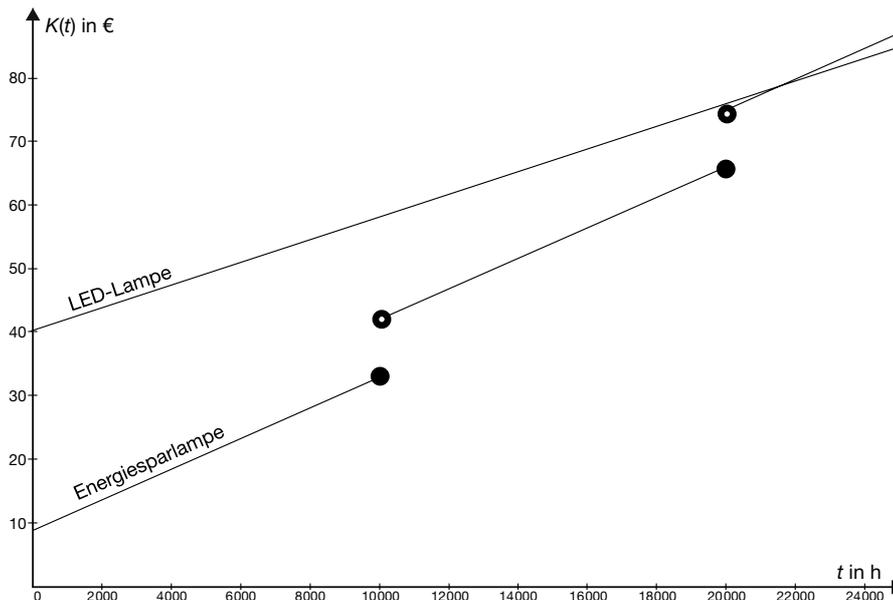
Aufgabennummer: B_226

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Aus Gründen des Klimaschutzes ist man bemüht, energiesparende Beleuchtungskörper zu verwenden. Um unterschiedliche Lichtquellen vergleichen zu können, muss man nicht nur ihre Leistung in Watt (W), sondern auch ihren abgestrahlten Lichtstrom in Lumen (lm) kennen.

- a) Eine 12-Watt-Energiesparlampe und eine 9-Watt-LED-Lampe haben den gleichen Lichtstrom. Die Graphen stellen die Kosten für diese beiden Lampen abhängig von der Betriebsdauer dar.
- Vergleichen Sie die Graphen hinsichtlich Anschaffungskosten, durchschnittlicher Lebensdauer und Betriebskosten.
 - Lesen Sie aus der Grafik ab, ab welcher Betriebsdauer sich die Anschaffung einer LED-Lampe auszahlt.

$K(t)$... Kosten in Euro (€) nach t Betriebsstunden
 t ... Betriebsdauer in Stunden (h)



- b) Für Kindergarten-Gruppenräume schreibt die europäische Beleuchtungsnorm als Mindest-Beleuchtungsstärke 300 Lumen pro Quadratmeter (lm/m^2) vor. Ein Kindergarten mit einer auszuleuchtenden Fläche von 740 m^2 soll mit einer neuen Beleuchtung ausgestattet werden. Gehen Sie bei den folgenden Berechnungen von einem Strompreis von € 0,18 pro Kilowattstunde aus und nehmen Sie an, dass in 1 Jahr 1 200 Betriebsstunden anfallen. (Hinweis: Energie = Leistung \times Zeit.)

Es stehen 2 Systeme zur Wahl:

	Anschaffungspreis	angegebene Leistung	Lichtstrom
Gehäuse mit 4 Leuchtstoffröhren	€ 80,50	56 W	4 800 lm
LED-Lichtpaneel	€ 275,00	45 W	4 500 lm

- Berechnen Sie für beide Varianten die Anschaffungskosten und die Energiekosten für 1 Jahr.

Hinweis zur Aufgabe:
 Geben Sie die Ergebnisse so an, dass sie klar nachvollziehbar sind und der Aufgabenstellung entsprechen.

Möglicher Lösungsweg

a) LED-Lampe:

Anschaffungskosten: ca. € 40

lange Lebensdauer – mehr als 24 000 Betriebsstunden

Betriebskosten: geringer als Energiesparlampe, weil Steigung kleiner

Energiesparlampe:

Anschaffungskosten: ca. € 10

Lebensdauer ca. 10 000 Betriebsstunden, dann muss eine neue gekauft werden (→ Sprungstelle)

Betriebskosten: größer als LED-Lampe

Bis ca. 22 000 Betriebsstunden ist die Energiesparlampe billiger, darüber lohnt sich die Anschaffung einer LED-Lampe.

Es sind auch andere Lösungen richtig, z. B.:

Anschaffungskosten: Eine LED-Lampe ist etwa 4-mal so teuer wie eine Energiesparlampe.

Lebensdauer: Eine LED-Lampe hält ca. 2,5-mal so lange wie eine Energiesparlampe.

Betriebskosten: LED: ca. € 17/10 000 h; Energiesparlampe: ca. € 22/10 000 h

Ab ca. 22 000 h zahlt sich die Anschaffung einer LED-Lampe aus.

b) Vorgabe: mindestens 300 lm/m²

bei 740 m² Fläche: $300 \cdot 740 = 222\,000$ lm

Leuchtstoffröhren:

Ein Gehäuse mit 4 Leuchtstoffröhren hat 4 800 lm, daher werden $222\,000 : 4\,800 = 47$ Stück (aufgerundet auf Ganze) gebraucht.

Anschaffungskosten: $47 \cdot 80,50 = €\,3.783,50$

Leistung: $47 \cdot 56\,W = 2\,632\,W = 2,632\,kW$

Energie: $2,632\,kW \cdot 1\,200\,h = 3\,158,4\,kWh$

Energiekosten: $3\,158,4 \cdot 0,18 = €\,568,51$

LED-Lichtpaneele:

Ein Lichtpaneel hat 4 500 lm, daher werden $222\,000 : 4\,500 = 50$ Stück (aufgerundet auf Ganze) gebraucht.

Anschaffungskosten: $50 \cdot 275 = €\,13.750,00$

Leistung: $50 \cdot 45\,W = 2\,250\,W = 2,25\,kW$

Energie: $2,25\,kW \cdot 1\,200\,h = 2\,700\,kWh$

Energiekosten: $2\,700 \cdot 0,18 = €\,486,00$

Leuchtstoffröhren haben Anschaffungskosten von € 3.783,50 und jährliche Energiekosten von € 568,51.

LED-Paneele haben Anschaffungskosten von € 13.750,00 und jährliche Energiekosten von € 486,00.

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) 1 Zahlen und Maße

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) C Interpretieren und Dokumentieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

- a) —
- b) —

Schwierigkeitsgrad:

- a) leicht
- b) mittel

Punkteanzahl:

- a) 2
- b) 4

Thema: Alltag

Quellen: —

Elektronikhersteller

Aufgabennummer: B-C6_23

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Ein Elektronikhersteller erzeugt Spielkonsolen und Gamecontroller.

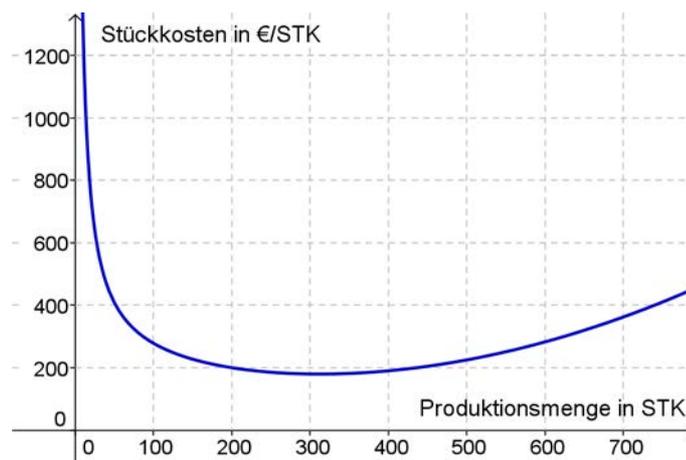
- a) Die folgende Tabelle gibt die Grenzkosten $K'(x)$ in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x von Spielkonsolen an:

x	100	150	200	250	300	350	400
$K'(x)$	125	105	102	114	141	184	242

x ... Produktionsmenge in Stück (STK)
 $K'(x)$... Grenzkosten in Euro pro Stück (€/STK)

- Erstellen Sie mithilfe einer Regression eine passende quadratische Grenzkostenfunktion.
- Erklären Sie, wie man hier die Kostenkehre berechnet.
- Erklären Sie die Bedeutung der Kostenkehre.
- Berechnen Sie die Gleichung der Gesamtkostenfunktion bei Fixkosten von € 11.200.

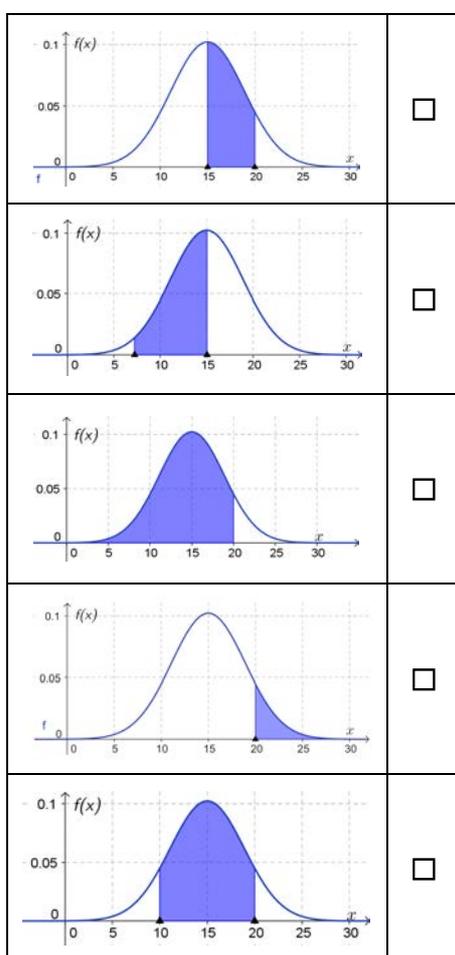
- b) Die nachstehende Grafik zeigt die Stückkosten in Abhängigkeit von der erzeugten Menge an Spielkonsolen.



- Lesen Sie die langfristige Preisuntergrenze ab.
- Erklären Sie, welcher Erlös zu erwarten ist, wenn man die dem Betriebsoptimum entsprechende Menge an Spielkonsolen produziert und alle zum Preis der langfristigen Preisuntergrenze verkauft.
- Lesen Sie aus der Grafik die Stückkosten bei der Herstellung von 450 Konsolen ab.
- Ermitteln Sie den Marktpreis, mit dem eine Konsole verkauft werden muss, wenn 450 Konsolen hergestellt und mit einem Gewinn von € 20.000 verkauft werden sollen.

- c) Die umfangreiche Produktion der Gamecontroller weist eine annähernd normalverteilte Menge von defekten Geräten auf. Pro Tag beträgt der Erwartungswert in der gesamten Großproduktion 15 Mengeneinheiten (ME) defekter Controller mit einer Standardabweichung von 3, 9 ME. Der Geschäftsführer möchte wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit höchstens 20 ME einer Tagesproduktion defekt sind.

- Kreuzen Sie diejenige Skizze an, deren farbig unterlegter Bereich diesen Sachverhalt darstellt. [1 aus 5]
- Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit.



Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

- a) Werte eingeben und mit Technologie die quadratische Regression bestimmen:

$$K'(x) = 0,0031x^2 - 1,1562x + 209,36$$

Zur Berechnung der Kostenkehre leitet man die Grenzkostenfunktion nochmals ab und setzt die so erhaltene Gleichung null.

Löst man die Gleichung auf, erhält man die Kostenkehre.

Die Kostenkehre ist diejenige Stelle, bei der der degressive Kostenverlauf in den progressiven Kostenverlauf wechselt. (Der Betrieb hat bei dieser Produktionsmenge minimale Grenzkosten.)

$K(x)$ erhält man durch unbestimmtes Integrieren. Die Fixkosten ergeben die Integrationskonstante:

$$K(x) = 0,00103x^3 - 0,578x^2 + 209,36x + 11\,200$$

- b) Die langfristige Preisuntergrenze beträgt ca. € 180/Stück.
Ablesetoleranz: Optimum: [290; 330], Preisuntergrenze [170; 190]

Verkauft man die Konsolen um diesen Stückpreis, so entspricht der Erlös genau den Herstellungskosten, der Betrieb arbeitet kostendeckend.

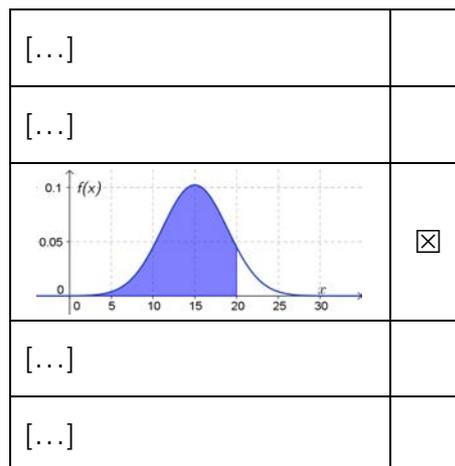
AbleSEN der Stückkosten bei 450 ME: ca. € 200/Stück

Ablesetoleranz: ± € 10/Stück

Gewinn: € 20.000

$$20\,000 = (p - 200) \cdot 450 \Rightarrow p = € 244,44/\text{Stück}$$

- c)



[Die Begründung ist nicht verlangt, Folgendes sollte beim Ankreuzen aber bewusst sein:
 Die Gauß'sche Glockenkurve hat ihr Maximum beim Erwartungswert der Normalverteilung (15 ME).
 Die Fläche unterhalb der Kurve in $[a; b]$ entspricht der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{a \leq X \leq b\}$. In der Fragestellung wird nach $P(X \leq 20)$ gesucht, die entsprechende Fläche ist in Grafik 3 dargestellt.]

$$P(X \leq 20) = 0,900\dots \approx 90 \%$$

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 4 Analysis
- b) 4 Analysis
- c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

- a) 5 Stochastik
- b) 3 Funktionale Zusammenhänge
- c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) D Argumentieren und Kommunizieren
- c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) D Argumentieren und Kommunizieren
- b) C Interpretieren und Dokumentieren
- c) —

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) schwer
- c) leicht

Punkteanzahl:

- a) 4
- b) 4
- c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Hotelrenovierung (1)

Aufgabennummer: B_210

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Ein Hotel wird renoviert.

a) Ein Viertel aller Hotelzimmer wird als Raucherzimmer angeboten. Bei der Renovierung wurden zwei Drittel aller Raucherzimmer und 40 % aller Nichtraucherzimmer erneuert.

- Erstellen Sie ein Baumdiagramm mit allen gegebenen Daten.
- Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein zufällig ausgewähltes Zimmer renoviert wurde.
- Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein zufällig ausgewähltes renoviertes Zimmer ein Nichtraucherzimmer ist.

b) Für weitere Renovierungsarbeiten benötigt der Hotelbesitzer einen Kredit in Höhe von € 80.000. Seine Hausbank bietet ihm an, dass er den Kreditbetrag innerhalb von 5 Jahren in Form von nachschüssigen Jahresraten in Höhe von € 17.900 begleichen kann.

- Berechnen Sie den effektiven Jahreszinssatz, der diesem Kredit zugrunde liegt.

Der Hotelbesitzer möchte anstelle der Jahresraten den Kredit bei gleicher Laufzeit durch nachschüssige Semesterraten in Höhe von € 8.950 begleichen.

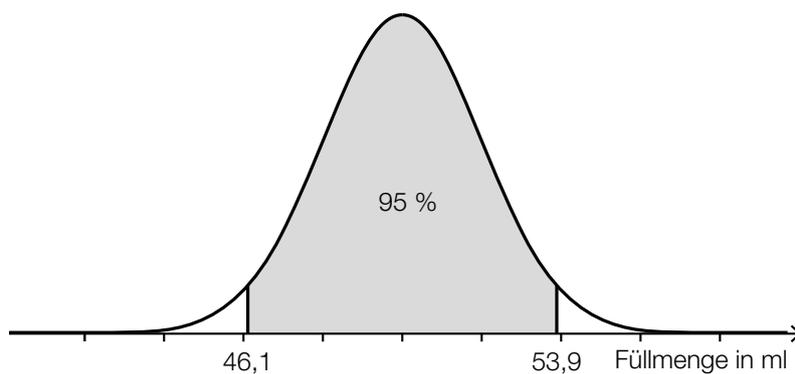
- Argumentieren Sie, warum sich bei dieser Zahlungsvariante ein höherer effektiver Jahreszinssatz ergibt.

c) Während der Renovierungsarbeiten möchte der Hotelbesitzer eine Reisegruppe einquartieren. Leider stehen dafür 2 Zimmer zu wenig zur Verfügung. Aus Erfahrung weiß man, dass im Schnitt 12 % aller Buchungen wieder kurzfristig storniert werden. Das Hotel nimmt daher die Buchung der Reisegruppe an. Dabei wird angenommen, dass Einzelstornierungen voneinander unabhängig sind.

– Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, mit der die Wahrscheinlichkeit berechnet wird, dass bei der Annahme von 50 Buchungen mindestens 2 storniert werden. [1 aus 5]

$1 - \binom{50}{1} \cdot 0,12^1 \cdot 0,88^{49} - \binom{50}{2} \cdot 0,12^2 \cdot 0,88^{48}$	<input type="checkbox"/>
$1 - \binom{50}{0} \cdot 0,12^0 \cdot 0,88^{50} + \binom{50}{1} \cdot 0,12^1 \cdot 0,88^{49}$	<input type="checkbox"/>
$1 - \binom{50}{0} \cdot 0,12^0 \cdot 0,88^{50} - \binom{50}{1} \cdot 0,12^1 \cdot 0,88^{49}$	<input type="checkbox"/>
$1 - \binom{50}{1} \cdot 0,88^1 \cdot 0,12^{49} + \binom{50}{2} \cdot 0,88^2 \cdot 0,12^{48}$	<input type="checkbox"/>
$1 - \binom{50}{0} \cdot 0,88^0 \cdot 0,12^{50} + \binom{50}{1} \cdot 0,88^1 \cdot 0,12^{49}$	<input type="checkbox"/>

d) Im Zuge der Renovierung wurden neue Shampoo-Fläschchen bestellt. Die Füllmenge der Fläschchen kann als annähernd normalverteilte Zufallsvariable angenommen werden. Die Füllmenge von 95 % aller Fläschchen liegt im unten dargestellten symmetrischen Intervall um den Erwartungswert.



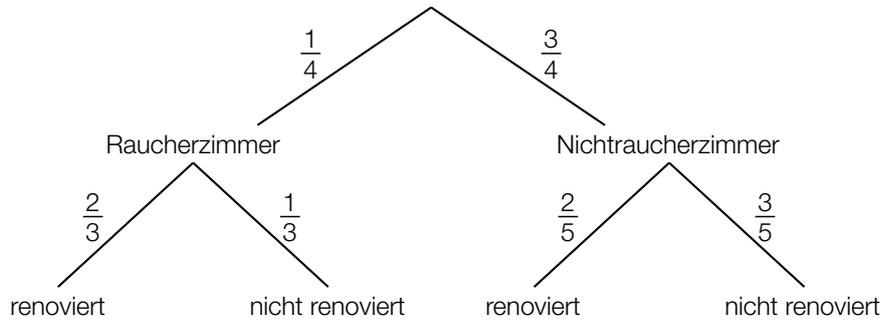
- Bestimmen Sie den Erwartungswert und die zugehörige Standardabweichung.
- Beschreiben Sie, wie sich die Kurve ändern würde, wenn die Standardabweichung bei gleichbleibendem Erwartungswert kleiner wäre.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



$$P(\text{„renoviert“}) = P(\text{„Raucherzimmer und renoviert“}) + P(\text{„Nichtraucherzimmer und renoviert“}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{7}{15}$$

$$P(\text{„Nichtraucherzimmer und renoviert“}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{10}$$

$$P(\text{„Nichtraucherzimmer | renoviert“}) = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{7}{15}} = \frac{9}{14} \approx 64,29 \%$$

b) $80000 = 17900 \cdot \frac{(1 + i_{\text{eff}})^5 - 1}{i_{\text{eff}}} \cdot \frac{1}{(1 + i_{\text{eff}})^5}$

mittels Technologieeinsatz:

$$i_{\text{eff}} = 0,03860\dots$$

Der effektive Jahreszinssatz ist rund 3,86 %.

Bei der halbjährlichen Zahlungsart ergibt sich durch die früher fälligen Zahlungen ein höherer effektiver Jahreszinssatz.

c)

[...]	
[...]	
$1 - \binom{50}{0} \cdot 0,12^0 \cdot 0,88^{50} - \binom{50}{1} \cdot 0,12^1 \cdot 0,88^{49}$	<input checked="" type="checkbox"/>
[...]	
[...]	

d) Der Erwartungswert μ liegt in der Mitte des Intervalls [46,1; 53,9].

$$\text{Daher gilt: } \mu = \frac{46,1 + 53,9}{2} = 50 \text{ ml}$$

Normalverteilung mit $\mu = 50 \text{ ml}$ und $P(X \leq 46,1) = 0,025$

Berechnung der Standardabweichung σ mittels Technologieeinsatz: $\sigma \approx 1,99 \text{ ml}$

Bei einer kleineren Standardabweichung wäre die Gauß'sche Glockenkurve schmaler und höher.

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 5 Stochastik
- b) 3 Funktionale Zusammenhänge
- c) 5 Stochastik
- d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —
- d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) C Interpretieren und Dokumentieren
- d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) D Argumentieren und Kommunizieren
- c) —
- d) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) leicht
- c) mittel
- d) leicht

Punkteanzahl:

- a) 4
- b) 2
- c) 1
- d) 3

Thema: Tourismus

Quellen: —

Computerspiele (2)

Aufgabennummer: B_151

Technologieeinsatz:

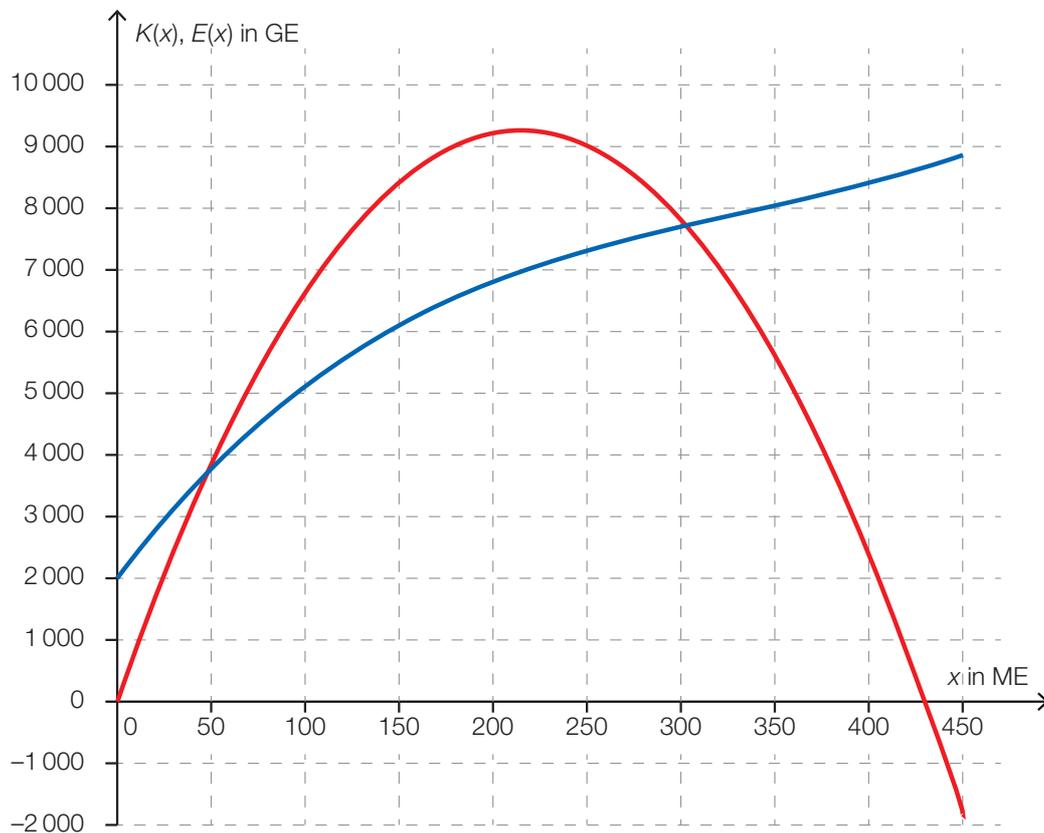
möglich

erforderlich

Ein Unternehmen produziert Computerspiele.

- a) Für ein bestimmtes Verkaufsgebiet kann die Abhängigkeit des Verkaufspreises p in GE/ME und der nachgefragten Menge x in ME durch die Funktion p mit $p(x) = -0,2x + 86$ beschrieben werden.
- Erstellen Sie die Gleichung der Erlösfunktion.
 - Berechnen Sie diejenige Verkaufsmenge, bei der der erzielbare Erlös maximal ist.
 - Bestimmen Sie die Höhe des maximalen Erlöses.
- b) Für die Produktion des Spiels *Super Maxi* wird der Verlauf der Grenzkosten durch die Funktion K' mit $K'(x) = 0,0003x^2 - 0,2x + 40$ beschrieben.
- Stellen Sie die Gleichung der Kostenfunktion K auf, wenn die Fixkosten 2000 GE betragen.
 - Erklären Sie die Bedeutung der Kostenkehre in Bezug auf die Zunahme der Kosten pro zusätzlich produzierter ME.

- c) In der nachstehenden Grafik sind die Graphen der Kostenfunktion und der Erlösfunktion des Spiels *Super Mizzi* dargestellt.



- Beschriften Sie die Graphen.
- Zeichnen Sie den Graphen der Gewinnfunktion möglichst genau in die Grafik ein.
- Lesen Sie die Grenzen der Gewinnzone ab.
- Lesen Sie den maximalen Gewinn ab.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

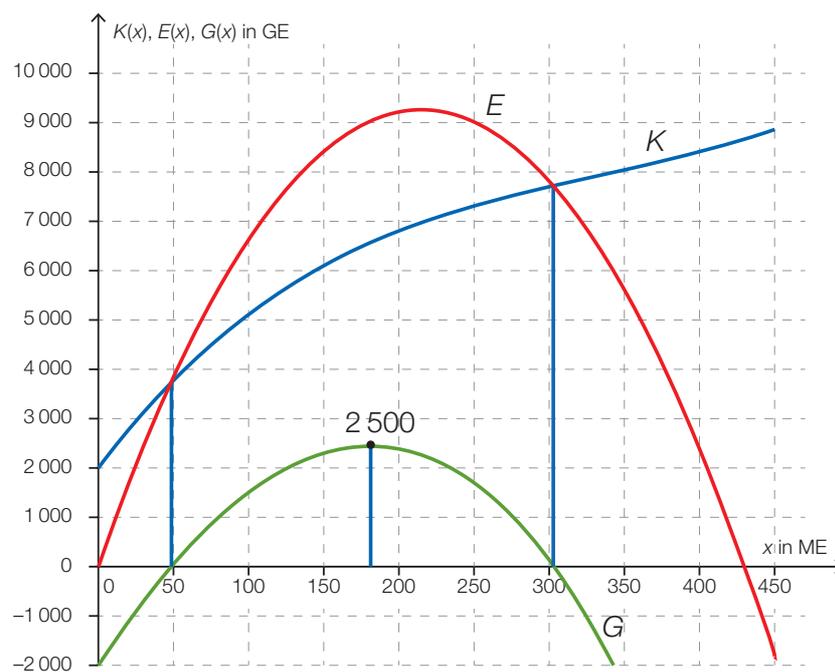
a) $E(x) = p(x) \cdot x = -0,2x^2 + 86x$
 $E'(x) = -0,4x + 86 = 0$
 $x = 215$

Das Erlösmaximum wird bei 215 ME erzielt. Der Erlös beträgt dort 9245 GE.

b) $\int K'(x)dx = 0,0001x^3 - 0,1x^2 + 40x + F$ mit $F = 2000$
 $K(x) = 0,0001x^3 - 0,1x^2 + 40x + 2000$

Die Zunahme der Kosten wird mit der Grenzfunktion $K'(x)$ beschrieben. In der Kostenkehre ist $K''(x) = 0$. Die Grenzkostenfunktion hat an dieser Stelle ein Minimum. Die Zunahme der Kosten ist an dieser Stelle minimal.

- c) Die Gewinnfunktion ergibt sich durch grafische Subtraktion der Kostenfunktion von der Erlösfunktion.



Das Gewinnintervall liegt zwischen ca. 50 ME und 300 ME. *Ableseungenauigkeiten ± 20 sind zu tolerieren.*

Der maximale Gewinn beträgt rund. 2500 GE. *Ableseungenauigkeiten ± 200 sind zu tolerieren.*

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 4 Analysis
- b) 4 Analysis
- c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) D Argumentieren und Kommunizieren
- c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren
- b) A Modellieren und Transferieren
- c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

- a) leicht
- b) mittel
- c) mittel

Punkteanzahl:

- a) 2
- b) 2
- c) 4

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Kunst und Kaffee*

Aufgabennummer: B_401

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Das Café-Restaurant in einer Kunsthalle bietet für die neue Ausstellung als zusätzliche Attraktion die Veranstaltung *Kunst und Kaffee* an. Nach einem gemütlichen Frühstück im Café-Restaurant kann man die Ausstellung besuchen und bezahlt für Frühstück und Ausstellungsbesuch nur einen Gesamtpreis.

Aus diesem Grund wird durch eine Befragung der Besucher/innen festgestellt, welcher Preis dafür verlangt werden kann.

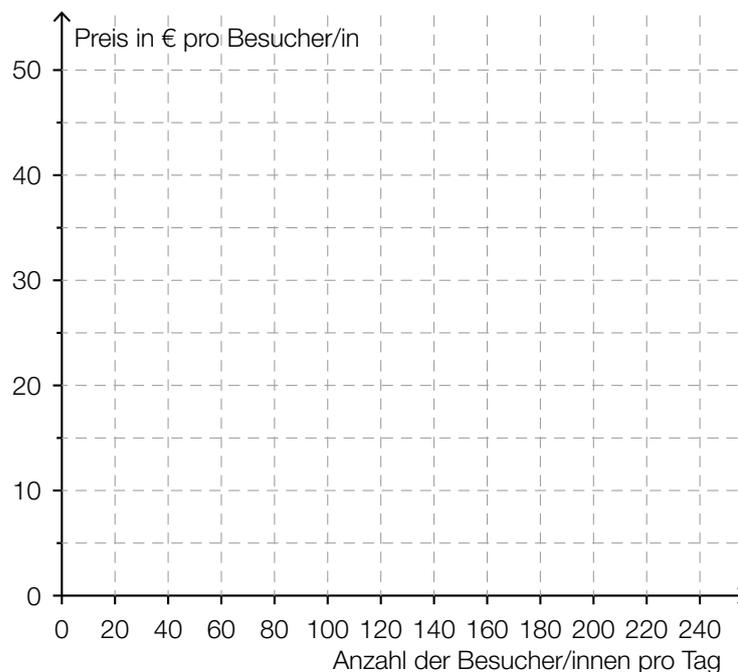
Das Ergebnis dieser Befragung führt zu folgender linearer Preisfunktion der Nachfrage p :

$$p(x) = -0,25 \cdot x + 45$$

x ... Anzahl der Besucher/innen pro Tag

$p(x)$... Preis bei x Besucher/innen in € pro Besucher/in

- a) – Zeichnen Sie den Graphen dieser linearen Preisfunktion der Nachfrage in der nachstehenden Abbildung ein.



– Markieren Sie in der obigen Abbildung die Sättigungsmenge.

* ehemalige Klausuraufgabe

- b) – Ermitteln Sie, um welchen Betrag der Preis reduziert werden muss, wenn man 10 Besucher/innen pro Tag mehr für dieses Angebot gewinnen möchte.
- c) – Stellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Erlösfunktion E auf.
– Interpretieren Sie die Bedeutung der beiden Koordinaten des Scheitelpunkts der Erlösfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.

Die täglichen Kosten, die dem Café-Restaurant für dieses Angebot entstehen, lassen sich durch die folgende Funktion K beschreiben:

$$K(x) = 0,05 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 500$$

x ... Anzahl der Besucher/innen pro Tag

$K(x)$... tägliche Kosten bei x Besucherinnen und Besuchern in €

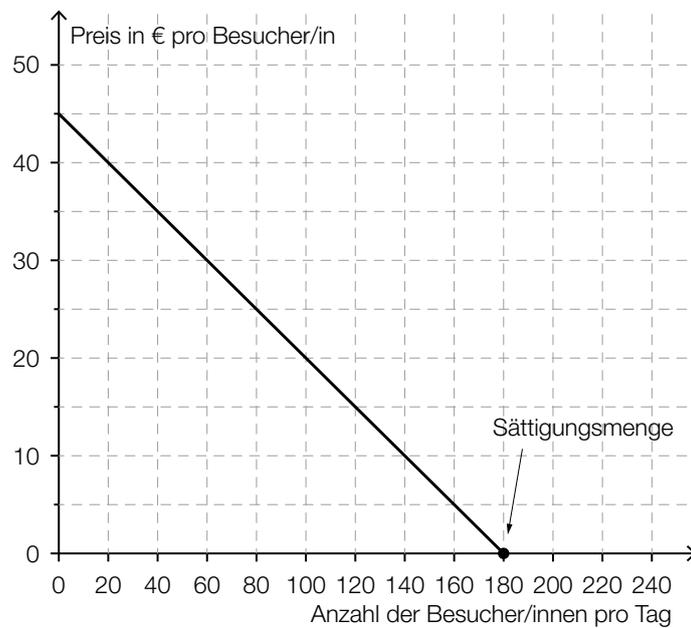
- Berechnen Sie die Höhe des maximalen Gewinns.
- Erklären Sie, warum die Stelle, an der der Gewinn maximal ist, nicht von den Fixkosten abhängt.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



b) Gemäß dem Modell steigt die Besucheranzahl um 1 Person pro Tag, wenn der Preis um € 0,25 pro Person reduziert wird (Steigung der Preisfunktion der Nachfrage). Daher muss der Preis um € 2,50 pro Person gesenkt werden, wenn man 10 Besucher/innen mehr pro Tag gewinnen möchte.

$$\text{c) } E(x) = p(x) \cdot x = -0,25 \cdot x^2 + 45 \cdot x$$

x ... Anzahl der Besucher/innen pro Tag

$E(x)$... Erlös bei x Besucherinnen und Besuchern in €

Die erste Koordinate des Scheitelpunkts gibt an, bei welcher Anzahl an Besucherinnen und Besuchern pro Tag der Erlös maximal ist, die zweite Koordinate gibt an, wie hoch dieser maximale Erlös ist.

$$G(x) = E(x) - K(x) = -0,3 \cdot x^2 + 33 \cdot x - 500$$

Lösen der Gleichung $G'(x) = 0$:

$$-0,6 \cdot x + 33 = 0 \Rightarrow x = 55$$

$$G(55) = 407,50$$

Der maximale Gewinn beträgt € 407,50 pro Tag.

Eine Änderung der Fixkosten entspricht der Addition bzw. Subtraktion einer konstanten Funktion zur Gewinnfunktion. Sie bewirkt eine vertikale Verschiebung des Graphen, wodurch sich die Maximumstelle nicht verändert.

oder:

Die Stelle des maximalen Gewinns ist die Nullstelle der 1. Ableitung der Gewinnfunktion. Die Fixkosten sind in der Gewinnfunktion ein konstanter Summand, der beim Bilden der 1. Ableitung wegfällt. Folglich haben sie auch keinen Einfluss auf die Stelle des maximalen Gewinns.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × B: für das richtige Einzeichnen des Funktionsgraphen
1 × C: für das richtige Markieren der Sättigungsmenge
- b) 1 × C: für das richtige Ermitteln der Preisreduktion
- c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung
1 × C: für die richtige Interpretation der beiden Koordinaten des Scheitelpunkts im gegebenen Sachzusammenhang
1 × B: für die richtige Berechnung des maximalen Gewinns
1 × D: für die richtige Erklärung

Kängurusprünge

Aufgabennummer: B-C9_15

Technologieeinsatz:

möglich

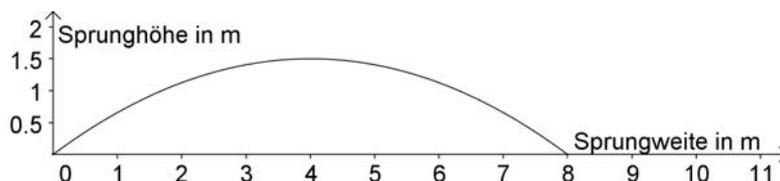
erforderlich

- a) In Australien leben heute ca. 60 Känguruarten, die sich bei höheren Geschwindigkeiten meist springend fortbewegen. Die kleinste Art ist das Zottelige Hasenkänguru mit ca. 35 cm Körpergröße, die größte das Rote Riesenkänguru mit ca. 1,8 m Körpergröße.

Bei allen Känguruarten ist die maximale Sprungweite etwa das 7-Fache ihrer Körpergröße.

- Erstellen Sie eine Funktion, die die ungefähre maximale Sprunglänge in Abhängigkeit von der Körpergröße angibt.
- Stellen Sie diese Funktion von der kleinsten bis zur größten Känguruart grafisch dar.

- b) Der nachstehende Graph zeigt den Sprung eines Kängurus.



Der Sprung kann mit einer Polynomfunktion 2. Grades im angegebenen Definitionsbereich beschrieben werden.

- Berechnen Sie die Funktionsgleichung mithilfe quadratischer Regression. Runden Sie die Koeffizienten auf Hundertstel.
 - Lesen Sie die benötigten Werte aus dem Graphen ab.
- c) In einem Volksschulhort gibt es das Brettspiel *Känguruhüpfen* zum spielerischen Addieren im Zahlenraum 12. Am Start stehen maximal 11 Kängurus, die mit den Nummern von 2 bis 12 beschriftet sind. Jede/r Spieler/in sucht sich ein Känguru aus. Es wird reihum mit 2 sechsseitigen Würfeln gewürfelt. Nach jedem Wurf werden die Augenzahlen addiert und das Känguru, dessen Nummer mit der Augensumme der beiden Würfel übereinstimmt, darf ein Feld vorhüpfen.
- Überprüfen Sie nachweislich, ob die Chance, ein Feld vorzurücken, für alle Kängurus gleich groß ist.

Hinweis zur Aufgabe:

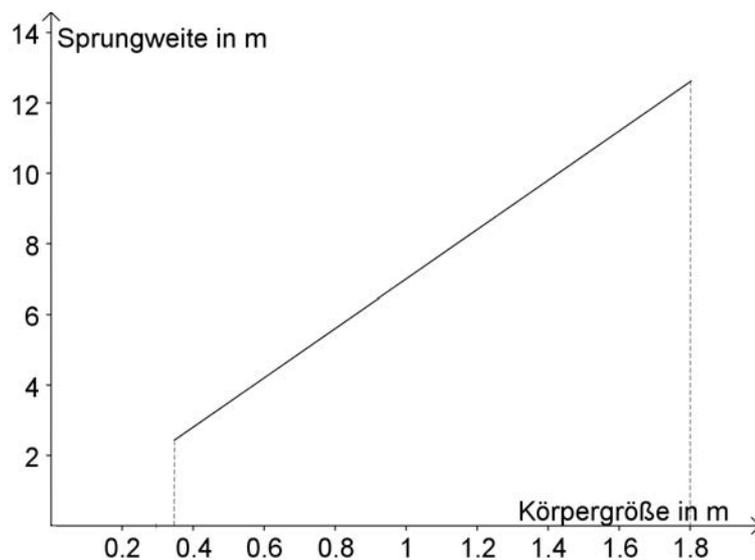
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) lineare Funktion: $f(x) = 7x$

x ... Körpergröße in m

$f(x)$... Sprungweite in m



b) Koordinaten der Nullstellen und des Hochpunktes ablesen:

$N_1 = (0|0)$, $N_2 = (8|0)$, $H = (4|1,5)$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$a = -0,093\dots$

$b = 0,75$

$c = 0$

Funktionsgleichung: $y = -0,09 \cdot x^2 + 0,75 \cdot x$

(Da die Koordinaten der Punkte, vor allem des Hochpunktes, abgelesen werden, ist eine angemessene Ungenauigkeit zu tolerieren.)

c) Es genügt, exemplarisch zu zeigen, dass die Anzahl der Möglichkeiten für 2 Zahlen unterschiedlich groß und damit die Wahrscheinlichkeit für ihr Auftreten unterschiedlich hoch ist.

Zum Beispiel:

$2 = 1 + 1$

$3 = 1 + 2$ oder $2 + 1$

$4 = 1 + 3$ oder $3 + 1$ oder $2 + 2$

usw.

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) 5 Stochastik
- c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) 3 Funktionale Zusammenhänge
- c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) C Interpretieren und Dokumentieren
- c) —

Schwierigkeitsgrad:

- a) leicht
- b) mittel
- c) leicht

Punkteanzahl:

- a) 2
- b) 2
- c) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Anschaffungen

Aufgabennummer: B_134

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Für die Anschaffung von neuer Hardware in einem Unternehmen muss ein Kredit aufgenommen werden.

- a) Für einen Kredit in Höhe von € 50.000 bietet eine Bank bei einer Laufzeit von 10 Jahren und Rückzahlung durch nachschüssige Monatsraten einen effektiven Jahreszinssatz von 4,5 %.

– Berechnen Sie die Höhe der Monatsraten.

- b) Das Angebot einer anderen Bank für die Rückzahlung eines Kredits in Höhe von € 50.000 ist ausschnittsweise im folgenden Tilgungsplan dargestellt:

Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 50.000
1	€ 1.112,62	€ 11.387,38	€ 12.500	€ 38.612,62
2	€ 859,22	€ 11.640,78	€ 12.500	€ 26.971,84
3	€ 600,19	€ 11.899,81	€ 12.500	€ 15.072,03
4			€ 12.500	

- Zeigen Sie, dass diesem Tilgungsplan ein effektiver Jahreszinssatz von rund 4,5 % zugrunde liegt.
– Vervollständigen Sie im obigen Tilgungsplan die Zeile für das 4. Semester.

Die Rückzahlung des Kredits soll am Ende des 5. Semesters durch eine Restzahlung abgeschlossen werden.

- Berechnen Sie die Höhe dieser Restzahlung.

c) Der Unternehmer nimmt einen weiteren Kredit in Höhe von € 10.000 auf, den er innerhalb eines Jahres zurückzahlen möchte.

Er kann zwischen 2 Rückzahlungsvarianten bei gleichem Jahreszinssatz i wählen:

- 1. Variante: 2 nachschüssige Semesterraten in Höhe von € 5.000 und 1 Restzahlung
- 2. Variante: 4 nachschüssige Quartalsraten in Höhe von € 2.500 und 1 Restzahlung

– Erklären Sie, warum 2 nachschüssige Quartalsraten von € 2.500 nicht genau einer nachschüssigen Semesterrate von € 5.000 entsprechen.

– Erklären Sie, bei welcher Variante der Unternehmer eine höhere Restzahlung zu tätigen hat.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) monatlicher Aufzinsungsfaktor: $q_{12} = \sqrt[12]{1,045}$

$$50\,000 = R \cdot \frac{q_{12}^{120} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{120}} \Rightarrow R = 516,020\dots$$

Die Höhe der Monatsraten beträgt € 516,02.

b) Semesterzinssatz $i_2 = \frac{1\,112,62}{50\,000} = 0,02225\dots$

effektiver Jahreszinssatz $i = (1 + i_2)^2 - 1 = 0,04499\dots \approx 4,50\%$

Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 50.000
1	€ 1.112,62	€ 11.387,38	€ 12.500	€ 38.612,62
2	€ 859,22	€ 11.640,78	€ 12.500	€ 26.971,84
3	€ 600,19	€ 11.899,81	€ 12.500	€ 15.072,03
4	€ 335,39	€ 12.164,61	€ 12.500	€ 2.907,42

Die Restschuld vom Ende des 4. Semesters wird ein weiteres Semester aufgezinnt. Es sind daher am Ende des 5. Semesters noch € 2.972,11 fällig.

c) Zu dem Zeitpunkt, zu dem die Semesterrate gezahlt wird (also am Ende des Semesters), wurde die 1. bezahlte Quartalsrate bereits 1 Semester lang verzinst. Der Endwert der beiden Quartalsraten ist daher etwas höher als die Semesterrate.

Der Endwert der Quartalsraten ist etwas höher als der Endwert der Semesterraten. Daher ist die Restzahlung bei der 1. Variante höher.

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) 3 Funktionale Zusammenhänge
- c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) D Argumentieren und Kommunizieren
- c) —

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) mittel
- c) mittel

Punkteanzahl:

- a) 2
- b) 3
- c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Digitalkameras

Aufgabennummer: B_126

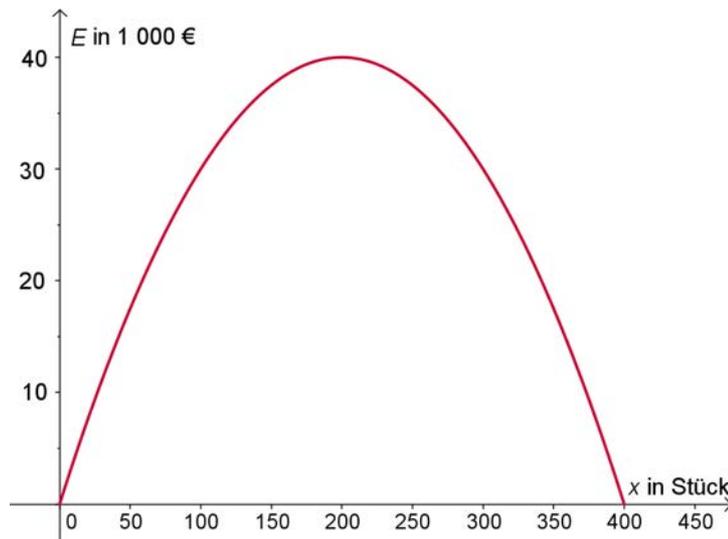
Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Eine spezielle Ausgabe von Digitalkameras wird verkauft.

- a) – Erklären Sie, wie die langfristige Preisuntergrenze aus den Produktionskosten K , die bei der Erzeugung der Kameras anfallen, ermittelt werden kann.
 – Argumentieren Sie, welche Bedeutung die langfristige Preisuntergrenze für den Betrieb hat.
- b) Die Erlösfunktion E wird durch die nachstehende Grafik dargestellt.



- Lesen Sie aus dem Graphen die Erlösgrenzen, die Verkaufsmenge für das Erlösmaximum sowie das Erlösmaximum ab.
 – Begründen Sie, warum der Erlös trotz steigendem Absatz x nach Erreichen eines Maximums sinkt und sogar null werden kann.
- c) Der Gewinn G kann in Abhängigkeit von der Anzahl verkaufter Kameras x näherungsweise durch die folgende Funktion beschrieben werden:

$$G(x) = -x^2 + 370x - 2\,896$$

x ... Anzahl der verkauften Kameras in Stück

$G(x)$... Gewinn bei x Stück in Euro (€)

- Berechnen Sie die Gewinn Grenzen (Break-even-Point und die obere Gewinn Grenze) sowie das Gewinnmaximum.
 – Interpretieren Sie die auftretenden Verlustzonen.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

- a) Aus den gesamten Kosten K kann man die Stückkosten \bar{K} ermitteln, die bei der Erzeugung einer einzelnen Kamera anfallen, indem man durch die produzierte Stückzahl x dividiert.

Die langfristige Preisuntergrenze entspricht den minimalen Stückkosten, die man mithilfe der Differenzialrechnung bestimmen kann.

Aus der Gleichung $\bar{K}(x)' = 0$ berechnet man die Menge x_{opt} , bei der die Stückkosten minimal werden.

Diese Menge setzt man in den Term für die Stückkosten ein und erhält so die langfristige Preisuntergrenze.

Produziert der Betrieb die Menge x_{opt} und kann die gesamte Produktion zu einem Preis verkauft werden, der der langfristigen Preisuntergrenze entspricht, dann arbeitet der Betrieb kostendeckend. Er macht weder einen Gewinn noch einen Verlust.

- b) Die Erlösgrenzen sind die Nullstellen der Funktion:

$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = 400 \text{ Stück.}$$

Das Erlösmaximum liegt bei 200 Stück und beträgt ungefähr € 40.000.

Verkauft man mehr als 200 Stück, so wird der Erlös laufend geringer. Ein Grund dafür kann der geringer werdende Verkaufspreis sein.

Der Erlös wird bei Erreichen der sogenannten Marktsättigung null. Das ist bei 400 Stück der Fall. Der Preis wird null.

Ableseungenauigkeiten werden toleriert.

- c) Gewinn Grenzen: $G(x) = 0$
 $-x^2 + 370x - 2896 = 0$

Technologieinsatz:

$$x_1 = 8 \text{ Stück und } x_2 = 362 \text{ Stück}$$

Bei $x < 8$ Stück ist die Verkaufsmenge zu gering, um die Kosten zu decken, bei $x > 362$ Stück wird die Verkaufsmenge zu groß, die Herstellungskosten sind zu hoch oder der Verkaufspreis zu gering. In beiden Fällen wird ein Verlust zu erwarten sein.

Maximaler Gewinn:

$$G'(x) = 0$$

$$-2x + 370 = 0$$

$$x = 185$$

$$G(185) = 31\,329$$

Maximalen Gewinn erzielt man bei einem Verkauf von 185 Kameras.

Der maximale Gewinn beträgt € 31.329.

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) 3 Funktionale Zusammenhänge
- c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) 4 Analysis
- c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) D Argumentieren und Kommunizieren
- b) C Interpretieren und Dokumentieren
- c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

- a) —
- b) D Argumentieren und Kommunizieren
- c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

- a) leicht
- b) mittel
- c) mittel

Punkteanzahl:

- a) 2
- b) 3
- c) 4

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Erweiterung der Produktpalette

Aufgabennummer: B_142

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Ein Unternehmen möchte sein Angebot um ein neues Produkt erweitern. Im Zuge dessen werden die Gesamtkosten untersucht und es wird die Aufnahme eines Kredits in die Wege geleitet.

- a) Die Gesamtkosten lassen sich näherungsweise durch eine Polynomfunktion 3. Grades K mit $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschreiben. Die Kostenkehre liegt bei 100 Stück. Die Grenzkosten an der Kostenkehre betragen € 0,30/Stück. Die Fixkosten betragen € 5.000. Eine Produktion von 250 Stück verursacht Kosten in Höhe von € 10.000.
- Erstellen Sie das Gleichungssystem, mit dem man die Koeffizienten dieser Kostenfunktion ermitteln kann.
 - Berechnen Sie die Koeffizienten der Kostenfunktion.
- b) Der Unternehmer benötigt einen Kredit in Höhe von € 400.000. Die Rückzahlung erfolgt durch nachschüssige Monatsraten der Höhe R über einen Zeitraum von 10 Jahren bei einem Jahreszinssatz von 3,7 %.
- Veranschaulichen Sie den Kreditbetrag und die Raten auf einer Zeitachse.
 - Berechnen Sie die Höhe der Monatsraten.

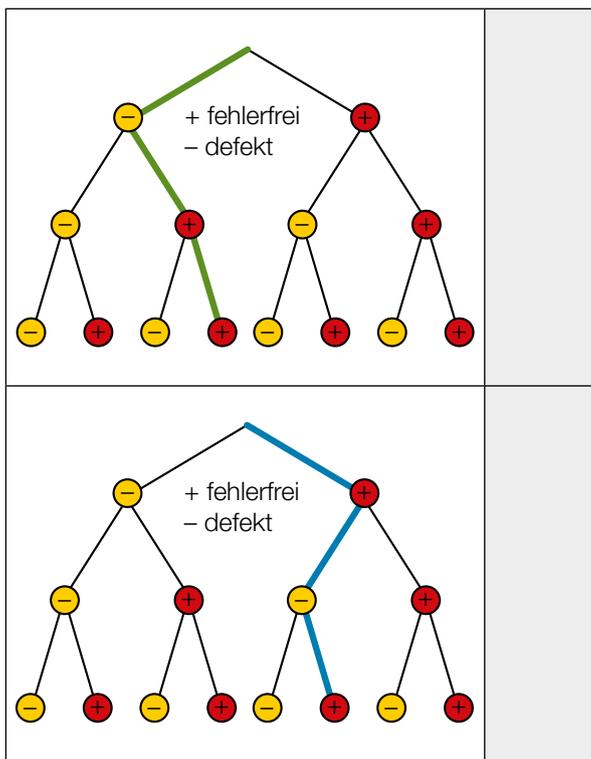
c) Eine Gewinnminderung ergibt sich für den Unternehmer durch die Tatsache, dass bei der Produktion erwartungsgemäß 10 % fehlerhafte Artikel auftreten.

Man entnimmt der Produktion 10 Stück.

– Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit mindestens 2 fehlerhafte Stück unter diesen 10 auftreten werden.

Gegeben sind zwei Baumdiagramme. Der markierte Ast des jeweiligen Baumdiagramms gibt bei Entnahme von 3 Stück aus der Produktion die Wahrscheinlichkeit einer fehlerhaften bzw. fehlerfreien Produktionsreihe wieder.

– Ordnen Sie den beiden Diagrammen jeweils die zutreffende Aussage aus A bis D zu.
[2 zu 4]



A	Nur das 2. Stück ist fehlerhaft.
B	Das 2. und das 3. Stück sind fehlerhaft.
C	Das 1. und das 3. Stück sind fehlerhaft.
D	Nur das 1. Stück ist fehlerhaft.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
 $K'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$
 $K''(x) = 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b$

Kostenkehre: $600 \cdot a + 2 \cdot b = 0$

Grenzkosten: $3 \cdot a \cdot 100^2 + 2 \cdot b \cdot 100 + c = 0,3$

Fixkosten: $d = 5000$

Kosten für 250 Stück: $a \cdot 250^3 + b \cdot 250^2 + c \cdot 250 + d = 10000$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

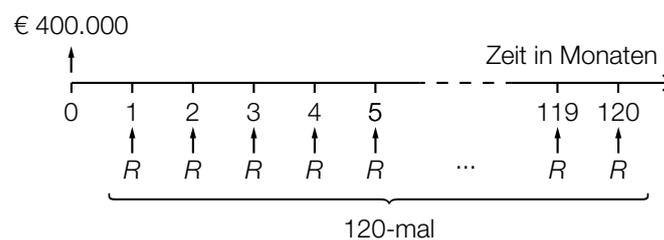
$a = 0,001125$

$b = -0,3377\dots$

$c = 34,0714$

$d = 5000$

b)

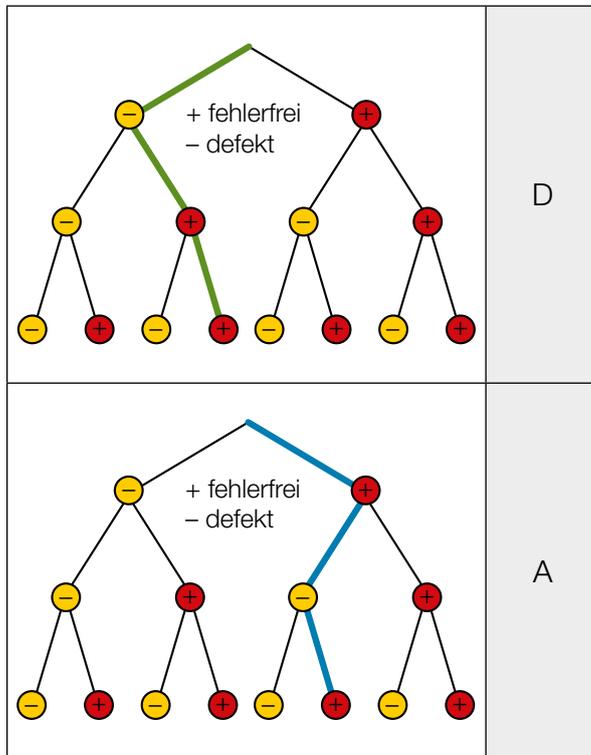


$$400000 = R \cdot \frac{q_{12}^{120} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{120}} \quad \text{mit } q_{12} = \sqrt[12]{1,037}$$

$R = 3981,476\dots$

Die Höhe der Monatsraten beträgt € 3.981,48.

c) $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \approx 26,4 \%$



A	Nur das 2. Stück ist fehlerhaft.
B	Das 2. und das 3. Stück sind fehlerhaft.
C	Das 1. und das 3. Stück sind fehlerhaft.
D	Nur das 1. Stück ist fehlerhaft.

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 4 Analysis
- b) 3 Funktionale Zusammenhänge
- c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) —
- c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) A Modellieren und Transferieren
- c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) mittel
- c) mittel

Punkteanzahl:

- a) 4
- b) 3
- c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Fahrzeugtests (2)

Aufgabennummer: B_159

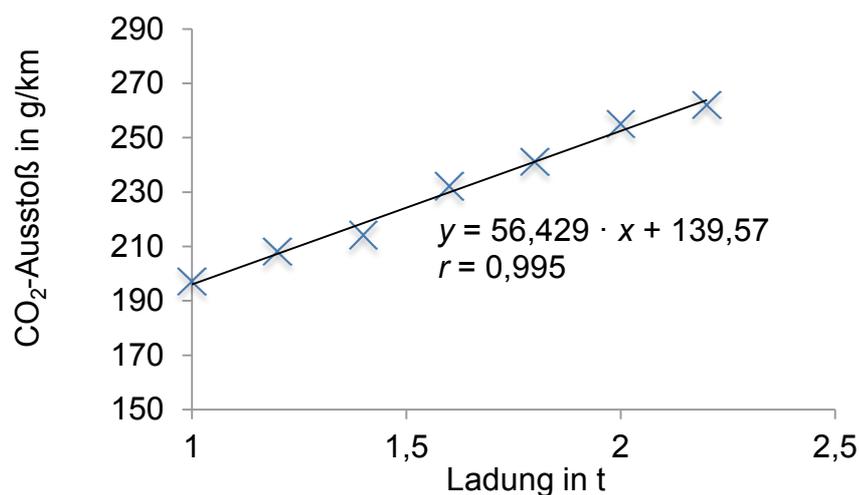
Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Die Firma *Cargo-Car* führt in der Entwicklungsphase eines neuen Transporters Tests durch.

- a) In Testreihen wurde der Kraftstoffverbrauch – abhängig von der Ladung – erhoben. In der folgenden Tabelle ist für 8 Testfahrten die Reichweite pro Liter Kraftstoffverbrauch bei einer vorgegebenen Ladung in Tonnen angegeben:

Reichweite in km	12,46	12,10	11,81	11,32	10,94	10,81	10,79	10,23
Ladung in t	1	1,05	1,3	1,4	1,52	1,7	1,9	2,1

- Geben Sie an, welche Variable hier als unabhängig und welche als abhängig anzunehmen ist.
 - Ermitteln Sie die lineare Regressionsgerade und stellen Sie diese mit den gegebenen Daten dar.
 - Beschreiben Sie, wie man die Regressionsgerade zu einer Punktwolke ermittelt.
- b) Bei der Auswertung einer Testreihe ergab sich folgende Regressionsgerade y :



Ein Mitarbeiter möchte die geschätzte CO₂-Emission bei einer Ladung von 1,5 Tonnen und bei einer Ladung von 2,5 Tonnen ermitteln.

- Berechnen Sie die gesuchten Werte.
- Interpretieren Sie den in der Grafik angegebenen Korrelationskoeffizienten r .

- c) Tests zur Haltbarkeit neuer Bremsbeläge eines bestimmten Transporter-Typs haben ergeben, dass deren Zuverlässigkeit mithilfe der Funktion R beschrieben werden kann:

$$R(t) = e^{-0,02 \cdot t}$$

t ... Benützungsdauer in Stunden

$R(t)$... Prozentsatz der Bremsbeläge, die nach der Benützungsdauer t noch intakt sind

- Weisen Sie nach, dass nach einer Benützungsdauer von durchschnittlich 50 Stunden ca. 36,8 % der Bremsbeläge noch intakt sind.

Die Formel $R(t) = e^{-0,02 \cdot t}$ wird nach t umgeformt. Dabei wird ein Fehler gemacht.

- Kennzeichnen Sie die fehlerhafte Zeile.
- Formen Sie die Gleichung mathematisch richtig um.

1. $R(t) = e^{-0,02 \cdot t}$

2. $\ln(R) = \frac{1}{0,02 \cdot t}$

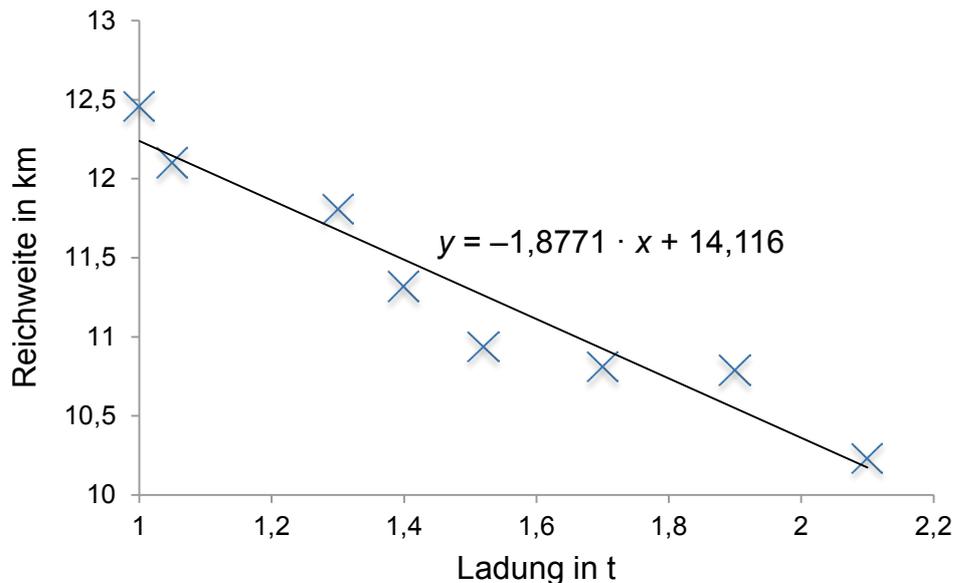
3. $t = \frac{1}{0,02 \cdot \ln(R)}$

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

- a) Es wird die Abhängigkeit der Reichweite von einer vorgegebenen Ladung untersucht. Die Ladung ist daher die unabhängige Variable x , die Reichweite ist die abhängige Variable y .



Es werden die Differenzen zwischen den y -Werten der Punktwolke (des Streudiagramms) und den noch unbekanntem y -Werten der Regressionsgeraden ermittelt. Diese Differenzen werden quadriert und summiert. Die Summe wird anschließend minimiert. Damit lässt sich die Gerade finden, die von den Punkten des Streudiagramms den geringsten Abstand hat.
(Auch die Erklärung mithilfe einer Skizze ist als richtig zu werten.)

- b) Die geschätzte Emission bei einer Ladung von 1,5 t beträgt 224,2... g/km \approx 224 g/km.
Die geschätzte Emission bei einer Ladung von 2,5 t beträgt 280,6... g/km \approx 281 g/km.

Der Korrelationskoeffizient $r = 0,995$ liegt sehr nahe bei 1. Das bedeutet, dass der Zusammenhang sehr gut durch eine lineare Funktion beschrieben werden kann.
Das positive Vorzeichen deutet auf einen steigenden Trend.

- c) $t = 50$ wird in die gegebene Gleichung eingesetzt:
 $R(50) = 0,3678... \approx 36,8 \%$

Der Fehler befindet sich in der 2. Zeile. (Begründung: Der negative Exponent wurde falsch interpretiert bzw. eine logarithmische Rechenregel falsch angewendet.)

Korrekte Umformung:

1. $R(t) = e^{-0,02 \cdot t}$
2. $\ln(R) = -0,02 \cdot t$
3. $t = \frac{-\ln(R)}{0,02}$

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 5 Stochastik
- b) 5 Stochastik
- c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) 3 Funktionale Zusammenhänge
- c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) D Argumentieren und Kommunizieren
- c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

- a) D Argumentieren und Kommunizieren, C Interpretieren und Dokumentieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz, C Interpretieren und Dokumentieren
- c) C Interpretieren und Dokumentieren, D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) mittel
- c) mittel

Punkteanzahl:

- a) 3
- b) 3
- c) 3

Thema: Messreihen

Quellen: —

Grenzkosten und Stückkosten

Aufgabennummer: B_130

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Als Grenzkostenfunktion K' bezeichnet man die 1. Ableitung der Gesamtkostenfunktion K . Bei der Herstellung eines bestimmten Produkts während zweier aufeinanderfolgender Herstellungsperioden können die Grenzkosten durch eine lineare Grenzkostenfunktion K_1' (Abb. 1) und eine quadratische Grenzkostenfunktion K_2' (Abb. 2) beschrieben werden.

x ... Produktionsmenge in Stück (Stk.)

$K_1'(x)$, $K_2'(x)$... Grenzkosten in Euro pro Stück (€/Stk.) bei x erzeugten Stk.

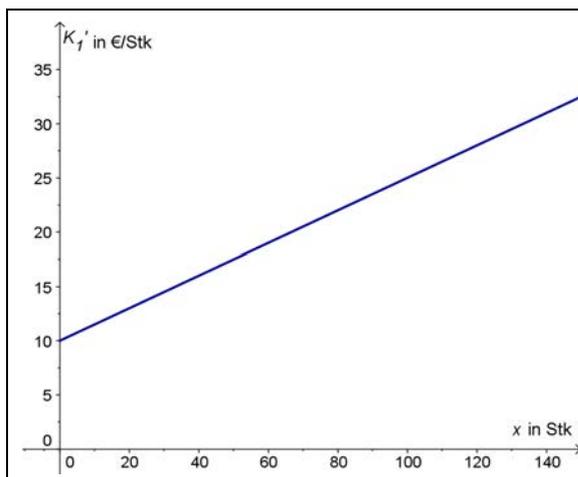


Abb. 1

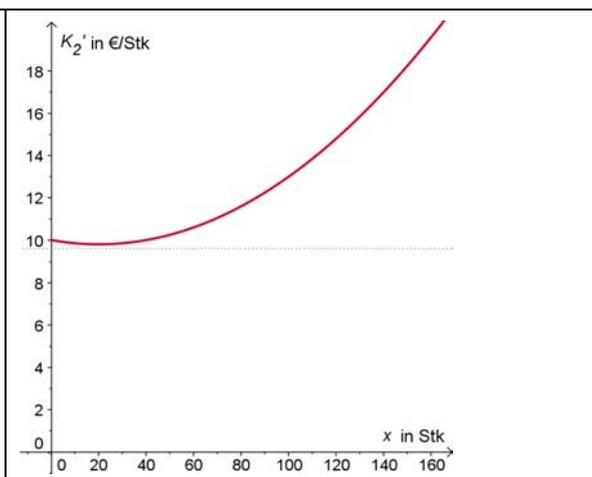


Abb. 2

- a) – Ermitteln Sie die Gleichung der Grenzkostenfunktion K_1' aus dem Graphen der Abb. 1.
 – Berechnen Sie mithilfe der Grenzkostenfunktion K_1' die Gesamtkostenfunktion K_1 , wenn die Fixkosten € 260 betragen.
- b) Die Kostenkehre ist die Herstellungsmenge, bei der der Graph der Kostenfunktion ihren Wendepunkt hat.
- Erklären Sie, wie Sie aus dem Graphen einer Grenzkostenfunktion die Kostenkehre ablesen können.
 - Begründen Sie, warum der Verlauf von einer der beiden Grenzkostenfunktionen (Abb. 1 oder Abb. 2) auf eine Kostenkehre schließen lässt und dies für die andere nicht gilt.

c) Die Kostenfunktion für die Herstellung eines anderen Produkts lautet:

$$K(x) = 0,0006x^3 + 0,02x^2 + 10x + 250$$

x ... Produktionsmenge in Stück (Stk.)

$K(x)$... Gesamtkosten in Euro (€) bei Erzeugung von x Stk.

- Ermitteln Sie die Gleichungen der Grenzkostenfunktion K' und der Stückkostenfunktion $\bar{K} = \frac{K}{x}$.
- Zeichnen Sie im Definitionsbereich $[0;250]$ die Graphen der beiden Funktionen K' und \bar{K} in ein Koordinatensystem.
- Interpretieren Sie den Schnittpunkt der beiden Kurven im Zusammenhang mit dem Betriebsoptimum und den minimalen Stückkosten.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $k = \frac{\Delta K'}{\Delta x} = \frac{3}{20} = 0,15; d = 10$

Falls die Ablesung falsch war, so ist der Folgefehler nicht zu berücksichtigen.
Eine ungenaue Ablesung ist zu tolerieren.

$$K_1'(x) = 0,15x + 10$$

$$K_1(x) = \int (0,15x + 10)dx$$

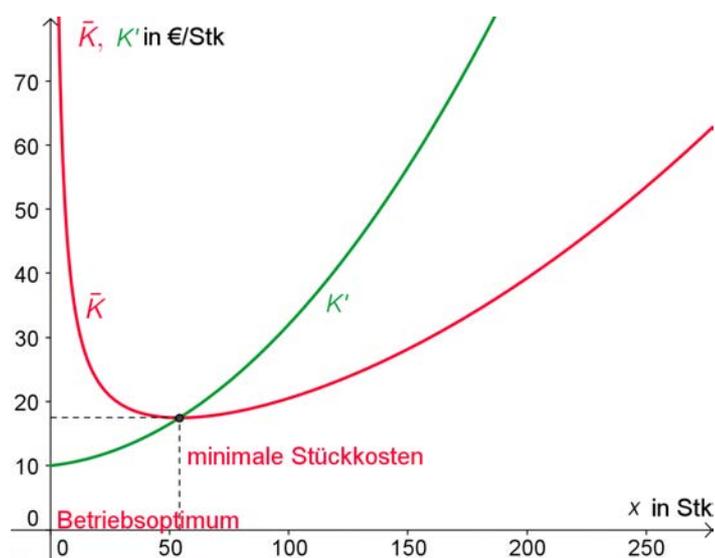
$$K_1(x) = 0,075x^2 + 10x + 260$$

- b) Die Grenzkostenfunktion bildet die 1. Ableitung der Kostenfunktion. An der Kostenkehre hätte die 2. Ableitung den Wert null. Man erkennt sie daher an einem Extremwert der Grenzkostenfunktion.

Abb. 1 stellt eine lineare Grenzkostenfunktion dar. Sie hat keinen Extremwert, daher liegt auch kein Wendepunkt vor.

Abb. 2 stellt eine quadratische Funktion dar, bei der der x-Wert des Minimums der Kostenkehre entspricht.

c) $K'(x) = 0,0018x^2 + 0,04x + 10$
 $\bar{K}(x) = 0,0006x^2 + 0,02x + 10 + \frac{250}{x}$



Die x-Koordinate des Schnittpunkts der beiden Kurven ergibt das Betriebsoptimum und dessen y-Koordinate ergibt die minimalen Stückkosten.

Die Grenzkosten im Betriebsoptimum entsprechen den minimalen Stückkosten.

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 4 Analysis
- b) 4 Analysis
- c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) —
- c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) C Interpretieren und Dokumentieren
- b) D Argumentieren und Kommunizieren
- c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren; B Operieren und Technologieeinsatz
- b) —
- c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) mittel
- c) mittel

Punkteanzahl:

- a) 3
- b) 3
- c) 4

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Grönlandwale

Aufgabennummer: B_195

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Grönlandwale sind eine vom Aussterben bedrohte Tierart. Noch existierende Populationen stehen unter strengstem Schutz. Das Wachstum der Populationen wird genau beobachtet.

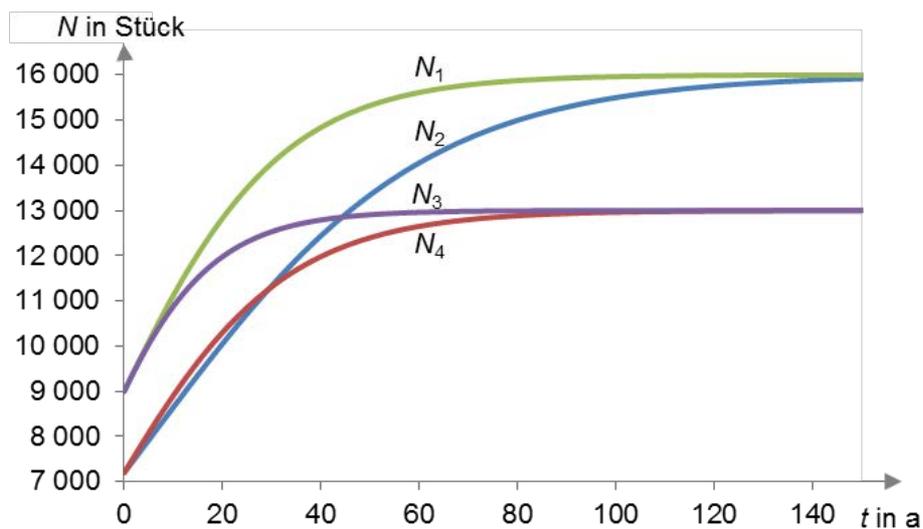
Aus langjährigen Beobachtungen der größten heute lebenden Population kann für deren zukünftiges Wachstum unter gleichbleibenden Umweltbedingungen die folgende Funktion angegeben werden:

$$N(t) = \frac{16\,000}{1 + \frac{11}{9} \cdot e^{-0,0363 \cdot t}}$$

t ... Zeit in Jahren (a) mit $t = 0$ im Jahr 2007

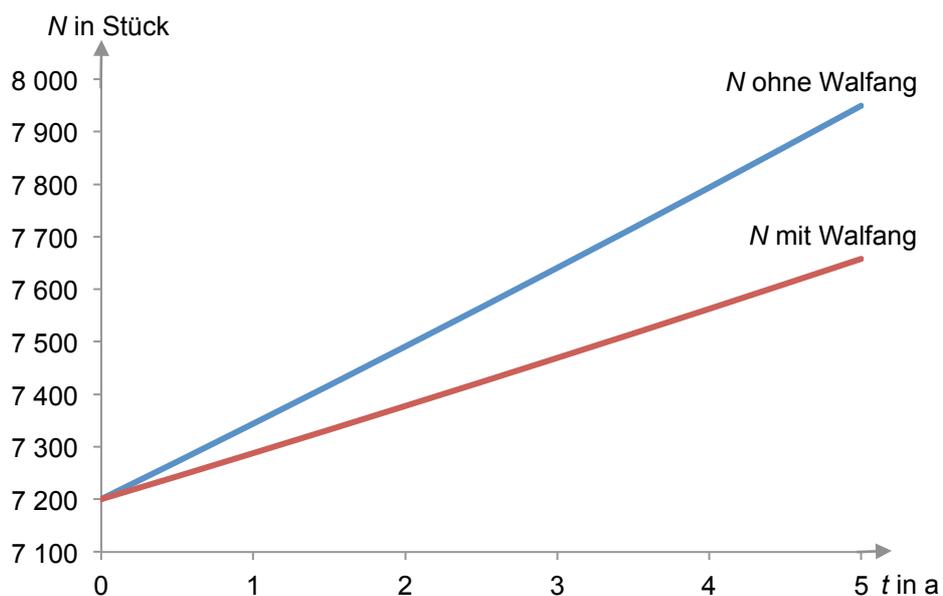
$N(t)$... Anzahl der Wale in Stück nach t Jahren

- a) – Lesen Sie ab, welcher der folgenden Funktionsgraphen zur angegebenen Funktion passt.
 – Begründen Sie Ihre Auswahl.



- b) – Stellen Sie die Wachstumsgeschwindigkeit der Walpopulation in Abhängigkeit von der Zeit t grafisch dar.
 – Berechnen Sie, zu welcher Zeit die Walpopulation am stärksten zunimmt.

- c) Trotz Naturschutz gesteht die Internationale Walfangkommission IWC den Inuit (Volksguppe in Grönland) Fangquoten für den Eigenbedarf für bestimmte Grönlandwalbestände zu. So wurde von 2008 bis 2012 der Fang einer genau bestimmten Anzahl an Tieren für die oben beschriebene Walpopulation erlaubt. In der nachstehenden Grafik ist die voraussichtliche Entwicklung der Walpopulation ohne und mit jährlichem Abfischen dargestellt.



- Argumentieren Sie mathematisch, warum sich der Abstand der beiden Exponentialfunktionen mit jedem Jahr vergrößert.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

- a) Der Zähler der Formel gibt die maximal erreichbare Anzahl von Walen an. Es kommen also nur die Graphen N_1 und N_2 in Frage, da diese bis zu 16 000 Tiere erlauben.
Die Zahl der Tiere zum Zeitpunkt null kann mithilfe der Konstante $\frac{11}{9}$ bestimmt werden. Diese gibt das Verhältnis von maximal erreichbarem Wert und Anfangswert der logistischen Funktion wieder.

$$\frac{11}{9} = \frac{16\,000}{N_0} - 1$$

$$\frac{20}{9} = \frac{16\,000}{N_0}$$

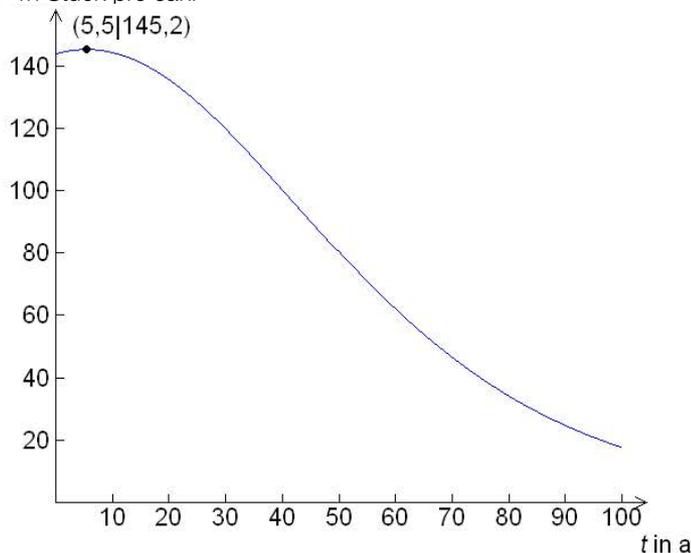
$$N_0 = \frac{16\,000 \cdot 9}{20} = 7\,200$$

Der passende Graph ist daher N_2 .

Auch andere passende Argumentationen bzgl. des Anfangswerts sind als richtig zu werten.

- b) Die Wachstumsgeschwindigkeit der Walpopulation wird durch die 1. Ableitung der Funktion N beschrieben.
 N' wird mithilfe von Technologie berechnet und deren Maximum bestimmt. Es ergibt sich, dass nach ca. 5,5 Jahren die größte Zunahme an Walen erfolgt.

N' in Stück pro Jahr



- c) Der Abstand der Funktionsgraphen wird immer größer, da durch das jährliche Abfischen auch die Basis für den prozentuellen jährlichen Zuwachs verkleinert wird. Bei gleichbleibender prozentueller Zuwachsrate ergibt sich bei einer größeren Ausgangsmenge eine größere Anzahl hinzukommender Wale als bei einer kleineren Ausgangsmenge.

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) 4 Analysis
- c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) 3 Funktionale Zusammenhänge
- c) 1 Zahlen und Maße

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) C Interpretieren und Dokumentieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) D Argumentieren und Kommunizieren
- b) —
- c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) mittel
- c) mittel

Punkteanzahl:

- a) 2
- b) 3
- c) 2

Thema: Umwelt

Quelle: www.wwf.at/files/downloads/groenlandwal.pdf

Herstellungskosten (1)

Aufgabennummer: B-C6_07

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Für ein Produkt lautet die quadratische Kostenfunktion wie folgt:

$$K(x) = 0,1x^2 + 6x + 40$$

$K(x)$... Gesamtkosten von x Mengeneinheiten in Geldeinheiten (GE)

x ... erzeugte Menge in Mengeneinheiten (ME)

Der Betrieb erzeugt pro Tag höchstens 30 ME dieses Produkts.

- a) – Interpretieren Sie die gegebene Kostenfunktion hinsichtlich der folgenden mathematischen Eigenschaften:
- sinnvoller Definitionsbereich
 - Monotonie und Krümmungsverhalten
 - Fixkosten
- b) – Ermitteln Sie aus der gegebenen Gleichung, wie viele ME produziert wurden, wenn Kosten von 150 GE angefallen sind.
- Ermitteln Sie, wie hoch die Kosten für die Produktion von 10 ME sind.
- Stellen Sie die Kostenfunktion grafisch dar und zeichnen Sie die beiden berechneten Wertepaare ein.
- c) – Stellen Sie die Stückkostenfunktion (= Durchschnittskostenfunktion) auf.
- Berechnen Sie das Betriebsoptimum mit der langfristigen Preisuntergrenze.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

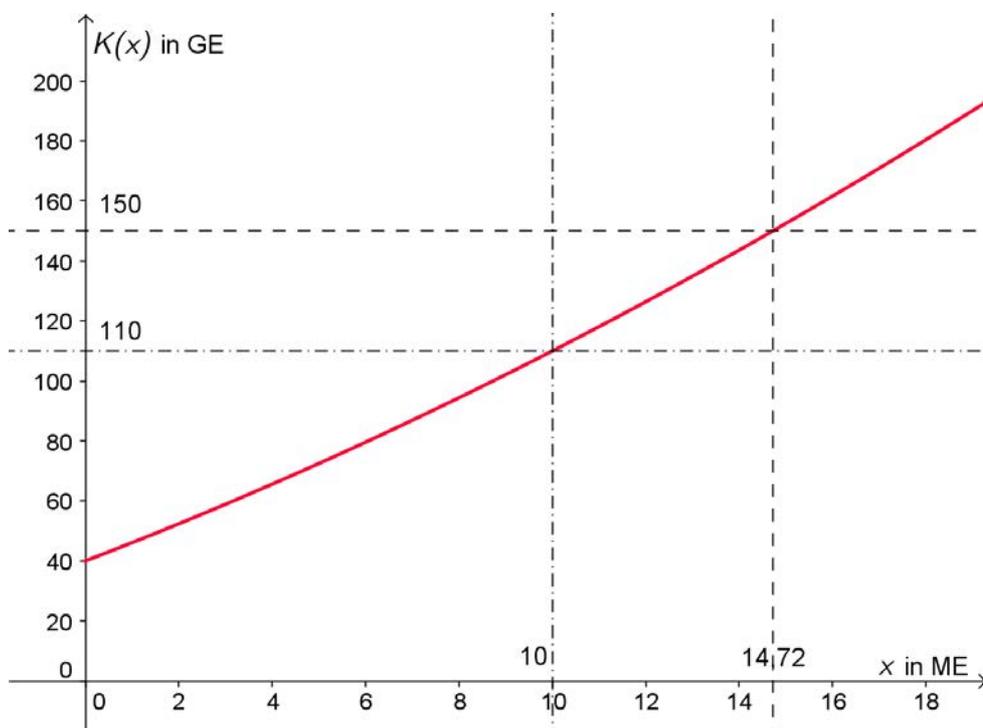
Möglicher Lösungsweg

- a) Der Definitionsbereich ist $[0;30]$.

Die Kostenfunktion ist im angegebenen Definitionsbereich streng monoton steigend.
Die Kosten steigen progressiv, der Graph der Kostenfunktion hat im betrachteten Bereich eine positive Krümmung.

Die Fixkosten betragen $K(0) = 40$ GE.

- b) Bei Kosten von 150 GE werden rund 14,72 ME erzeugt.
Die Herstellung von 10 ME kostet 110 GE.



c) $\frac{K(x)}{x} = \bar{K}(x) = 0,1x + 6 + \frac{40}{x}$

$$\bar{K}(x)' = 0,1 - \frac{40}{x^2} = 0$$

$$x = 20$$

$$\bar{K}(20) = 10$$

Das Betriebsoptimum beträgt 20 ME.

Die langfristige Preisuntergrenze beträgt 10 GE/ME.

Klassifikation

Teil A Teil B: Cluster 6

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) 3 Funktionale Zusammenhänge
- c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) C Interpretieren und Dokumentieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) D Argumentieren und Kommunizieren
- b) C Interpretieren und Dokumentieren
- c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) leicht
- c) mittel

Punkteanzahl:

- a) 3
- b) 3
- c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Immobilienhandel

Aufgabennummer: B_127

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Eine Immobilie soll verkauft werden. Der Barwert dieser Immobilie wird mit € 4.400.000 veranschlagt.

- a) Ein Kaufinteressent könnte die 1. Hälfte des Betrags sofort bezahlen, die 2. Hälfte aber erst nach 1 Jahr.

– Argumentieren Sie, ohne zu rechnen, welche Zusatzforderungen an den Käufer mindestens gestellt werden müssten, damit der Verkäufer mit einem Zahlungsaufschub der 2. Hälfte einverstanden sein könnte.

- b) Der Käufer muss zur Aufbringung des Kaufpreises einen Kredit in der Höhe von € 2.000.000 aufnehmen. Der Kredit soll in 15 Jahren durch gleichbleibende nachschüssige Annuitäten bei einem Zinssatz von 5 % p. a. getilgt werden. (Dieser Zinssatz berücksichtigt auftretende Gebühren und Steuern.)

– Erstellen Sie den Tilgungsplan für die ersten 2 Jahre.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 2.000.000,00
1				
2				

- c) Der Verkäufer legt aus dem Verkaufserlös für die Immobilie € 800.000 bei seiner Bank zu 3,5 % p. a. an. (Die KEST ist in diesem Zinssatz bereits berücksichtigt.)

Er will jeweils zu Monatsbeginn eine Auszahlung von € 5.000 erhalten, bis die Einlage aufgebraucht ist. Der Zinssatz bleibt während der gesamten Zeit konstant.

– Berechnen Sie, wie viele volle Monatsraten er sich auszahlen lassen kann.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

- a) Man muss den Barwert des eingegangenen Vorschlags berechnen, damit man die Zahlungen vergleichen kann (Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik).

Bei dem vorliegenden Vorschlag erhält der Besitzer die Hälfte des Betrages sofort. Durch die spätere Einzahlung der 2. Hälfte entgehen dem Verkäufer die von € 2,2 Millionen berechneten Jahreszinsen.

Falls der Käufer diese Zinsen zu einem vom Verkäufer eingebrachten Kalkulationszinssatz und mit allen sonstigen Auslagen für Kontoführung etc. ebenfalls berücksichtigt, wäre erst dann dieser Zahlungsvorschlag gleichwertig.

(Offene Aufgabe, daher nicht unbedingt in dieser Weise zu argumentieren. Stichwörter: gleicher Stichtag zum Vergleich der Zahlungen.)

- b) Zunächst wird die Annuität A ermittelt:

$$q = 1,05$$

$$2\,000\,000 = A \cdot \frac{q^{15} - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^{15}} \Rightarrow A \approx \text{€ } 192.684,58$$

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 2.000.000,00
1	€ 100.000,00	€ 92.684,58	€ 192.684,58	€ 1.907.315,42
2	€ 95.365,77	€ 97.318,81	€ 192.684,58	€ 1.809.996,61

- c) $q_{12} = \sqrt[12]{1,035}$

$$800\,000 = 5\,000 \cdot \frac{q_{12}^n - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{n-1}}$$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $n = 213,668\dots$

Der Betrag von € 5.000 kann 213-mal ausgezahlt werden.

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) 3 Funktionale Zusammenhänge
- c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) D Argumentieren und Kommunizieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —

Schwierigkeitsgrad:

- a) leicht
- b) leicht
- c) schwer

Punkteanzahl:

- a) 1
- b) 3
- c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Konfiserie

Aufgabennummer: B_196

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Eine Konditorei möchte Pralinen aus Eigenproduktion anbieten. Um die Nachfrage abschätzen zu können, werden zunächst 4 verschiedene Bonbonnieren (B_1, B_2, B_3, B_4) aus 4 Sorten Pralinen (Marzipan, Nougat, Kokos, Krokant) angeboten. Die folgende Tabelle gibt an, wie viel Stück einer jeden Pralinenart in jeder Bonbonniere enthalten sind:

		Bonbonnieren			
		B_1	B_2	B_3	B_4
Pralinen- sorten	Marzipan	5	3	4	4
	Nougat	4	3	5	0
	Kokos	2	3	3	4
	Krokant	1	3	0	4

- a) Aus 181 Marzipanpralinen, 142 Nougatpralinen, 144 Kokospralinen und 97 Krokantpralinen wurden Bonbonnieren zusammengestellt.

– Berechnen Sie, wie viele Bonbonnieren der Sorten B_1, B_2, B_3 und B_4 mit diesen Pralinen hergestellt werden können.

- b) In der folgenden Tabelle sind die Herstellungskosten pro Praline jeweils als Variable angegeben:

	Marzipan	Nougat	Kokos	Krokant
Kosten (in €)	K_1	K_2	K_3	K_4

Für die Verpackung fallen Materialkosten in Höhe von € 2,50 pro Bonbonniere an. Pro Bonbonniere wird ein Gewinn von 10 % berechnet.

- Erstellen Sie eine Formel in Matrixschreibweise, mit deren Hilfe die Verkaufspreise P_1, P_2, P_3 und P_4 der Bonbonnieren B_1, B_2, B_3 und B_4 berechnet werden können.
 – Begründen Sie, wie viele Zeilen und Spalten die sich ergebende Matrix haben muss.

- c) Die Glasur der Pralinen wird in 3 Typen aus unterschiedlichem Gehalt an Kakao, Zucker und Kakaobutter hergestellt. Jeweils 100 Gramm (g) einer Glasur enthalten die in der untenstehenden Tabelle angegebene Masse dieser Zutaten in g.

	Typ 1 (dunkel)	Typ 2 (mittel)	Typ 3 (hell)
Kakao	40	37	35
Zucker	30	40	45
Kakaobutter	30	23	20

Für die Glasur von jeweils 50 Stück der verschiedenen Pralinenarten werden folgende

Mengen (in Einheiten zu 100 Gramm) benötigt:

	Marzipan	Nougat	Kokos	Krokant
Typ 1				5
Typ 2	5	2		3
Typ 3	2	3	6	

- Erstellen Sie einen Gozinto-Graphen, der die Verflechtung zwischen den Rohstoffen (Kakao, Zucker und Kakaobutter), den Glasurtypen und den Pralinsorten beschreibt.
- Interpretieren Sie diesen Graphen hinsichtlich der Zusammensetzung der Glasur von 50 Stück Marzipanpralinen.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

- a) a , b , c und d bezeichnen die Anzahl der hergestellten Bonbonnieren B_1 , B_2 , B_3 und B_4 .

Lösung mit Gleichungssystem:

$$5a + 3b + 4c + 4d = 181$$

$$4a + 3b + 5c = 142$$

$$2a + 3b + 3c + 4d = 144$$

$$a + 3b + 4d = 97$$

mittels Technologieeinsatz: $a = 8$, $b = 15$, $c = 13$, $d = 11$

Alternativer Lösungsweg (mit inverser Matrix):

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 181 \\ 142 \\ 144 \\ 97 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 181 \\ 142 \\ 144 \\ 97 \end{pmatrix}$$

Mittels Technologieeinsatz:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,375 & 0 & -0,5 & 0,125 \\ -0,292 & 0,333 & -0,167 & 0,458 \\ -0,125 & 0 & 0,5 & -0,375 \\ 0,125 & -0,25 & 0,25 & -0,125 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 181 \\ 142 \\ 144 \\ 97 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 13 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Es können 8 Bonbonnieren B_1 , 15 Bonbonnieren B_2 , 13 Bonbonnieren B_3 und 11 Bonbonnieren B_4 hergestellt werden.

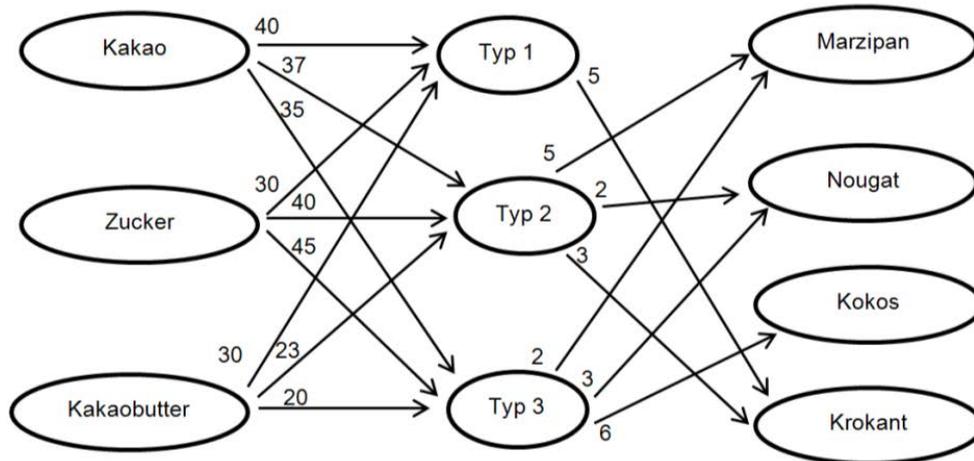
Hinweis: Werden die Einträge der inversen Matrix nicht gerundet, ergeben sich leicht abweichende Zahlenwerte im Ergebnisvektor.

- b) Verkaufspreisvektor:

$$(P_1 \ P_2 \ P_3 \ P_4) = \left[(K_1 \ K_2 \ K_3 \ K_4) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} + (2,5 \ 2,5 \ 2,5 \ 2,5) \right] \cdot 1,1$$

Das Ergebnis muss eine 1×4 -Matrix sein (also 1 Zeile und 4 Spalten aufweisen), da bei der Multiplikation 1×4 mal 4×4 eine 1×4 -Matrix entsteht und die weiteren Rechenschritte die Dimension der Matrix nicht mehr beeinflussen.

c)



Die Glasur von 50 Stück Marzipanpralinen besteht aus 5 Einheiten Typ 2 und 2 Einheiten Typ 3. In einer Einheit Typ 2 sind 37 g Kakao, 40 g Zucker und 23 g Kakaobutter, in einer Einheit Typ 3 sind 35 g Kakao, 45 g Zucker und 20 g Kakaobutter enthalten. Insgesamt besteht die Glasur also aus:

- Kakao: $5 \cdot 37 \text{ g} + 2 \cdot 35 \text{ g} = 255 \text{ g}$
- Zucker: $5 \cdot 40 \text{ g} + 2 \cdot 45 \text{ g} = 290 \text{ g}$
- Kakaobutter: $5 \cdot 23 \text{ g} + 2 \cdot 20 \text{ g} = 155 \text{ g}$

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 2 Algebra und Geometrie
- b) 2 Algebra und Geometrie
- c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren
- b) A Modellieren und Transferieren
- c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) D Argumentieren und Kommunizieren
- c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) schwer
- c) leicht

Punkteanzahl:

- a) 3
- b) 4
- c) 4

Thema: Wirtschaft

Quelle: <http://backelt.net/download/bmi/schriftenreihe/10.pdf>

Kreditkonditionen

Aufgabennummer: B_122

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Frau Mitter benötigt einen Kredit. Etwaige Nebengebühren und Steuern werden im Folgenden nicht berücksichtigt.

a) Ihre Hausbank bietet ihr einen Kredit in Höhe von € 100.000 zu folgenden Konditionen an: Rückzahlung durch vorschüssige Monatsraten bei einem Zinssatz von 4,2 % p. a. und einer Laufzeit von 10 Jahren.

– Ermitteln Sie die Höhe der Monatsraten.

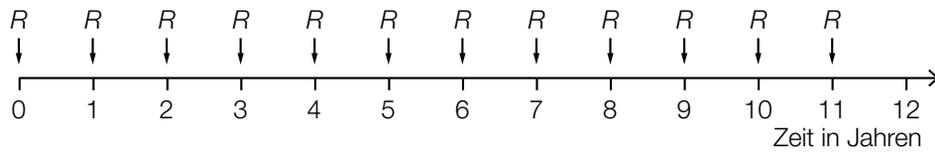
b) Frau Mitter hat die Möglichkeit, einen Teil aus eigenen Ersparnissen zu finanzieren und einen Kredit in Höhe von € 80.000 bei einem Zinssatz von 4,2 % p. a. aufzunehmen. Die Bank erwartet monatlich vorschüssige Rückzahlungen in Höhe von je € 550. Die Rückzahlung beginnt 3 Jahre nach Kreditaufnahme.

– Berechnen Sie, wie viele Jahre und Monate nach Kreditaufnahme die Schuld beglichen ist, wenn die Restzahlung 1 Monat nach der letzten Vollrate fällig ist.

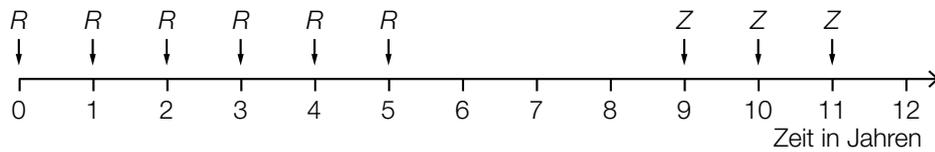
– Stellen Sie diese Situation mit den entsprechenden Rückzahlungsbeträgen grafisch in einer Zeitlinie dar.

c) Die nachstehenden Grafiken zeigen in Zeitlinien 2 weitere Rückzahlungsvarianten eines Kredits mit jährlichen Raten R bzw. Z mit dem Jahreszinssatz i .

1. Variante:



2. Variante:



- Beschreiben Sie die beiden Zahlungsweisen in Worten.
- Argumentieren Sie, dass die angegebene Gleichung den Wert von Z richtig beschreibt.

$$Z = R \cdot (1 + q^3), \text{ wobei } q = 1 + i \text{ bedeutet}$$

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

$$\text{a) } q_{12} = \sqrt[12]{1,042}$$

$$100\,000 = R \cdot \frac{q_{12}^{120} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{119}} \Rightarrow R = 1\,014,739\dots$$

Die Höhe der Rate beträgt € 1.014,74.

$$\text{b) } 80\,000 \cdot 1,042^3 = 550 \cdot \frac{q_{12}^n - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{n-1}}$$

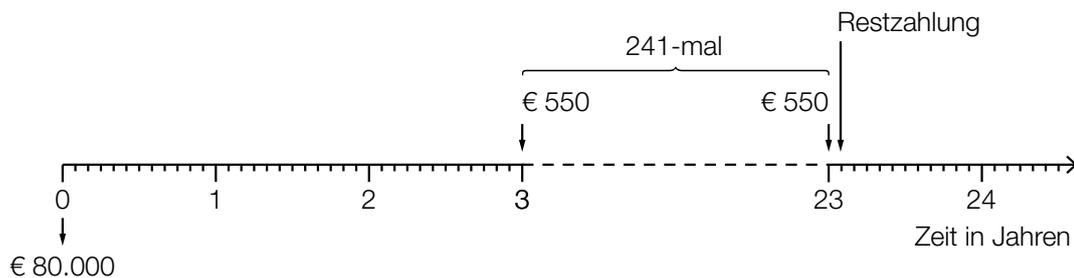
Lösung mittels Technologieeinsatz:

$$n = 241,61\dots$$

Frau Mitter muss 241 vorschüssige Monatsraten zahlen.

Die Restzahlung erfolgt daher 241 Monate (= 20 Jahre und 1 Monat) nach Beginn der Rückzahlung.

Das bedeutet, 23 Jahre und 1 Monat nach Kreditaufnahme ist die Schuld beglichen.



c) Das erste Angebot zeigt 12 jährliche vorschüssige Rückzahlungsraten R .

Das zweite Angebot zeigt die Rückzahlung mit 6 jährlichen vorschüssigen Raten R , der Endwert dieser 6 Raten wird 6 Jahre weiterverzinst, 3 Jahre sind ohne Rückzahlung und anschließend folgen 3 jährliche vorschüssige Raten Z , die die Rückzahlung abschließen.

Es wird 3-mal Z statt 6-mal R eingezahlt. Jedes Z steht demnach für 2 Zahlungen von R mit jeweils 3 Jahren zwischen den Einzahlungen. Wegen der jährlichen Verzinsung, die noch jeweils dazukommt, muss für jedes einzelne Z gelten:

$$Z = R + R \cdot q^3 \Rightarrow \text{daher ist } Z = R \cdot (1 + q^3)$$

Man kommt auch mit anderen Überlegungen zu diesem Ergebnis (z. B.: der Endwert von 6 R-Raten entspricht jenem der letzten 3 Z-Raten).

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) 3 Funktionale Zusammenhänge
- c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren
- b) A Modellieren und Transferieren
- c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) mittel
- c) schwer

Punkteanzahl:

- a) 2
- b) 4
- c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Lebensversicherung

Aufgabennummer: B_119

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Bei Lebensversicherungen spielt der Begriff *Sterbewahrscheinlichkeit* eine große Rolle. Man versteht darunter die Wahrscheinlichkeit, mit der eine versicherte Person innerhalb eines Versicherungsjahres verstirbt.

- a) Die Sterbewahrscheinlichkeit ist unter anderem vom Lebensalter der versicherten Person exponentiell abhängig und verdoppelt sich bei jüngeren Personen schätzungsweise alle 9 Jahre. Laut Statistik Austria verstirbt in Österreich ein 30-jähriger Mann innerhalb eines Versicherungsjahres mit einer Wahrscheinlichkeit von nur ungefähr 0,088 %.

– Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion p , die diese Abhängigkeit beschreibt. Runden Sie die Parameter auf 4 Nachkommastellen.

$$p(t) = p_0 \cdot a^t$$

t ... Alter in Jahren

$p(t)$... Sterbewahrscheinlichkeit in Prozent im Alter t

- b) Ein junger Mann, dessen altersbedingte Sterbewahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses mit 0,09 % eingeschätzt wird, schließt eine Lebensversicherung über einen bestimmten Betrag ab, der im Falle des Ablebens an seine Angehörigen ausbezahlt wird.

– Erstellen Sie für diese Situation ein geeignetes Baumdiagramm für die ersten 3 Jahre nach Vertragsabschluss unter modellhafter Annahme einer konstanten Sterbewahrscheinlichkeit.
– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Versicherte innerhalb der ersten 3 Jahre nach Vertragsabschluss stirbt.

- c) Statt jährlich € 100 in eine Lebensversicherung mit einer Versicherungssumme von € 20.000 einzuzahlen, möchte ein 30-jähriger Mann jährlich vorschüssig € 100 ansparen. Das Geld soll der Familie nach seinem Ableben zur Verfügung stehen.

– Berechnen Sie, wie lange es dauern würde, bis er gleich viel Geld gespart hat, wie die Lebensversicherungssumme beträgt. Gehen Sie dabei von einem Zinssatz von 2,5 % p. a. aus und berücksichtigen Sie die Kapitalertragsteuer von 25 %.

Hinweis zur Aufgabe:

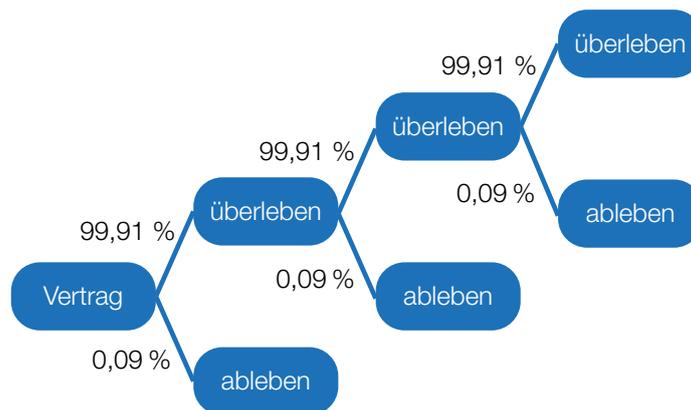
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) 1. Gleichung: $0,088 = p_0 \cdot a^{30} \Rightarrow p_0 = \frac{0,088}{a^{30}}$
 2. Gleichung: $2 \cdot 0,088 = p_0 \cdot a^{39} \Rightarrow p_0 = \frac{2 \cdot 0,088}{a^{39}}$
 Gleichsetzen: $\frac{0,088}{a^{30}} = \frac{2 \cdot 0,088}{a^{39}} \Rightarrow a = \sqrt[9]{2} \approx 1,0801$
 $p_0 = 0,00873... \approx 0,0087$

Gleichung der Funktion:
 $p(t) = 0,0087 \cdot 1,0801^t$ (Parameter gerundet)

b)



$$1 - 0,9991^3 = 0,00269... \approx 0,27 \%$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Versicherte innerhalb der ersten 3 Jahren nach Vertragsabschluss stirbt, ist rund 0,27 %.

c) Zinssatz nach Berücksichtigung der KEST: $2,5 \% \cdot 0,75 = 1,875 \%$
 Aufzinsungsfaktor $q = 1,01875$

$$20000 = 100 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q$$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $n = 83,08...$

Es würde rund 83 Jahre dauern.

Erst ungefähr 83 Jahre nach dem Beginn der Spar-Einzahlungen und im Alter von 113 Jahren hätte der Mann den Betrag von € 20.000 angespart.

113 Jahre liegen weit über der durchschnittlichen Lebenserwartung. Daher ist das Ansparen von € 20.000 mit € 100 jährlich nicht zielführend.

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) 5 Stochastik
- c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

- a) 5 Stochastik
- b) —
- c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren
- b) A Modellieren und Transferieren
- c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) mittel
- c) mittel

Punkteanzahl:

- a) 4
- b) 2
- c) 2

Thema: Versicherungen

Quellen: —

Marktanalyse

Aufgabennummer: B-C8_01

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Für einen Artikel kennt man die Angebots- und die Nachfragefunktion:

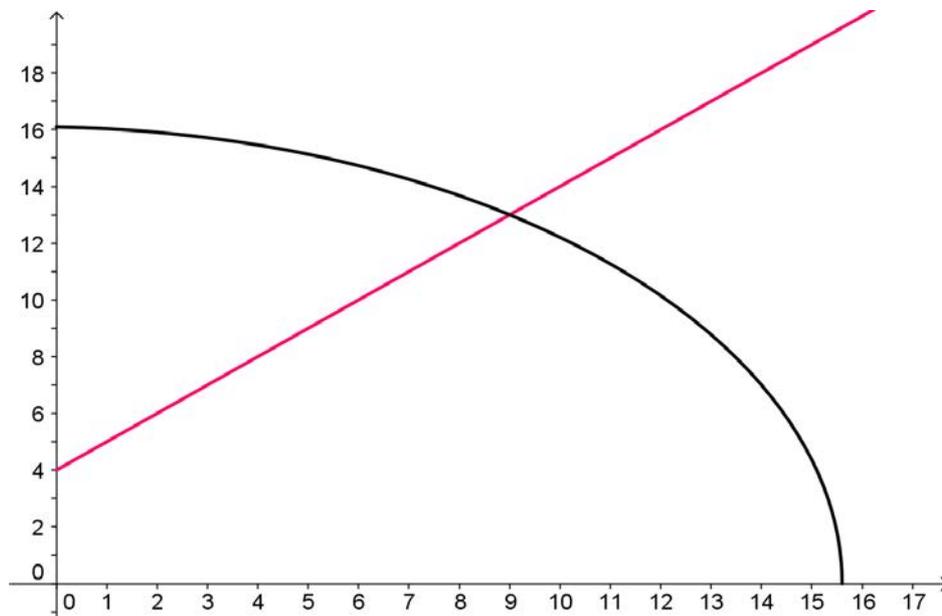
$$p_A(x) = 4 + x \quad \text{und} \quad p_N(x) = \sqrt{259 - x - x^2}$$

$p_A(x)$... Angebotspreis bei x Mengeneinheiten in Geldeinheiten (GE) bezogen auf 1 Mengeneinheit (ME)

$p_N(x)$... Nachfragepreis bei x Mengeneinheiten in Geldeinheiten (GE) bezogen auf 1 Mengeneinheit (ME)

x ... nachgefragte Menge in Mengeneinheiten (ME)

- a) Interpretieren und beschriften Sie die grafische Darstellung der beiden Funktionen nach folgenden Gesichtspunkten:
- Achsenbeschriftung
 - Angebotsfunktion
 - Nachfragefunktion
 - Gleichgewichtspreis (Marktpreis)



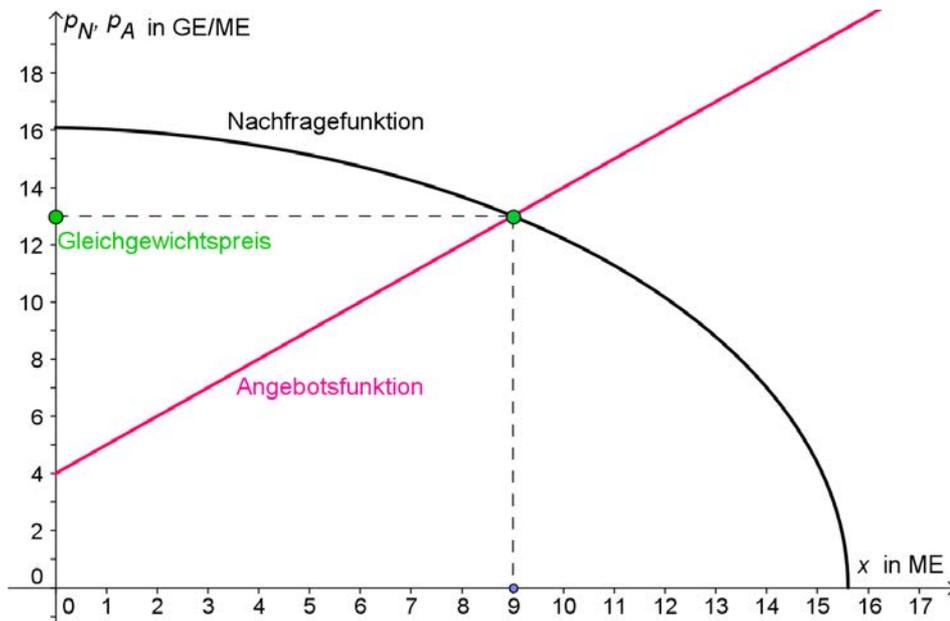
- b) Bestimmen Sie eine sinnvolle Definitionsmenge für die nachgefragte Menge. Berechnen Sie die Menge x und den Preis p im Marktgleichgewicht.
- c) Ein Produzent hält sich nicht an den gegebenen Marktpreis und bestimmt seinen möglichen Erlös nur mithilfe der Nachfragefunktion p_N . Stellen Sie die Erlösfunktion $E(x) = p_N(x) \cdot x$ grafisch dar und entnehmen Sie der Grafik die ungefähren Werte für die sich ergebenden Erlösgrenzen und das Erlösmaximum.

Hinweis zur Aufgabe:

Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



b)

Marktgleichgewicht

Berechnungen sind mit Technologieeinsatz möglich ...

... oder durch schrittweises Auflösen:

Bestimmen der Definitionsmenge D : $259 - x - x^2 \geq 0 \rightarrow D = [0; 15,6]$

$$4 + x = \sqrt{259 - x - x^2} \quad | \text{Gleichung quadrieren}$$

$$16 + 8x + x^2 = 259 - x - x^2$$

$$2x^2 + 9x - 243 = 0 \quad \dots \text{Einsatz der „großen“ Lösungsformel,}$$

$$x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 3888}}{4}$$

Nur die positive Lösung ist sinnvoll.

$$\rightarrow x = 9 \text{ ME}$$

Das Marktgleichgewicht stellt sich bei 9 ME und einem Preis von 13 GE/ME ein.

c)

Die Erlösgrenzen sind bei

einem Absatz von

$$x_1 = 0 \text{ und}$$

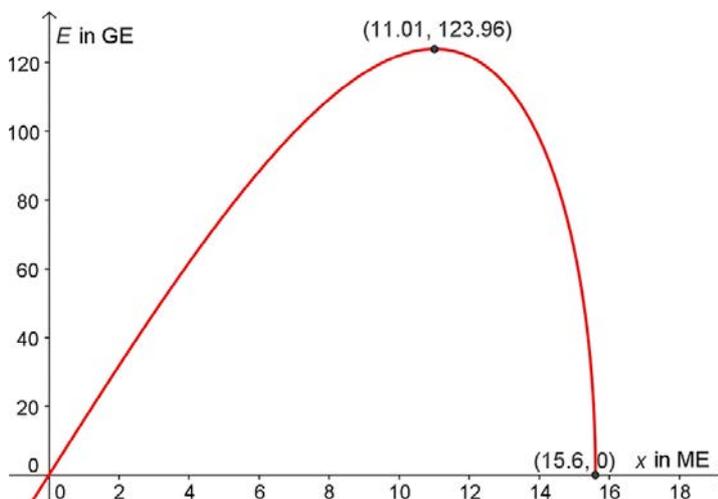
$$x_2 \approx 15,6 \text{ ME.}$$

Das Maximum des Erlöses wird

bei einem Absatz von ungefähr

11 ME erreicht und beträgt

rund 124 GE.



Klassifikation

Teil A Teil B: Cluster 8

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) 2 Algebra und Geometrie
- c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) C Interpretieren und Dokumentieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) —
- b) C Interpretieren und Dokumentieren
- c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

- a) leicht
- b) mittel
- c) mittel

Punkteanzahl:

- a) 2
- b) 2
- c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Möbel*

Aufgabennummer: B_513

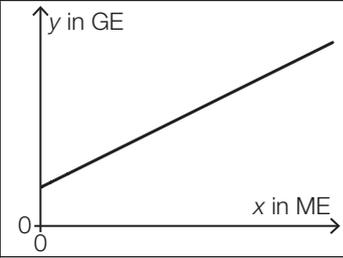
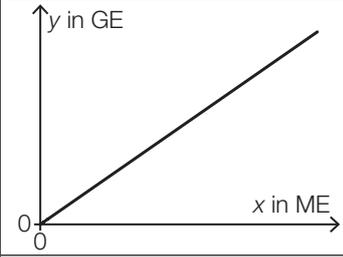
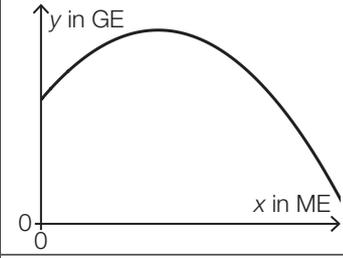
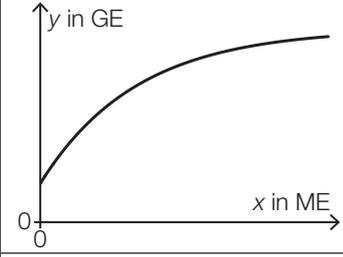
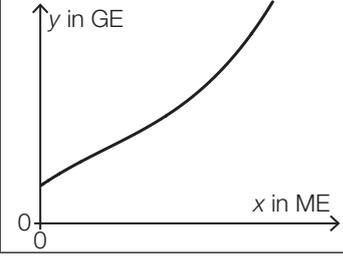
Technologieeinsatz:

möglich

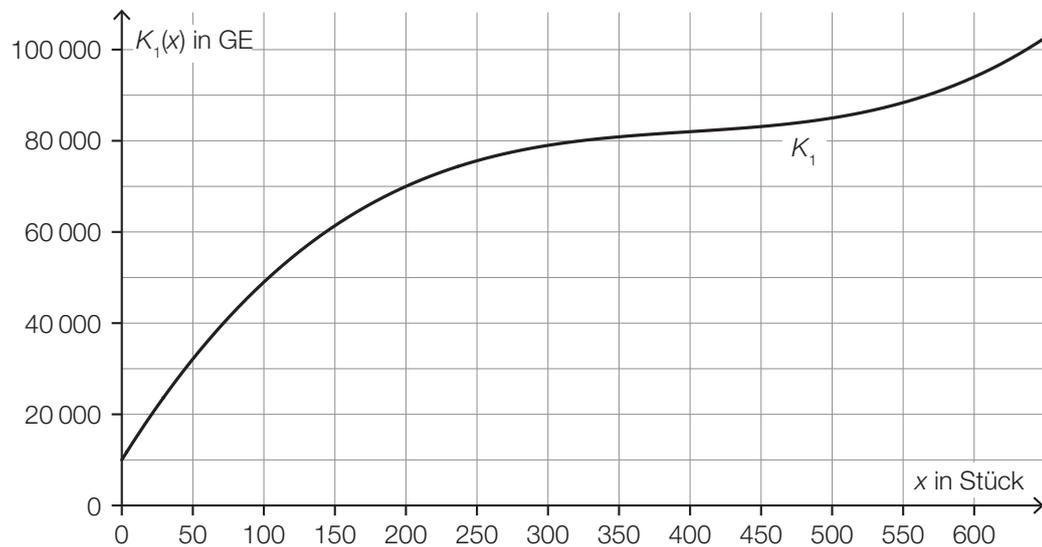
erforderlich

a) Im Folgenden sind die Graphen von 5 Funktionen dargestellt. Nur einer dieser Graphen kann der Graph einer Erlösfunktion sein.

1) Kreuzen Sie den zutreffenden Graphen an. [1 aus 5]

	<input type="checkbox"/>
	<input type="checkbox"/>
	<input type="checkbox"/>
	<input type="checkbox"/>
	<input type="checkbox"/>

- b) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Kostenfunktion K_1 eines Betriebs bei der Produktion von Kleiderschränken dargestellt.



x ... Produktionsmenge in Stück

$K_1(x)$... Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE

- 1) Lesen Sie das größtmögliche Produktionsintervall ab, in dem der Verlauf der Kostenfunktion K_1 degressiv ist.
- 2) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die Stückkosten bei einer Produktion von 200 Stück.

Die Fixkosten können um 10 % reduziert werden.

- 3) Begründen Sie, warum sich die Grenzkostenfunktion dadurch nicht ändert.

- c) Die Kostenfunktion K_2 eines Betriebs bei der Produktion von Kommoden ist gegeben durch:

$$K_2(x) = 0,001 \cdot x^3 - 0,9 \cdot x^2 + a \cdot x + 3000$$

x ... Produktionsmenge in Stück

$K_2(x)$... Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE

Bei einer Produktion von 100 Kommoden hat der Betrieb Gesamtkosten von 35 000 GE.

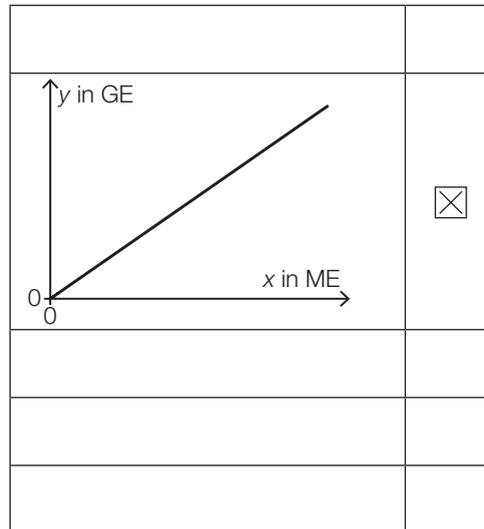
- 1) Berechnen Sie den Koeffizienten a der Kostenfunktion K_2 .
- 2) Berechnen Sie das Betriebsoptimum.

Der Break-even-Point wird bei einem Verkauf von 60 Kommoden erreicht.

- 3) Berechnen Sie den Preis pro Kommode bei dieser verkauften Menge.

Möglicher Lösungsweg

a1)



b1) Im Produktionsintervall $[0; 400[$ ist der Verlauf der Kostenfunktion degressiv.

Toleranzbereich für die obere Intervallgrenze $[325; 475]$

Auch die Angabe als abgeschlossenes oder offenes Intervall ist als richtig zu werten.

b2) $\bar{K}_1(200) = \frac{K_1(200)}{200} = \frac{70000}{200} = 350$

Die Stückkosten betragen 350 GE pro Stück.

b3) Die Grenzkostenfunktion ist die Ableitung der Kostenfunktion. Die Fixkosten fallen beim Ableiten als konstantes Glied weg.

$$\text{c1) } 0,001 \cdot 100^3 - 0,9 \cdot 100^2 + a \cdot 100 + 3000 = 35000 \Rightarrow a = 400$$

$$\text{c2) } \bar{K}_2(x) = \frac{K_2(x)}{x} = 0,001 \cdot x^2 - 0,9 \cdot x + 400 + \frac{3000}{x}$$

$$\bar{K}_2'(x) = 0,002 \cdot x - 0,9 - \frac{3000}{x^2}$$

$$\bar{K}_2'(x) = 0$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$x = 457,1\dots$$

Das Betriebsoptimum liegt bei einer Produktion von rund 457 Kommoden.

$$\text{c3) } K_2(60) = 23976$$

$$p = \frac{23976}{60} = 399,6$$

Der Preis beträgt 399,60 GE pro Kommode.

Lösungsschlüssel

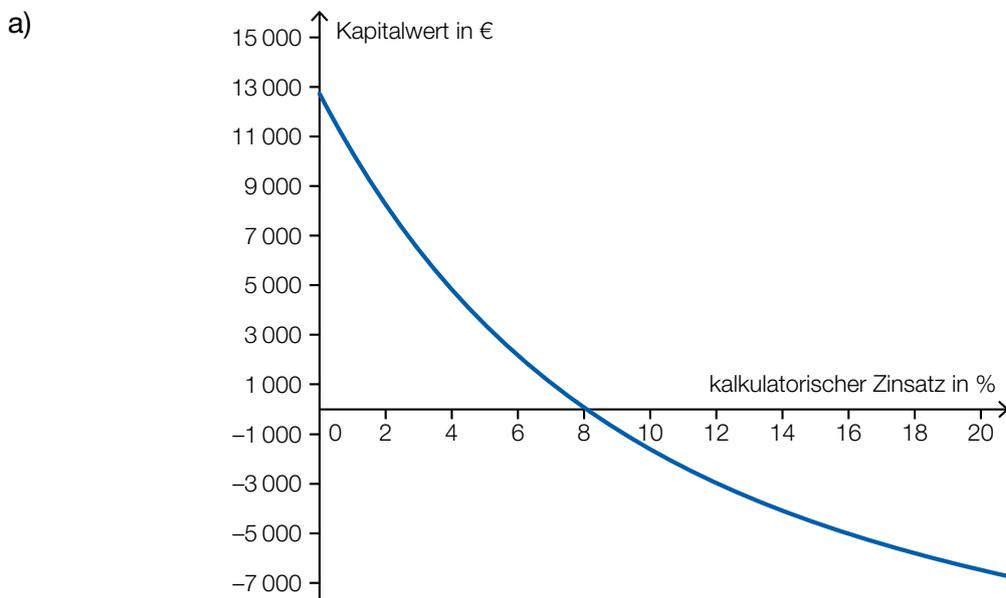
- a1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.
- b1) Ein Punkt für das Ablesen des richtigen Produktionsintervalls.
- b2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Stückkosten.
- b3) Ein Punkt für das richtige Begründen.
- c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Koeffizienten a .
- c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Betriebsoptimums.
- c3) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Preises.

Photovoltaik (1)

Aufgabennummer: B_201

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Herr Maier kann die Kosten für seine Photovoltaikanlage bar bezahlen. Unter Berücksichtigung aller zukünftigen Einnahmen und Ausgaben sowie einer Einmalförderung von € 2.000 zum Errichtungszeitpunkt ergibt sich untenstehender Funktionsgraph für den Kapitalwert der Anlage in Abhängigkeit vom kalkulatorischen Zinssatz.



- Lesen Sie aus dem Funktionsgraphen ab, bis zu welchem ungefähren kalkulatorischen Zinssatz die geförderte Anlage rentabel ist.
- Skizzieren Sie in obiger Abbildung den ungefähren Verlauf des Funktionsgraphen, wenn Herr Maier die Einmalförderung von € 2.000 nicht erhält.

b) Eine Bank bietet Frau Zangerl einen Kredit über € 12.560 für die Finanzierung einer Photovoltaikanlage an. Dieser Kredit soll in 15 Jahren durch nachschüssige Monatsraten in Höhe von je € 98 getilgt werden. Eine Bearbeitungsgebühr von 3 % der Kreditsumme wird bei der Auszahlung des Kredits von der Kreditsumme abgezogen. (Weitere Spesen und Gebühren werden nicht berücksichtigt.)

- Ermitteln Sie den effektiven Jahreszinssatz dieses Angebots in Prozent.

- c) Man rechnet in den nächsten Jahren mit einer Strompreissteigerung von 4 % pro Jahr. Derzeit kostet eine Kilowattstunde (kWh) Strom € 0,16.

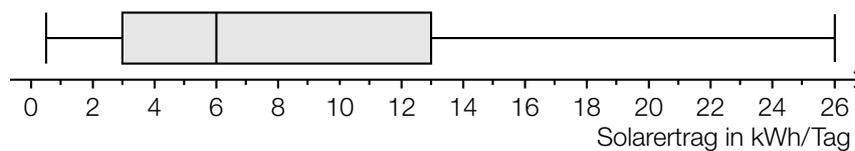
Der Strompreis in Euro pro Kilowattstunde (€/kWh) soll in Abhängigkeit von der Zeit in Jahren durch eine Funktion beschrieben werden.

- Erstellen Sie eine Gleichung dieser Funktion.

Gewerbliche Photovoltaik-Betreiber werden durch spezielle Fördergelder unterstützt. Für einen Zeitraum von 13 Jahren wird ihnen garantiert, dass sie überschüssigen Strom zu einem gleichbleibenden Tarif von € 0,38/kWh ins Netz einspeisen können.

- Überprüfen Sie mithilfe der erstellten Funktion, ob der Strompreis nach 13 Jahren unter dem garantierten Tarif von € 0,38/kWh liegen wird.

- d) Im nachstehenden Boxplot ist der tägliche Solarertrag in kWh einer Photovoltaikanlage in Eisenstadt für den Herbst 2012 dargestellt.



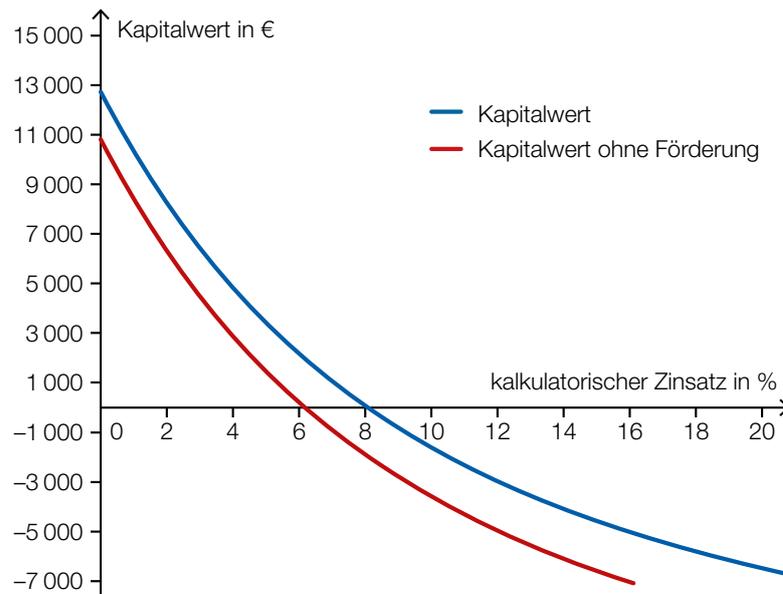
- Lesen Sie den minimalen und den maximalen Solarertrag pro Tag aus der Grafik ab.
- Lesen Sie den Interquartilsabstand ab.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

- a) Die geförderte Photovoltaikanlage ist für kalkulatorische Zinssätze bis ca. 8 % rentabel.
Toleranzbereich: [7,9 %; 8,1 %]



- b) Gebühren: 3 % von € 12.560 = € 376,80
Auszahlungsbetrag: € 12.183,20

$$\text{Äquivalenzgleichung: } 12\,183,20 = 98 \cdot \frac{q_{12}^{180} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{180}}$$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$$i_{\text{eff}} = q_{12}^{12} - 1 = 0,05388\dots$$

$$q_{12} = 1,00438\dots$$

Der effektive Jahreszinssatz ist rund 5,39 %.

- c) t ... Zeit in Jahren
 $K(t)$... Strompreis in €/kWh zur Zeit t
 $K(t) = 0,16 \cdot 1,04^t$

$$K(13) = 0,16 \cdot 1,04^{13} = 0,2664 < 0,38$$

Der Strompreis wird nach 13 Jahren unter dem garantierten Tarif liegen.

- d) minimaler Ertrag: rund 0,5 kWh/Tag
maximaler Ertrag: rund 26 kWh/Tag

Interquartilsabstand: 10 kWh/Tag

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) 3 Funktionale Zusammenhänge
- c) 3 Funktionale Zusammenhänge
- d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —
- d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) A Modellieren und Transferieren
- d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) C Interpretieren und Dokumentieren
- b) A Modellieren und Transferieren
- c) B Operieren und Technologieeinsatz
- d) —

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) leicht
- c) leicht
- d) leicht

Punkteanzahl:

- a) 2
- b) 3
- c) 2
- c) 2

Thema: Wirtschaft

Quelle: <http://www.pvaustria.at>

Preis und Absatz

Aufgabennummer: B_128

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

In einem Monopolbetrieb wird der Zusammenhang des Absatzes einer Ware mit einem bestimmten Preis pro Kilogramm untersucht.

x ... Absatz in Kilogramm (kg)

$p(x)$... Preis für x verkaufte Kilogramm in Euro pro Kilogramm (€/kg)

- a) Im 1. Verkaufsmonat ist die Abhängigkeit des Absatzes vom Preis pro Kilogramm der Ware in der untenstehenden Tabelle aufgenommen worden.

x in kg	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
$p(x)$ in €/kg	40	39	38	37	35	33	31	28	25	22	18	14	10	5,6	0,2

- Ermitteln Sie die passende quadratische Preisfunktion der Nachfrage p in Abhängigkeit von der Absatzmenge x mithilfe von Regression.
- Interpretieren Sie anhand der Grafik, wie gut sich die berechnete Kurve an die gegebenen Daten anpasst.
- Argumentieren Sie, in welchem Definitionsbereich die ermittelte Funktion den Zusammenhang von Absatz und Preis sinnvoll beschreibt.

- b) Für den 2. Verkaufsmonat lautet die Preisfunktion der Nachfrage:

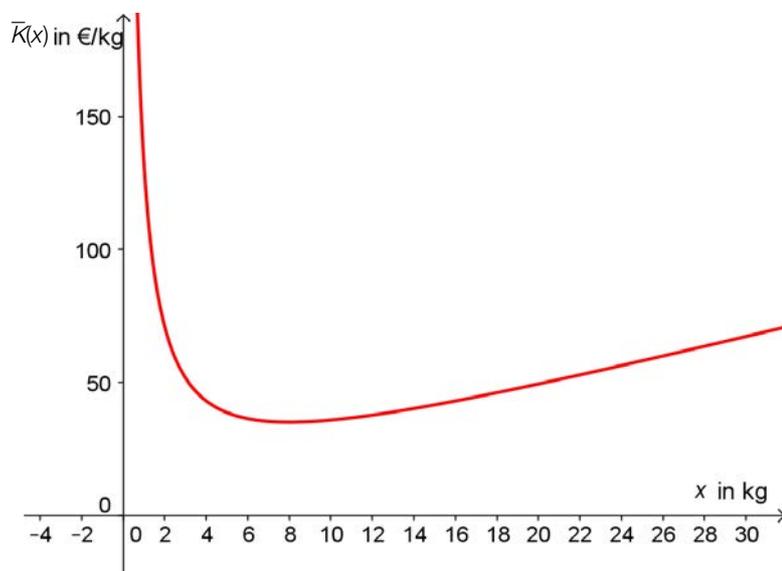
$$p(x) = -0,04x^2 - 0,2x + 40$$

Wenn sich die Absatzmenge von x kg auf $(x + 1)$ kg verändert, gilt für die damit zusammenhängende Preisänderung $\Delta p(x)$ folgende Beziehung:

$$\Delta p(x) = p(x + 1) - p(x)$$

- Ermitteln Sie eine möglichst einfache Gleichung der Funktion Δp für die gegebene Preisfunktion der Nachfrage p .
- Berechnen Sie mithilfe von Δp die Veränderung des Preises bei einer Absatzsteigerung von 20 kg auf 21 kg.

- c) Die Stückkostenfunktion \bar{K} für diese Ware hat den unten dargestellten Funktionsgraphen.



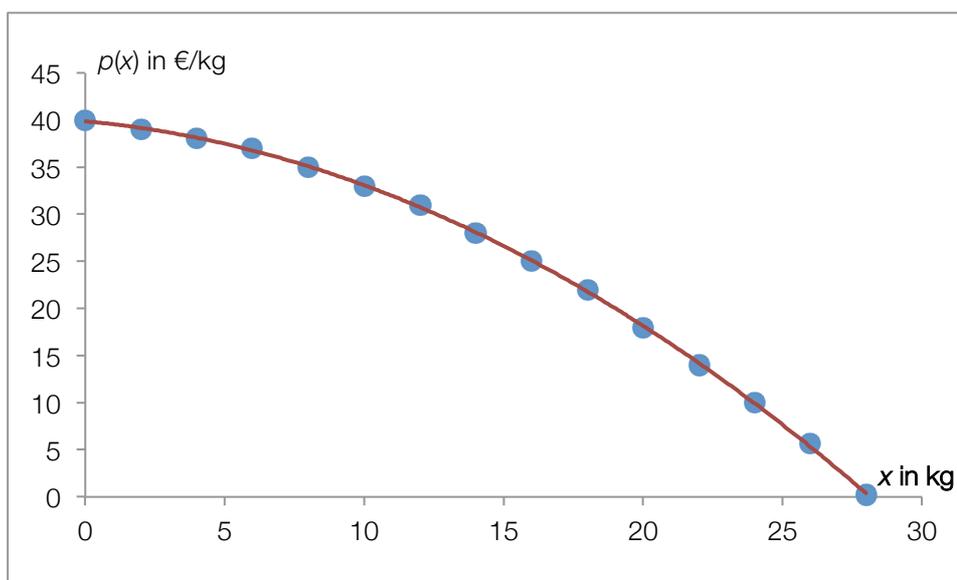
- Lesen Sie daraus das Betriebsoptimum und die minimalen Stückkosten ab.
- Erklären Sie, wie man diese aus der Gleichung der Gesamtkostenfunktion berechnet.
- Argumentieren Sie, welche Bedeutung die minimalen Stückkosten für die Festlegung des Verkaufspreises haben.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

- a) Funktionsgleichung mittels quadratischer Regression:



$$p(x) = -0,0406x^2 - 0,2729x + 39,8729$$

Die Abweichung der gegebenen Daten von der Regressionslinie ist sehr gering. Dies lässt vermuten, dass eine Modellierung mithilfe einer quadratischen Funktion zu diesen Daten passend ist.

Sinnvoller Definitionsbereich:

Untere Grenze des Definitionsbereichs: $x = 0$, der Verkaufspreis zu Beginn ist der höchste Preis.
 Obere Grenze: $x \approx 28$ kg, wäre die Sättigungsmenge: Es besteht keine Nachfrage nach dem Produkt mehr, man müsste den Preis auf 0 senken.

- b) Wenn der Absatz im 2. Monat um 1 kg steigt, dann nimmt der Preis pro Kilogramm etwas ab.

$$\Delta p(x) = p(x+1) - p(x) = -0,04(x+1)^2 - 0,2(x+1) + 40 - (-0,04x^2 - 0,2x + 40)$$

$$\Delta p(x) = -0,08x - 0,24$$

$$\Delta p(20) = -1,84$$

Der Preis pro Kilogramm nimmt um 1 € 84 Cent ab, wenn der Absatz von 20 auf 21 kg steigt.

- c) Das Betriebsoptimum beträgt ungefähr 8 kg, die minimalen Stückkosten belaufen sich auf ca. 35 €/kg.

Die Stückkostenfunktion erhält man, indem man die Gesamtkostenfunktion durch die Produktionsmenge x dividiert. Die minimalen Stückkosten kann man durch Nullsetzen der 1. Ableitung der Stückkostenfunktion \bar{K} berechnen. Aus dieser Gleichung erhält man den x -Wert des Minimums – das so genannte *Betriebsoptimum*.

Diese Menge wird in die Stückkostenfunktion eingesetzt und ergibt die minimalen Stückkosten.

Wenn man die Ware bei einem Preis verkauft, der den minimalen Stückkosten entspricht, dann arbeitet der Betrieb zwar gerade kostendeckend, aber ohne Gewinn. Die minimalen Stückkosten legen damit die so genannte *langfristige Preisuntergrenze* fest.

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 5 Stochastik
- b) 2 Algebra und Geometrie
- c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) —
- c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) C Interpretieren und Dokumentieren; D Argumentieren und Kommunizieren
- b) —
- c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) mittel
- c) mittel

Punkteanzahl:

- a) 3
- b) 2
- c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Reisekosten

Aufgabennummer: B_193

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Die Tarife bei Fahrten mit dem Zug hängen normalerweise von der zurückgelegten Fahrtstrecke ab. Die in dieser Aufgabe verwendeten Bezeichnungen sind:

x ... Fahrtstrecke in Kilometern (km)

$T(x)$... Tarif in Euro (€) für die Fahrtstrecke x

- a) In der nachstehenden Tabelle sind die 2012 gültigen Tarife für eine Fahrt mit der ÖBB (2. Klasse ohne Vorteilsticket) ausgehend vom Bahnhof Wien West zum angegebenen Endbahnhof angeführt.

Bahnhof	Fahrtstrecke x in km	Tarif in €
St. Pölten	60	11,00
Linz	190	31,20
Salzburg	317	47,50
Innsbruck	572	58,30
Landeck	647	58,70
Bregenz	770	64,30

- Bestimmen Sie mittels Regressionsrechnung eine Polynomfunktion 3. Grades, die die Abhängigkeit des Tarifs von der zu fahrenden Fahrtstrecke beschreibt.
- Stellen Sie die Funktion gemeinsam mit den angegebenen Werten in einem Diagramm dar und achten Sie dabei auf eine sinnvolle Skalierung der Achsen.

- b) Im Kurzstreckenbereich kann die Abhängigkeit des Tarifs von der zurückgelegten Fahrtstrecke mithilfe folgender Funktion beschrieben werden:

$$T(x) = 0,19x$$

- Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 0,19 im gegebenen Sachzusammenhang.

- c) Die folgende Funktion T gibt den Tarif in Abhängigkeit von der Fahrtstrecke x entlang einer anderen Bahnstrecke an:

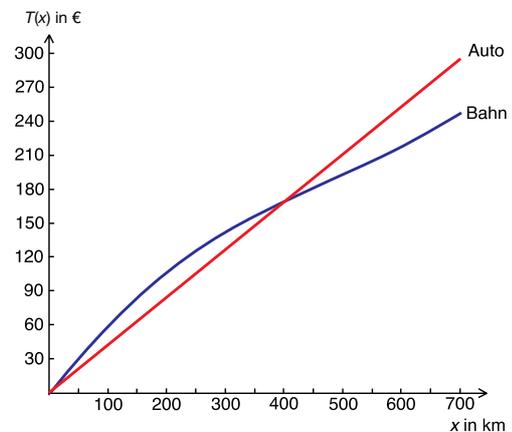
$$T(x) = 2 \cdot 10^{-7}x^3 - 3 \cdot 10^{-4}x^2 + 0,2305x - 0,8711$$

x ... Fahrtstrecke in km

$T(x)$... Tarif in € für die Fahrtstrecke x

- Ermitteln Sie mithilfe der Differenzialrechnung diejenige Fahrtstrecke, für die der Preiszuwachs am geringsten ist.
- Berechnen Sie den Preiszuwachs für diese Fahrtstrecke.

- d) Eine Firma schickt 3 Angestellte auf Dienstreise. Als Kostenersatz müssen den Angestellten entweder € 0,42 pro gefahrenem Kilometer für ein gemeinsames Auto oder jeweils der Bahntarif 2. Klasse ohne Vorzeilsticket rückerstattet werden. In der nebenstehenden Grafik sind die Bahnkosten für 3 Personen und das für den PKW zu erstattende Kilometergeld dargestellt.



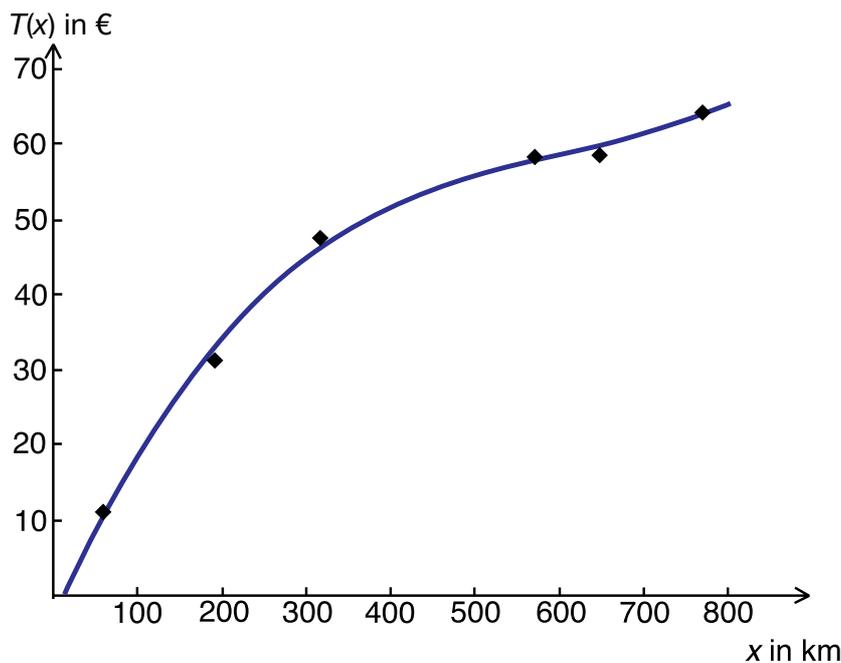
- Geben Sie an, wann die Firma Kilometergeld und wann sie Bahnkostensersatz leisten sollte, um ihre Kosten gering zu halten.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $T(x) = 2 \cdot 10^{-7}x^3 - 0,0004x^2 + 0,2557x - 3,5482$



b) $T(x) = 0,19x$

0,19 ist die Steigung der linearen Tariffunktion. Sie gibt den Tarif pro gefahrenem Kilometer an. Ein Kilometer kostet also € 0,19.

- c) Die Preissteigerung pro Kilometer entspricht der Steigung der Tangente an die Tariffunktion, die man mit der 1. Ableitung berechnen kann. Zur Berechnung der geringsten Preissteigerung muss die 2. Ableitung berechnet und gleich null gesetzt werden. Es wird also die x-Koordinate des Wendepunkts der Tariffunktion berechnet.

$$T(x) = 2 \cdot 10^{-7}x^3 - 3 \cdot 10^{-4}x^2 + 0,2305x - 0,8711$$

$$T'(x) = 6 \cdot 10^{-7}x^2 - 6 \cdot 10^{-4}x + 0,2305$$

$$T''(x) = 1,2 \cdot 10^{-6}x - 6 \cdot 10^{-4}$$

$$1,2 \cdot 10^{-6}x - 6 \cdot 10^{-4} = 0$$

$$1,2 \cdot 10^{-6}x = 6 \cdot 10^{-4}$$

$$x = 500 \text{ km}$$

Preiszuwachs an der Stelle $x = 500$:

$$T'(500) = 6 \cdot 10^{-7} \cdot 500^2 - 6 \cdot 10^{-4} \cdot 500 + 0,2305 = 0,0805$$

Der Preiszuwachs an dieser Stelle beträgt ungefähr € 0,08 pro km.

- d) Die Grafik zeigt, dass bis zu einer Strecke von ca. 400 km der Bahntarif höher liegt als das Kilometergeld. Die Firma hat bei Strecken bis zu 400 km geringere Kosten, wenn die 3 Angestellten gemeinsam mit dem Auto fahren. Für Strecken, die länger als 400 km sind, ist für die Firma der Bahnkostensersatz günstiger.

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 5 Stochastik
- b) 3 Funktionale Zusammenhänge
- c) 4 Analysis
- d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) —
- c) 1 Zahlen und Maße
- d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren
- b) C Interpretieren und Dokumentieren
- c) B Operieren und Technologieeinsatz
- d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) —
- c) —
- d) —

Schwierigkeitsgrad:

- a) leicht
- b) leicht
- c) schwer
- d) leicht

Punkteanzahl:

- a) 3
- b) 1
- c) 3
- d) 1

Thema: Verkehr

Quelle: <http://www.oebb.at> (Tarife und km-Angaben)

Rücklage

Aufgabennummer: B_125

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Die Eltern von Martin legen für ihn 5 Jahre vor Abschluss der höheren Schule für sein späteres Studium € 22.500 als Rücklage auf ein Sparkonto.

Lisa erhält von ihren Eltern ab demselben Zeitpunkt 5 Jahre lang € 375 monatlich vorschüssig auf ein Sparkonto, das mit dem gleichen Jahreszinssatz wie bei Martin verzinst wird.

Der Zinssatz bleibt während dieser 5 Jahre konstant, es finden keine weiteren Transaktionen auf den beiden Konten von Martin und Lisa statt. Es gibt keine Kontoführungsgebühr.

a) – Erklären Sie, mit welchem Rechenansatz man aus dem Jahreszinssatz den äquivalenten Monatszinssatz i_{12} anhand der Zinseszinsformel herleiten kann.
(Die Kapitalertragsteuer ist bei dieser Berechnung nicht zu berücksichtigen.)

b) Lisa meint, dass zwar 60-mal € 375 wie bei Martin ebenfalls € 22.500 ergeben, aber die vorschüssige monatliche Ratenzahlung bei Verzinsung mit 0,2 % p. m. einem geringeren Barwert entspricht.

– Argumentieren Sie, weshalb Lisas Aussage stimmt.

– Berechnen Sie die Differenz zwischen dem Barwert der Ratenzahlung bei Lisa und dem Geldbetrag, den Martin von seinen Eltern erhält.

Runden Sie das Ergebnis auf Euro.

(Die Kapitalertragsteuer ist im gegebenen Zinssatz bereits berücksichtigt.)

c) Für Martin wird das Geld mit einem Zinssatz von 2,5 % p. a. angelegt.

Lisa möchte statt € 375 pro Monat 5 nachschüssige Jahresraten in Höhe von € 4.500 erhalten. Sie wünscht sich, dass der Zinssatz so hoch gewählt wird, dass sie nach 5 Jahren einen gleich hohen Betrag wie Martin bekommt.

– Berechnen Sie, wie hoch der Jahreszinssatz für Lisa unter dieser Voraussetzung sein müsste. Berücksichtigen Sie die Kapitalertragsteuer von 25 %.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

- a) Der äquivalente Monatszinssatz führt bei monatlicher Verzinsung innerhalb eines Jahres zum gleichen Ergebnis wie eine einmalige jährliche Verzinsung.

Wenn man ein Kapital K_0 ein Jahr lang mit i verzinst, so ergibt dies einen Endwert von:

$$E = K_0 \cdot (1 + i)$$

Wenn man das gleiche Anfangskapital monatlich mit i_{12} verzinst, lautet die Zinseszinsformel:

$$E = K_0 \cdot (1 + i_{12})^{12}$$

Da beide Endwerte gleich sein sollen, gilt:

$$1 + i = (1 + i_{12})^{12}$$

Aus diesem Ansatz lässt sich der äquivalente Monatszinssatz i_{12} berechnen.

- b) Martin bekommt bar € 22.500.

Lisa würde in Zukunft monatlich € 375 bekommen, 60 Monate lang.

Um den Barwert dieser Ratenzahlung zu erhalten, müssen alle einzelnen 60 Raten auf den Anfangszeitpunkt abgezinst werden. Man erhält eine Folge von Beträgen:

{375; 374,25; 373,5; ...}

Die Summe dieser Beträge ergibt den Barwert und ist kleiner als 375 mal 60.

Martin: 22 500

$$\text{Lisa: } 375 \cdot \frac{1,002^{60} - 1}{0,002} \cdot \frac{1}{1,002^{59}} = 21\,224,8... \approx 21\,225$$

Die Differenz beträgt rund € 1.275.

- c) Jahreszinssatz bei Martin nach Berücksichtigung der KEST:

$$2,5 \% \cdot 0,75 = 1,875 \%$$

$$22\,500 \cdot 1,01875^5 = 4\,500 \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1}$$

Lösung mittels Technologieinsatz: $q = 1,046457...$

Bei einem Jahreszinssatz von rund 4,65 %, in dem bereits die KEST berücksichtigt ist, würde Lisa nach 5 Jahren den gleichen Betrag wie Martin bekommen.

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) 3 Funktionale Zusammenhänge
- c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren
- b) D Argumentieren und Kommunizieren
- c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

- a) D Argumentieren und Kommunizieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) —

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) mittel
- c) mittel

Punkteanzahl:

- a) 4
- b) 3
- c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Segelboot

Aufgabennummer: B_117

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Ein Segelboot wird zum Kauf angeboten. In den angegebenen Zinssätzen sind die Kapitalertragsteuer und allfällige Gebühren berücksichtigt.

a) Der Verkäufer schlägt folgende Zahlungsvariante vor:

Anzahlung in Höhe von € 6.000 und 5 Jahre lang (ab dem Kaufzeitpunkt gerechnet) nachschüssige Jahresraten in Höhe von jeweils € 1.200 bei einem jährlichen Zinssatz von i

- Stellen Sie diese Zahlungsvariante mithilfe einer Zeitlinie grafisch dar.
- Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Barwerts B des Segelboots.

$B =$ _____

b) Der Verkäufer ändert die Konditionen: Er veranschlagt den Barwert des Bootes mit € 10.800 und verlangt eine Anzahlung in Höhe von € 6.000 sowie 3 nachschüssige Jahresraten in Höhe von jeweils € 1.200. Der Rest soll ab dem 4. Jahr durch 4 nachschüssige Jahresraten der Höhe R beglichen werden.

- Berechnen Sie die Ratenhöhe R , wenn der Zinssatz 8 % p. a. beträgt.

c) Um das Boot neu lackieren zu lassen, borgt sich der Käufer € 5.000, die er in Form von nachschüssigen Quartalsraten von jeweils € 300 bei einem Zinssatz von 6 % p. a. zurückzahlt.

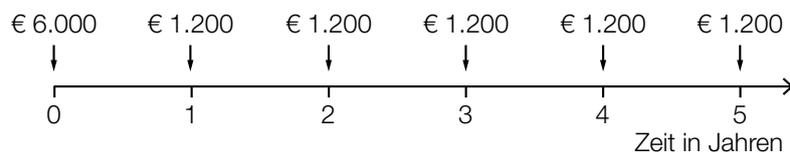
- Berechnen Sie, wie viele volle Quartalsraten zu zahlen sind.
- Berechnen Sie, welcher Restbetrag 1 Quartal nach der letzten Vollrate anfällt.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Die Zeitlinie ist zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Zeitlinie:



$$B = 6000 + 1200 \cdot \frac{(1+i)^5 - 1}{i} \cdot \frac{1}{(1+i)^5}$$

b) Ansatz mit Berechnung des Endwerts nach 7 Jahren:

$$6000 \cdot 1,08^7 + 1200 \cdot \frac{1,08^3 - 1}{0,08} \cdot 1,08^4 + R \cdot \frac{1,08^4 - 1}{0,08} = 10800 \cdot 1,08^7 \Rightarrow R = 649,412$$

Die Ratenhöhe beträgt € 649,41.

c) € 5.000 ist der Barwert der nachschüssigen Quartalsrate.

$$q_4 = \sqrt[4]{1,06}$$

$$5000 = 300 \cdot \frac{q_4^n - 1}{q_4 - 1} \cdot \frac{1}{q_4^n}$$

Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz: $n = 19,2\dots$

Es sind 19 volle Quartalsraten zu bezahlen.

Restzahlung am Ende des 20. Quartals:

$$\text{Rest} = 5000 \cdot q_4^{20} - 300 \cdot \frac{q_4^{19} - 1}{q_4 - 1} \cdot q_4 = 76,262\dots$$

Ein Quartal nach der letzten Einzahlung ist noch ein Restbetrag in Höhe von € 76,26 zu bezahlen.

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) 3 Funktionale Zusammenhänge
- c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

- a) —
- b) A Modellieren und Transferieren
- c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) schwer
- c) mittel

Punkteanzahl:

- a) 2
- b) 3
- c) 4

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Sparkonto

Aufgabennummer: B_120

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

a) Karin zahlt 18 Jahre lang auf ein Sparkonto jährlich nachschüssig einen Betrag in Höhe von € 500 ein.

Der angesparte Betrag kann bei einem Jahreszinssatz von 1,5 % und mit Berücksichtigung der KEST mithilfe der folgenden Funktion beschrieben werden:

$$K = 500 \cdot \frac{1,01125^t - 1}{0,01125}$$

K ... Kapital in Euro (€)

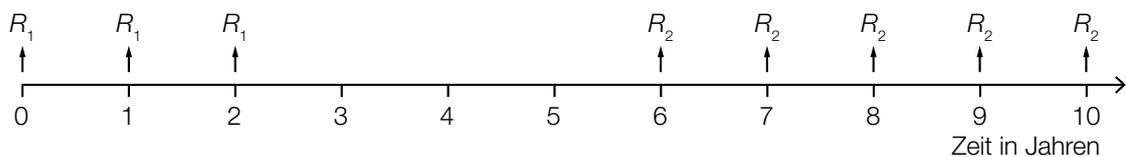
t ... Zeit in Jahren

- Erklären Sie, um welche finanzmathematische Formel es sich handelt.
- Erklären Sie, wie der Zinssatz von 1,5 % in diese Formel einfließt.

b) Karin hat einen Betrag in Höhe von € 10.000 angespart. Er wird mit einem Zinssatz von 1,2 % p. a. weiter verzinst (Nebengebühren und Steuern sind im angegebenen Zinssatz berücksichtigt). Karin möchte davon monatlich nachschüssig je € 200 abheben.

- Berechnen Sie, wie oft Karin genau diesen Betrag abheben kann.
- Ermitteln Sie, welcher Restbetrag unmittelbar nach der letzten Abhebung auf dem Konto verbleibt.

c) Karin tätigt die in der nachstehenden Zeitlinie dargestellten Abhebungen.



- Beschreiben Sie den dargestellten Sachverhalt in Worten.
- Erstellen Sie eine Formel, mit der der Wert B aller Behebungen zum Zeitpunkt der 1. vorgenommenen Behebung berechnet werden kann. Gehen Sie dabei von einem Jahreszinssatz i aus.

$B =$ _____

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

- a) Der Endwert einer nachschüssigen Jahresrente wird mithilfe folgender Formel berechnet:

$$E = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

R ... jährliche Rate

i ... Jahreszinssatz

q ... Aufzinsungsfaktor, $q = 1 + i$

n ... Anzahl der Raten

Im Falle der vorliegenden Formel gilt:

$$E = K,$$

$$n = t,$$

$$R = € 500,$$

$$q = 1 + i = 1,01125,$$

wobei $i = 1,125\%$ beträgt, das entspricht dem Jahreszinssatz von $1,5\%$, von dem 25% KESt abgezogen wurden.

- b) Berechnung der Anzahl n der monatlichen nachschüssigen Auszahlungen:

$$q_{12} = \sqrt[12]{1,012}$$

$$200 \cdot \frac{q_{12}^n - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^n} = 10000$$

Lösung mittels Technologieinsatz:

$$n = 51,3\dots$$

Karin kann genau 51-mal € 200 abheben.

$$\text{Restbetrag} = 10000 \cdot q_{12}^{51} - 200 \cdot \frac{q_{12}^{51} - 1}{q_{12} - 1} = 62,257\dots$$

Der Restbetrag beträgt rund € 62,26.

- c) Karin hebt zunächst jeweils zu Beginn des Jahres 3-mal die Rate R_1 ab. Im Jahr 4 und im Jahr 5 wird nichts abgehoben.

Ab dem 6. Jahr hebt Karin 5-mal jeweils am Ende des Jahres die Rate R_2 ab.

$$B = R_1 \cdot \frac{(1+i)^3 - 1}{i} \cdot \frac{1}{(1+i)^2} + R_2 \cdot \frac{(1+i)^5 - 1}{i} \cdot \frac{1}{(1+i)^{10}}$$

Auch andere Formelentwicklungen sind möglich!

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) 3 Funktionale Zusammenhänge
- c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) D Argumentieren und Kommunizieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) A Modellieren und Transferieren
- c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) mittel
- c) schwer

Punkteanzahl:

- a) 2
- b) 4
- c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Stallbaufinanzierung

Aufgabennummer: B_170

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Ein Landwirt möchte einen größeren Stall bauen. Der Kostenvoranschlag beläuft sich auf € 375.000.

In den angegebenen Zinssätzen sind die Kapitalertragsteuer bzw. anfallende Gebühren berücksichtigt.

- a) Er spart seit 14 Jahren jährlich vorschüssig € 2.800, die zu 2,3 % p. a. verzinst werden. Zusätzlich hat er vor 22 Jahren € 65.000 auf ein Sparbuch gelegt, das mit 1,8 % p. a. verzinst wird.

– Berechnen Sie, wie viel Geld er für den Stallbau zusätzlich zu seinem vorhandenen Kapital aufbringen muss.

- b) Der Landwirt nimmt einen Kredit zur Begleichung der Gesamtkosten von € 375.000 auf. Zur Rückzahlung werden nachschüssige Jahresraten der Höhe R bei konstantem Zinssatz über einen Zeitraum von 30 Jahren vereinbart.

Er kann die 6., die 7. und die 8. Rate nicht bezahlen. Der Zahlungsausfall wird gleichmäßig auf die Raten der restlichen Laufzeit aufgeteilt. Die neue Ratenhöhe ist R_{neu} .

– Erstellen Sie eine Zeitlinie zur Beschreibung des Zahlungsverlaufs.

Die Höhe der ursprünglichen Rate beträgt gerundet $R = € 23.841$. Der Zinssatz ist 4,8 % p. a.

– Berechnen Sie die neue Ratenhöhe R_{neu} . (Runden Sie das Ergebnis auf ganze Euro.)

- c) Die Bank bietet zur Rückzahlung des Kredits von € 375.000 folgende Möglichkeit an: 5 Jahre nach Auszahlung des Kreditbetrags wird einmalig eine Zahlung der Höhe x entrichtet. Der Rest wird durch eine 10 Jahre nach Auszahlung des Kreditbetrags beginnende Rente mit vorschüssigen Jahresraten der Höhe R über 20 Jahre abgedeckt.

Es ist bei allen Zahlungen von einem Jahreszinssatz i auszugehen.

– Modellieren Sie eine Formel zur Berechnung des Einmalbetrags x .

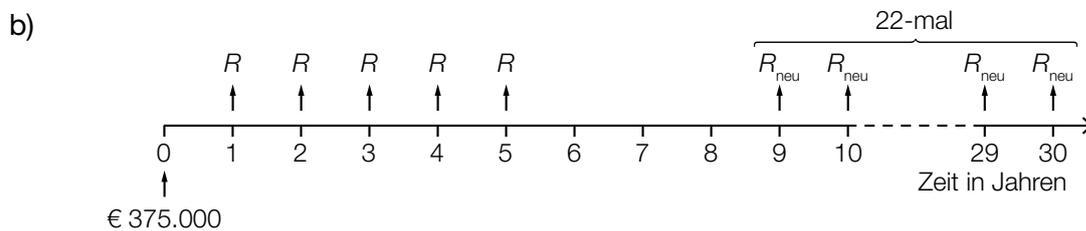
Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

$$\begin{aligned} \text{a) } & 2800 \cdot 1,023 \cdot \frac{1,023^{14} - 1}{0,023} \approx 46684,89 \\ & 65000 \cdot 1,018^{22} \approx 96241,96 \\ & 375000 - 46684,89 - 96241,96 = 232073,15 \end{aligned}$$

Der Landwirt benötigt noch € 232.073,15.



$$375000 = 23841 \cdot \frac{1,048^5 - 1}{0,048} \cdot \frac{1}{1,048^5} + R_{\text{neu}} \cdot \frac{1,048^{22} - 1}{0,048} \cdot \frac{1}{1,048^{30}} \Rightarrow R_{\text{neu}} = 29436,1\dots$$

Die neuen Raten betragen auf ganze Euro gerundet € 29.436.

c) Ansatzformel:

$$q = 1 + i$$

$$375000 = \frac{x}{q^5} + R \cdot \frac{q^{20} - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^{19}} \cdot \frac{1}{q^{10}}$$

Andere richtige Formeln sind ebenfalls zu akzeptieren.

Die Berechnungsformel für x kann man unter Umständen auch direkt – ohne einen Ansatz – angeben. Ist die Formel korrekt, so gilt das auch als richtig angesetzt.

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) 3 Funktionale Zusammenhänge
- c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) A Modellieren und Transferieren
- c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) mittel
- c) mittel

Punkteanzahl:

- a) 3
- b) 3
- c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Tagestemperatur

Aufgabennummer: B_252

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

- a) Die nachstehend angeführten 3 Messwerte wurden an einem Vormittag aufgezeichnet und sollen mithilfe einer abschnittsweise definierten linearen Funktion T in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.

t in h	T in °C
6	8
9	10
12	16

t ... Zeit nach Mitternacht in Stunden (h)
 $T(t)$... Temperatur nach t Stunden in Grad Celsius (°C)

Es wird angenommen, dass in den Intervallen $[6; 9]$ und $[9; 12]$ die Temperatur jeweils linear zunimmt.

- Stellen Sie den Temperaturverlauf im Intervall $[6; 12]$ grafisch dar.
- Stellen Sie die Funktion T abhängig von der Zeit t im Intervall $[6; 12]$ auf.
- Berechnen Sie mithilfe dieser Funktion T die Temperatur um 11:30 Uhr.

- b) An einem Tag im Oktober hat man einen Temperaturverlauf gemessen, der durch eine Polynomfunktion 3. Grades mit $f(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$ angenähert werden kann.

t ... Zeit nach Mitternacht in Stunden
 $f(t)$... Temperatur zum Zeitpunkt t in °C

t	2	5	8	11	14	17	20	23
$f(t)$	5,4	4,3	8,3	12,2	15,3	14	9,1	7,2

- Erstellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine zu den angegebenen Werten passende Polynomfunktion 3. Grades. (Runden Sie dabei die Koeffizienten auf 4 Nachkommastellen.)
- Berechnen Sie den Differenzenquotient dieser Polynomfunktion für das Intervall $[6; 12]$.
- Beschreiben Sie, was dieser Differenzenquotient für das Intervall im Sachzusammenhang aussagt.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Ansatz über $T(t) = k \cdot t + d$

$$k_1 = \frac{10-8}{9-6} = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{Punkt einsetzen: } 8 = \frac{2}{3} \cdot 6 + d_1$$

$$\Rightarrow d_1 = 4$$

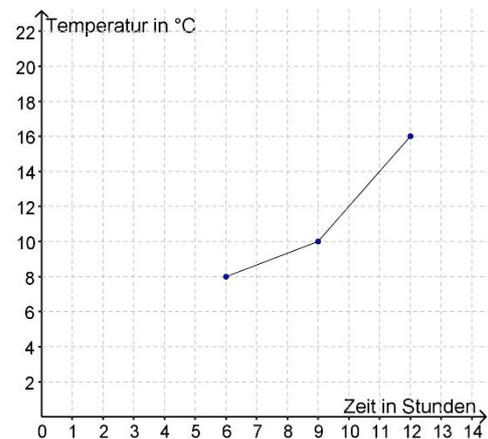
$$k_2 = \frac{16-10}{12-9} = 2 \Rightarrow \text{Punkt einsetzen: } 10 = 2 \cdot 9 + d_2$$

$$\Rightarrow d_2 = -8$$

$$T(t) = \begin{cases} \frac{2}{3}t + 4 & \text{für } t \in [6; 9] \\ 2t - 8 & \text{für } t \in [9; 12] \end{cases}$$

$$T(11,5) = 2 \cdot 11,5 - 8 = 15$$

Um 11:30 Uhr ergibt das Modell 15 °C.



b) Mittels Technologieeinsatz kommt man zur folgenden Gleichung:

$$f(t) = -0,0057 \cdot t^3 + 0,1446 \cdot t^2 - 0,2598 \cdot t + 4,4186$$

Der Differenzenquotient wird gebildet mit: $\frac{f(12) - f(6)}{12 - 6} = 0,9066 \approx 0,91$

Der Differenzenquotient sagt aus, dass die Temperatur im Intervall [6; 12] durchschnittlich um rund 1 °C pro Stunde zunimmt.

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

- a) 2 Algebra und Geometrie
- b) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren
- b) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) C Interpretieren und Dokumentieren, B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

- a) schwer
- b) mittel

Punkteanzahl:

- a) 3
- b) 3

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Teemischungen

Aufgabennummer: B_203

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

In einer Apotheke werden nach eigenem Rezept Teemischungen hergestellt und verkauft. Die nachstehende Tabelle gibt an, wie viel Gramm von einigen Zutaten jeweils in einer Packung Teemischung enthalten sind.

	Erkältungstee	Hustentee	Beruhigungstee	Blasentee	Gallentee
Süßholzwurzel	5	28	4	5	0
Fenchel	5	23	5	5	5
Ringelblumenblüten	0	0	4	5	5

- a) – Erstellen Sie einen passenden Gozinto-Graphen, der die Verflechtung zwischen Zutaten und Teemischungen wiedergibt.
- b) – Interpretieren Sie die Bedeutung der folgenden Berechnung:

$$\begin{pmatrix} 5 & 28 & 4 & 5 & 0 \\ 5 & 23 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 420 \\ 430 \\ 140 \end{pmatrix}$$

- Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 430 in der Ergebnismatrix.
- c) Ein Angestellter der Apotheke hat 390 g Süßholzwurzel, 360 g Fenchel und 110 g Ringelblumenblüten zu Hustentee, Beruhigungstee und Blasentee verarbeitet.
- Erstellen Sie ein geeignetes Modell zur Berechnung, wie viele Packungen der einzelnen Teesorten er jeweils hergestellt hat.
 - Berechnen Sie die Anzahl der hergestellten Packungen.
- d) Die Zutaten Süßholzwurzel, Fenchel und Ringelblumenblüten kann die Apotheke bei 3 verschiedenen Lieferanten beziehen. Die folgende Tabelle gibt die Preise in € pro 100 g an:

	Lieferant A	Lieferant B	Lieferant C
Süßholzwurzel	€ 3,35	€ 3,85	€ 3,30
Fenchel	€ 3,13	€ 3,00	€ 3,30
Ringelblumenblüten	€ 3,85	€ 3,90	€ 3,60

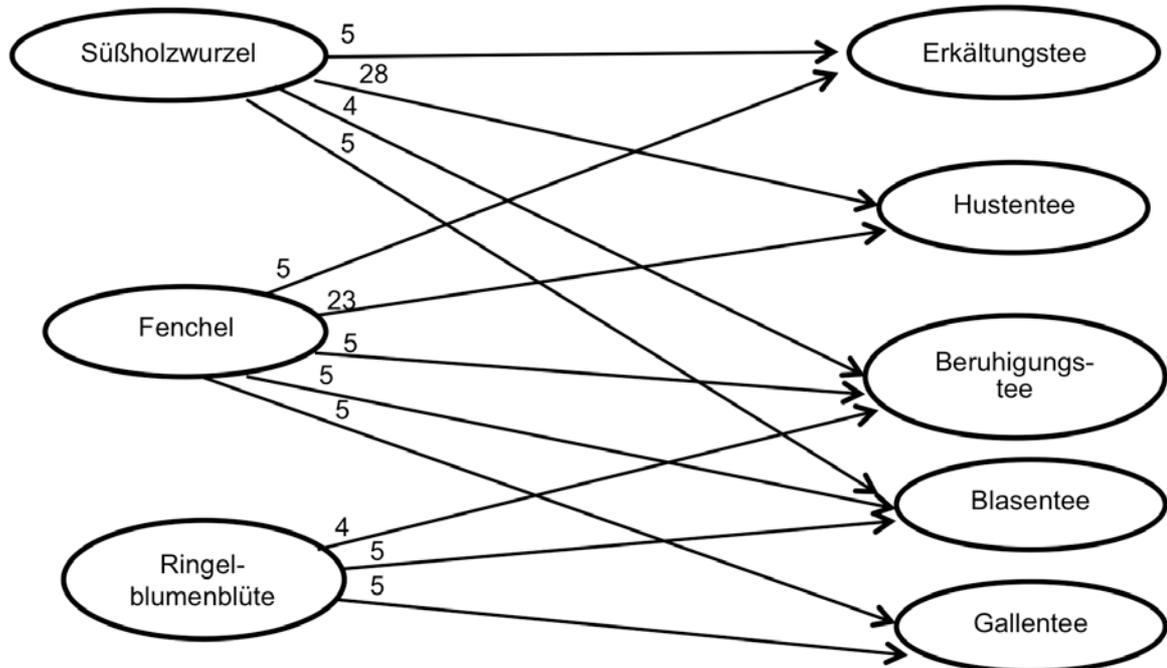
- Die Apotheke möchte in jedem Fall alle 3 Produkte beim gleichen Lieferanten beziehen. Es werden 1 600 g Süßholzwurzel, 1 800 g Fenchel und 500 g Ringelblumenblüten benötigt.
- Berechnen Sie die für die Apotheke entstehenden Kosten bei allen 3 Lieferanten.
 - Beurteilen Sie, welcher der Lieferanten für die Apotheke insgesamt am günstigsten ist.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)



- b) Die Formel beschreibt, wie viel Gramm Süßholzwurzel, Fenchel und Ringelblumenblüten man zur Herstellung von jeweils 10 Packungen der angeführten Teemischungen braucht. Die Zahl 430 in der Ergebnismatrix ist die für 10 Packungen benötigte Menge Fenchel in Gramm.
- c) a , b und c sind die Anzahl der Packungen der hergestellten Teemischungen Hustentee, Beruhigungstee und Blasentee.

$$28a + 4b + 5c = 390$$

$$23a + 5b + 5c = 360$$

$$0a + 4b + 5c = 110$$

Lösung des Gleichungssystems mittels Technologieinsatz: $a = 10$; $b = 20$; $c = 6$

Der Angestellte hat 10 Packungen Hustentee, 20 Packungen Beruhigungstee und 6 Packungen Blasentee hergestellt.

Alternativer Lösungsweg: mit Berechnung der inversen Matrix

$$\begin{pmatrix} 28 & 4 & 5 \\ 23 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 390 \\ 360 \\ 110 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 4 & 5 \\ 23 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 390 \\ 360 \\ 110 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,035\dots & 0 & -0,035\dots \\ -0,821\dots & 1 & -0,178\dots \\ 0,657\dots & -0,8 & 0,342\dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 390 \\ 360 \\ 110 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix}$$

d) $(16 \quad 18 \quad 5) \cdot \begin{pmatrix} 3,35 & 3,85 & 3,3 \\ 3,13 & 3 & 3,3 \\ 3,85 & 3,9 & 3,6 \end{pmatrix} = (129,19 \quad 135,10 \quad 130,20)$

Der Lieferant A ist mit € 129,19 für die Apotheke am günstigsten.

Eine richtige Berechnung ohne Verwendung von Matrizen ist auch als richtig zu werten.

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 2 Algebra und Geometrie
- b) 2 Algebra und Geometrie
- c) 2 Algebra und Geometrie
- d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —
- d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren
- b) C Interpretieren und Dokumentieren
- c) A Modellieren und Transferieren
- d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

- a) —
- b) —
- c) B Operieren und Technologieeinsatz
- d) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

- a) leicht
- b) mittel
- c) mittel
- d) leicht

Punkteanzahl:

- a) 1
- b) 2
- c) 2
- d) 2

Thema: Alltag

Quelle: <http://www.meine-teemischung.de/tee-mischen>

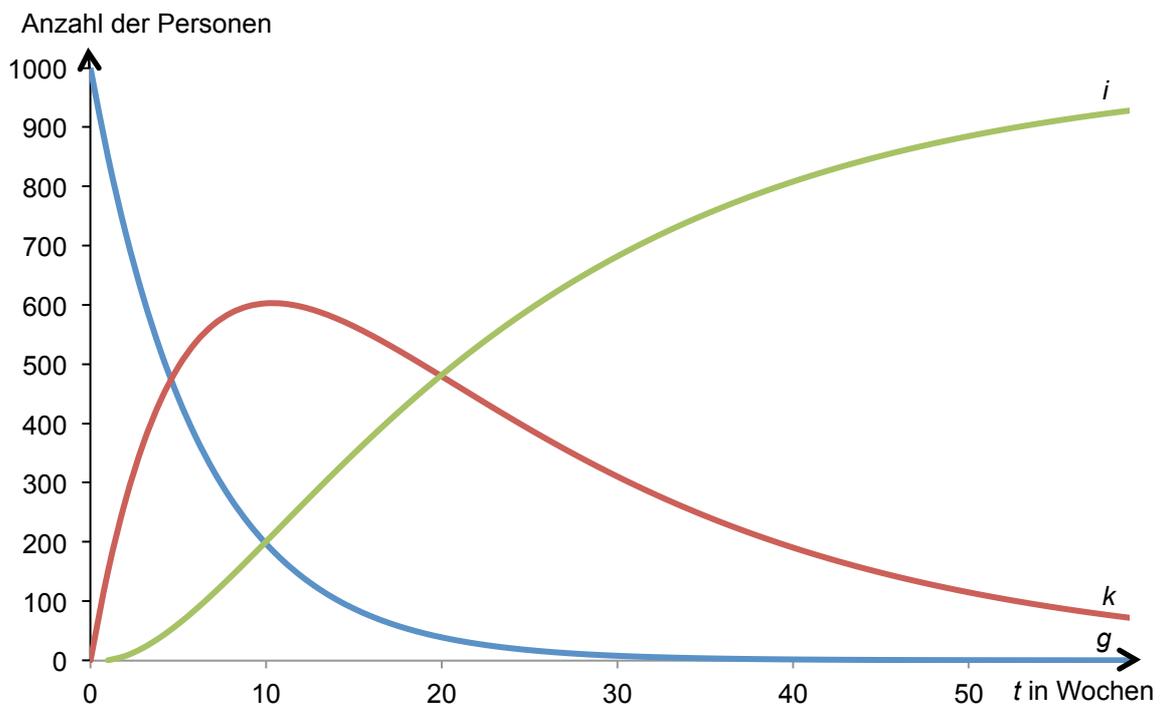
Viruserkrankung

Aufgabennummer: B_198

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

In einem kleinen Ort verbreitet sich eine neuartige Virusinfektion.

- a) Ein Arzt beobachtet, dass einmal erkrankte Personen nach Abklingen der Symptome gegen das Virus immun sind. In der folgenden Abbildung ist der zeitliche Verlauf der Anzahl der kranken (k), der noch gesunden (g) und der bereits immunen (i) Personen dargestellt:



- Entnehmen Sie der Grafik, wann ca. gleich viele Personen bereits immun bzw. noch gesund sind.
- Lesen Sie ab, wie viele Personen zu diesem Zeitpunkt krank sind.

- b) Ein neues Medikament soll bei der Bekämpfung des Virus helfen. Leider hat es auch Nebenwirkungen. 2 % der erkrankten Personen leiden an Kopfschmerzen, 1 % an Schwindelanfällen. 0,2 % weisen beide Symptome auf. In der folgenden Rechnung wurde die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der Nebenwirkungen auftritt, ermittelt:

$$P(\text{„mindestens 1 Nebenwirkung“}) = 0,02 + 0,01 = 0,03$$

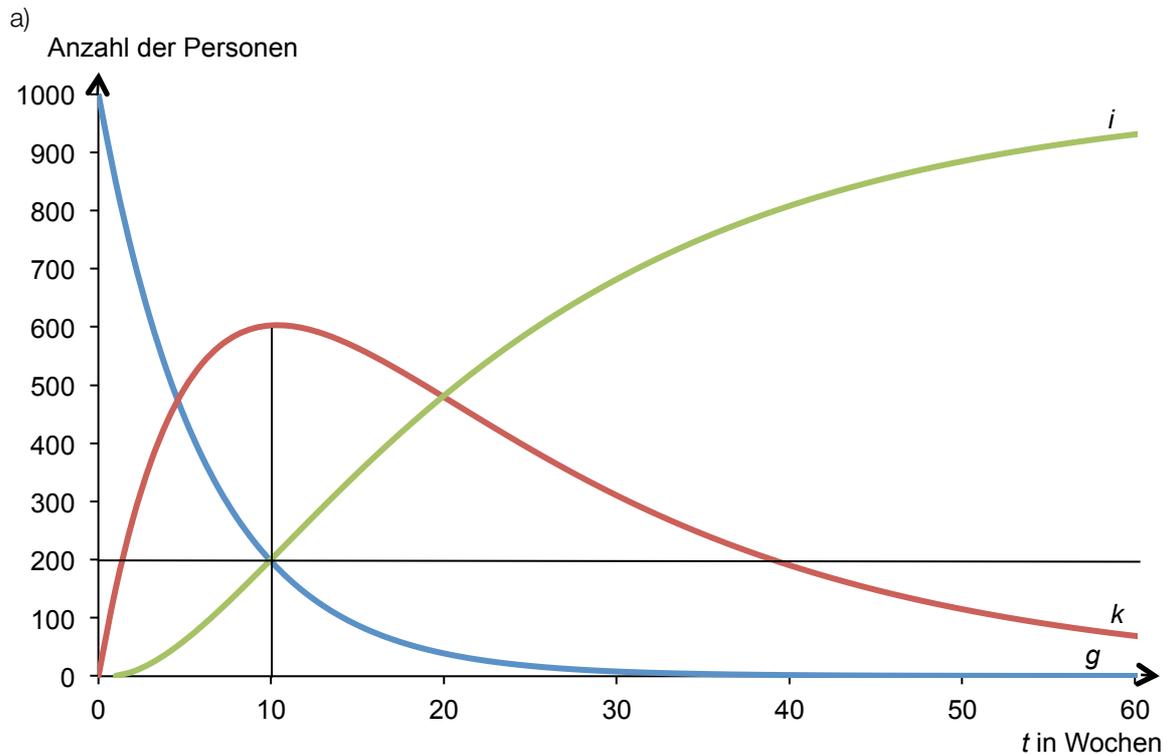
- Erklären Sie, welcher Fehler dabei gemacht wurde.
- Stellen Sie die Berechnung richtig.

- c) Bei einer Gesundenuntersuchung wird ein Virustest durchgeführt. Damit können 99 % der Virusträger/innen erkannt werden, noch bevor die Krankheit ausbricht. 10 % der Untersuchten sind tatsächlich Virusträger/innen. Leider zeigt der Test auch bei 2 % der gesunden Personen eine Infektion an.
- Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person gesund ist, unter der Voraussetzung, dass eine Virusinfektion diagnostiziert wurde.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg



Nach ca. 10 Wochen gibt es gleich viel noch gesunde und bereits immune Personen.
Zu diesem Zeitpunkt sind ca. 600 Personen krank.

Eine angemessene Ungenauigkeit beim Ablesen des Wertes wird toleriert.

- b) In der Formel wurde nicht berücksichtigt, dass es auch erkrankte Personen gibt, bei denen beide Nebenwirkungen gleichzeitig eintreten. Die richtige Formel lautet:

$$P(\text{„mindestens 1 Nebenwirkung“}) = P(\text{„Kopfschmerzen“}) + P(\text{„Schwindelanfälle“}) - P(\text{„beide Nebenwirkungen“}) = 0,02 + 0,01 - 0,002 = 0,03 - 0,002 = 0,028$$

Auch andere Herleitungen der Formel sind möglich.

c)
$$P(\text{„gesund | positiver Test“}) = \frac{P(\text{„gesund und positiver Test“})}{P(\text{„positiver Test“})} = \frac{0,9 \cdot 0,02}{0,9 \cdot 0,02 + 0,1 \cdot 0,99} = 0,1538$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 15,4 %.

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) 5 Stochastik
- c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) C Interpretieren und Dokumentieren
- b) D Argumentieren und Kommunizieren
- c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) —
- b) A Modellieren und Transferieren
- c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

- a) leicht
- b) mittel
- c) schwer

Punkteanzahl:

- a) 2
- b) 2
- c) 2

Thema: Medizin

Quellen: —

Wohnungsrenovierung

Aufgabennummer: B_139

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Im Zuge einer Wohnungsrenovierung benötigt Thomas einen Kredit in Höhe von € 30.000.

a) Seine Bank bietet ihm einen Kredit mit einer Laufzeit von 10 Jahren, der bei einem Quartalszinssatz von 1 % p. q. durch nachschüssige Monatsraten getilgt werden soll.

- Ermitteln Sie den äquivalenten Monatszinssatz.
- Erstellen Sie eine Gleichung, mit der die Ratenhöhe berechnet werden kann.
- Berechnen Sie die Ratenhöhe.

b) Thomas holt sich für diesen Kredit ein weiteres Angebot von einer anderen Bank. Diese verlangt eine Bearbeitungsgebühr von 2 % vom Kreditbetrag, die bei der Auszahlung einbehalten wird. Die Rückzahlung des Kredits erfolgt in 12 Jahren durch nachschüssige Quartalsraten in Höhe von je € 800.

- Veranschaulichen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse.
- Berechnen Sie den effektiven Jahreszinssatz.

c) Das Angebot einer dritten Bank ist in folgendem Tilgungsplan dargestellt:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	0	0	0	€ 30.000,00
1	€ 1.350,00	€ 491,75	€ 1.841,75	€ 29.508,25
2	€ 1.327,88	€ 513,87	€ 1.841,75	€ 28.994,38

- Erklären Sie die Begriffe und den Zusammenhang von Zinsanteil und Tilgungsanteil.
- Berechnen Sie den Jahreszinssatz, der dem Tilgungsplan zugrunde liegt.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

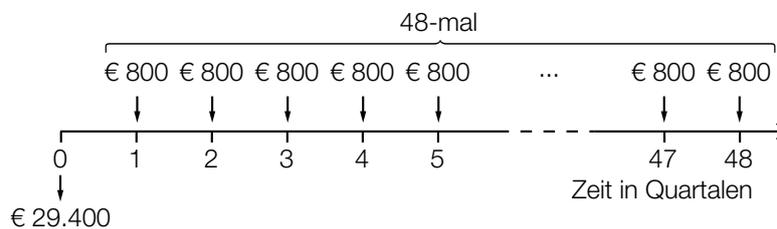
- a) $i_{12} = \sqrt[12]{1,01^4} - 1 = \sqrt[3]{1,01} - 1 = 0,00332\dots$
 Der äquivalente Monatszinssatz beträgt rund 0,33 %.

$$30\,000 = R \cdot \frac{q_{12}^{120} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{120}} \quad \text{mit } q_{12} = \sqrt[3]{1,01}$$

$$R = 303,546\dots$$

Die Ratenhöhe beträgt € 303,55.

- b)



$$30\,000 - 600 = 800 \cdot \frac{q_4^{48} - 1}{q_4 - 1} \cdot \frac{1}{q_4^{48}}$$

$$q_4 = 1,01147\dots$$

$$i_{\text{eff}} = 1,01147\dots^4 - 1 = 0,04669\dots$$

Der effektive Jahreszinssatz des Angebots beträgt rund 4,67 % p. a.

- c) Zusammenhang:

Den **Zinsanteil** einer Periode berechnet man durch Multiplikation der Restschuld der vorangegangenen Periode mit dem angegebenen Zinssatz.

Der **Tilgungsanteil** ist derjenige Teil der Annuität, der zur Tilgung der Schuld beiträgt. (Zinsanteil und Tilgungsanteil ergeben in Summe die Annuität.)

$$\text{Berechnung des Zinssatzes: } i = \frac{1\,350}{30\,000} = 0,045 = 4,5 \%$$

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) 3 Funktionale Zusammenhänge
- c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren
- b) A Modellieren und Transferieren
- c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) mittel
- c) mittel

Punkteanzahl:

- a) 3
- b) 3
- c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Zeitschrift

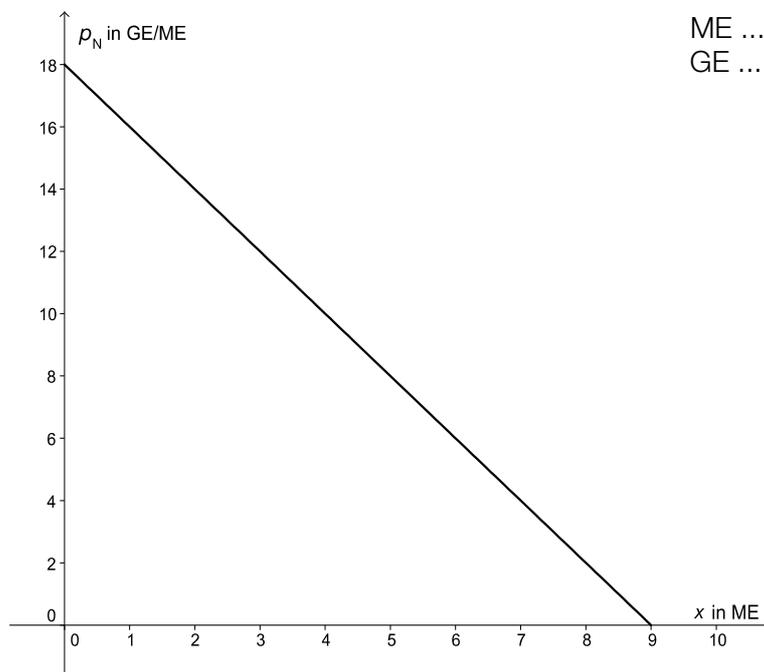
Aufgabennummer: B_276

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Preisfunktion der Nachfrage p_N für eine Sonderausgabe einer Zeitschrift dargestellt.



- a) Der Preis der Sonderausgabe wird von 14 GE/ME auf 12 GE/ME gesenkt.
- Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung die entsprechenden Verkaufsmengen.
 - Berechnen Sie, um wie viele Geldeinheiten sich der zu erwartende Verkaufserlös verändert.
- b) – Stellen Sie die Funktionsgleichung der oben dargestellten Preisfunktion der Nachfrage p_N auf.

Für die Preisfunktion des Angebots p_A gilt:

$$p_A(x) = 1 + 4,5 \sqrt{x}$$

x ... angebotene Menge in ME

$p_A(x)$... Angebotspreis in GE/ME

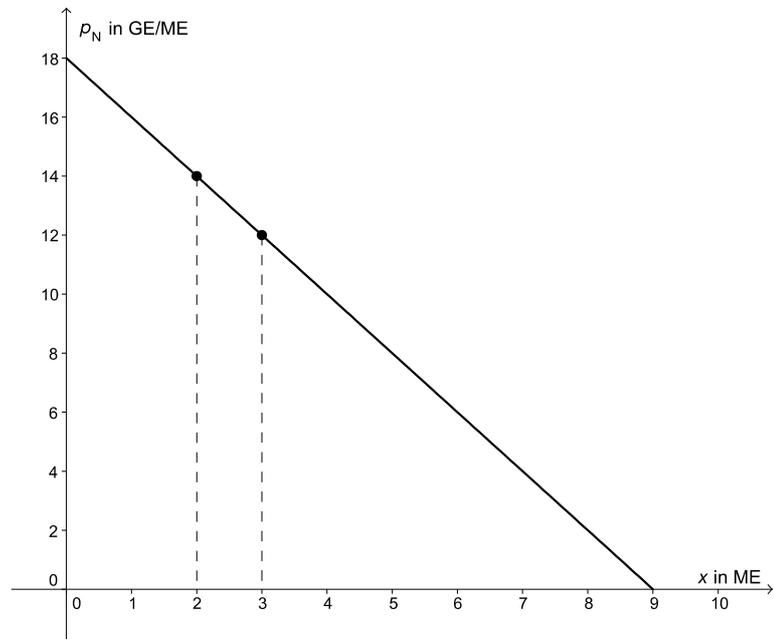
- Berechnen Sie den zugehörigen Gleichgewichtspreis.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Bei einem Preis von 14 GE/ME können 2 ME verkauft werden. Der Erlös beträgt 28 GE.
 Bei einem Preis von 12 GE/ME können 3 ME verkauft werden. Der Erlös beträgt 36 GE.
 Die Preisminderung führt zu einer Erlössteigerung um 8 GE.

b) Aus der Grafik kann man ablesen: $p_N(x) = -2x + 18$.

Im Marktgleichgewicht gilt: $p_A(x) = p_N(x)$.

$$1 + 4,5 \sqrt{x} = 18 - 2x$$

Mithilfe von Technologie erhält man: $x = 4$.

$$p_N(4) = 10$$

Der zugehörige Gleichgewichtspreis beträgt 10 GE/ME.

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 4 Analysis
- b) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) C Interpretieren und Dokumentieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

- a) leicht
- b) mittel

Punkteanzahl:

- a) 2
- b) 4

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Halterungen für Glasfassaden

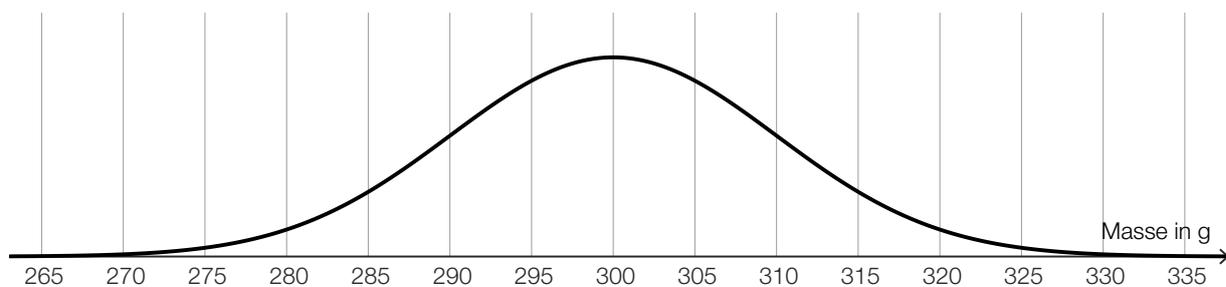
Ein Betrieb erzeugt Halterungen für Glasfassaden. Die monatlichen Produktionskosten für die Herstellung der Halterungen bis zu einer Grenze von $x = 5000$ Stück können durch folgende Funktion K beschrieben werden:

$$K(x) = 0,00001 \cdot x^3 - 0,025 \cdot x^2 + 24 \cdot x + 3500$$

x ... Produktionsmenge in Stück mit $0 \leq x \leq 5000$

$K(x)$... Kosten bei der Produktionsmenge x in €

- a) 1) Stellen Sie eine Gleichung der Stückkostenfunktion \bar{K} auf.
2) Ermitteln Sie den lokalen Extremwert der Stückkostenfunktion \bar{K} .
3) Zeigen Sie mithilfe der Differentialrechnung, dass es sich bei diesem Extremwert um ein lokales Minimum handelt.
- b) Die Halterungen werden zu einem Preis von € 20 pro Stück verkauft.
- 1) Stellen Sie eine Gleichung der Gewinnfunktion G auf.
2) Ermitteln Sie den Gewinnbereich.
- c) Ein Kunde bezieht die Halterungen in sehr großer Stückzahl. Erfahrungsgemäß ist eine Halterung mit einer Wahrscheinlichkeit von 2 % fehlerhaft. Der Kunde überprüft eine Zufallsstichprobe von 50 Halterungen.
- 1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 1 der Halterungen in dieser Zufallsstichprobe fehlerhaft ist.
- d) Die Masse der Halterungen ist annähernd normalverteilt. In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion dargestellt.



- 1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ ab.

Möglicher Lösungsweg

$$\text{a1) } \bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = 0,00001 \cdot x^2 - 0,025 \cdot x + 24 + \frac{3500}{x}$$

$$\text{a2) } \bar{K}'(x) = 0,00002 \cdot x - 0,025 - \frac{3500}{x^2}$$

$$\bar{K}'(x) = 0$$

$$x = 1\,346,519\dots$$

$$K(1\,346,519\dots) = 11,067\dots$$

$$\text{a3) } \bar{K}''(x) = 0,00002 + \frac{7000}{x^3}$$

$$\bar{K}''(1\,346,519\dots) = 0,00002\dots > 0$$

Die 2. Ableitung der Stückkosten ist positiv, daher liegt ein Minimum vor.

$$\text{b1) } G(x) = 20 \cdot x - K(x)$$

$$G(x) = -0,00001 \cdot x^3 + 0,025 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 3500$$

$$\text{b2) } G(x) = 0$$

$$(x_1 = -289,6\dots) \quad x_2 = 536,1\dots \quad x_3 = 2\,253,5\dots$$

Gewinnbereich: [537 Stück; 2 253 Stück]

$$\text{c1) } \text{Binomialverteilung mit } n = 50 \text{ und } p = 0,02$$

X ... Anzahl der fehlerhaften Halterungen

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$P(X \leq 1) = 0,7357\dots$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 73,6 %.

$$\text{d1) } \mu = 300 \text{ g, } \sigma = 10 \text{ g}$$

Ablesetoleranz für σ : [7; 13]

Monopolistischer Betrieb

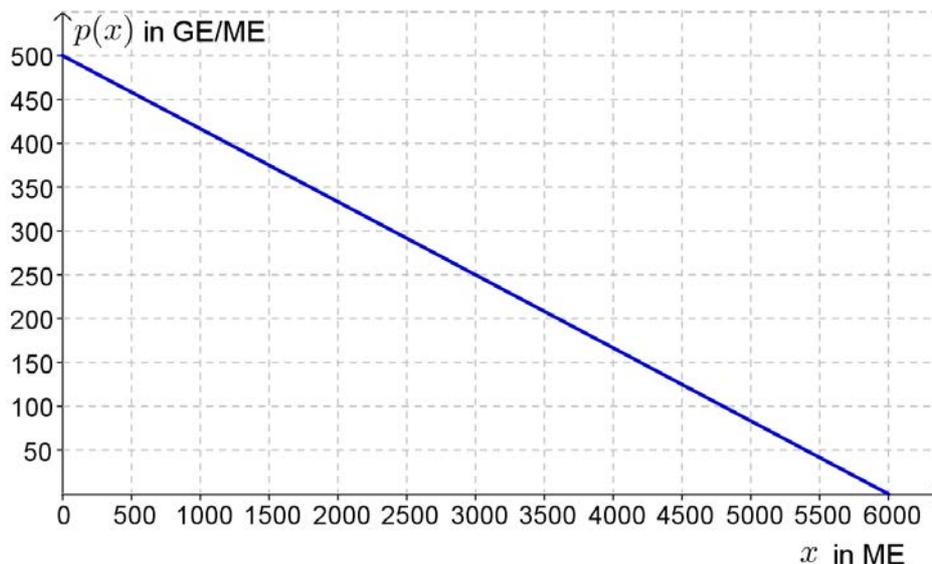
Aufgabennummer: B_148

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Die Produktion und der Verkauf einiger Produkte eines monopolistischen Betriebes werden untersucht.

- a) Die lineare Preisfunktion der Nachfrage p für das Produkt A kann annähernd durch die nachstehende Grafik dargestellt werden.

x ... nachgefragte Menge in Mengeneinheiten (ME)
 $p(x)$... Preis in Geldeinheiten pro Mengeneinheit (GE/ME) bei x ME



- Stellen Sie die Gleichung der in der obigen Grafik dargestellten Preisfunktion der Nachfrage auf.
- Interpretieren Sie die Nullstelle des dargestellten Funktionsgraphen im Sachzusammenhang.
- Argumentieren Sie, wie sich bei einem bestimmten Preis p_0 eine Preissenkung um 1 GE/ME auf den Absatz auswirkt.

- b) Für das Produkt B gilt folgender Zusammenhang zwischen der nachgefragten Menge x und dem Erlös E :

$$E(x) = -15 \cdot x^2 + 3\,000 \cdot x$$

x ... nachgefragte Menge in Mengeneinheiten (ME)
 $E(x)$... Erlös in Geldeinheiten (GE) bei einer nachgefragten Menge von x ME

- Berechnen Sie den maximalen Erlös mithilfe der Differenzialrechnung.
- Stellen Sie die Erlösfunktion grafisch für eine passende Definitionsmenge dar.
- Lesen Sie die mittlere Änderungsrate des Erlöses im Intervall $[0 \text{ ME}; 80 \text{ ME}]$ ab.
- Erklären Sie die Bedeutung der mittleren Änderungsrate des Erlöses im Sachzusammenhang.

- c) In der nachstehenden Tabelle sind für das Produkt C die Gesamtkosten K in Geldeinheiten (GE) in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x in Mengeneinheiten (ME) angegeben:

x	0	6	15	23,5	30,3	40	60
$K(x)$	35	110	198	283	359	498	1 091

- Zeichnen Sie einen Streckenzug durch die gegebenen Punkte $(x|K(x))$ in ein Koordinatensystem.
- Beurteilen Sie, ob durch den Streckenzug $(x|K(x))$ eine zu einer Kostenfunktion passende Monotonie erkennbar ist.
- Bestimmen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine kubische Kostenfunktion für dieses Produkt.
- Berechnen Sie die Kostenkehre dieser kubischen Funktion.

- d) Der Gewinn für das Produkt D kann annähernd durch die folgende Funktion G beschrieben werden:

$$G(x) = -0,14 \cdot x^3 + 1,21 \cdot x^2 + 6,63 \cdot x - 16,98$$

x ... verkaufte Menge in Mengeneinheiten (ME)

$G(x)$... erzielter Gewinn in Geldeinheiten (GE) bei x ME

- Kreuzen Sie die zutreffende Aussage zur Gewinnfunktion an. [1 aus 5]

Bei einer Verkaufsmenge von 2 ME wird ein Verlust erzielt.	<input type="checkbox"/>
Die gewinnmaximierende Menge liegt bei einer Verkaufsmenge von 2 ME.	<input type="checkbox"/>
Der Break-even-Point liegt bei einer Verkaufsmenge von 2 ME.	<input type="checkbox"/>
Bei einer Verkaufsmenge von 2 ME wird die obere Gewinngrenze erreicht.	<input type="checkbox"/>
Das Betriebsoptimum liegt bei einer Verkaufsmenge von 2 ME.	<input type="checkbox"/>

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $p(x) = 500 - \frac{x}{12}$

Die Nullstelle befindet sich bei $x = 6\,000$ ME. Es handelt sich um die Sättigungsmenge für dieses Produkt.

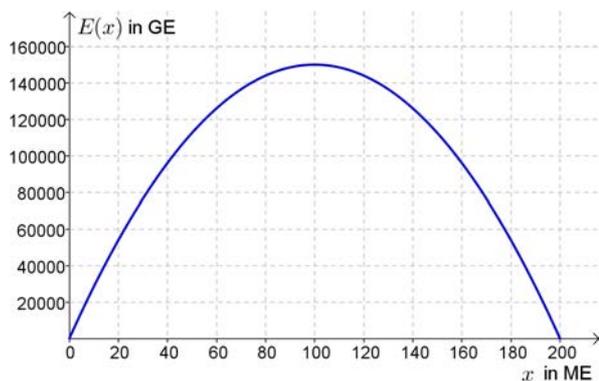
Wenn man den Preis p_0 um $\Delta p = 1$ senkt, dann bedeutet dies eine Zunahme des Absatzes um 12 Mengeneinheiten.

Begründung: $x = 6\,000 - 12p \Rightarrow \Delta x = -12 \cdot \Delta p$

b) $E'(x) = 0: -30 \cdot x + 3\,000 = 0$

$x = 100$ ME

Der maximale Erlös $E(100)$ beträgt 150 000 GE.

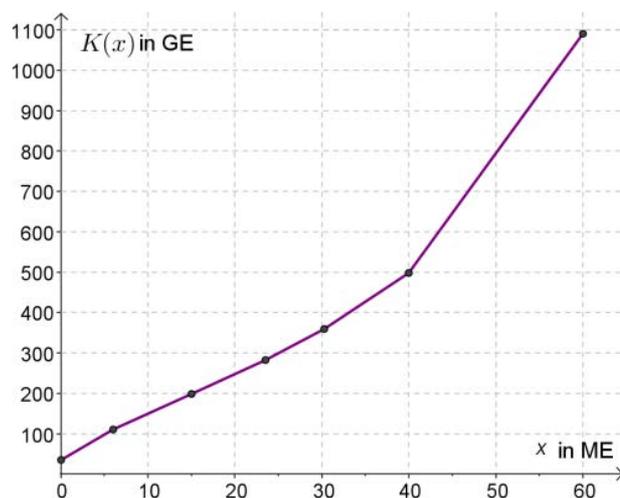


Der Graph darf keine negativen Funktionswerte aufweisen.

Die mittlere Änderungsrate zwischen 0 ME und 80 ME beträgt rund 1 800 GE/ME.

Die mittlere Änderungsrate gibt an, wie groß im Mittel pro zusätzliche ME ein Zuwachs des Erlöses im vorgegebenen Intervall ist.

c) Streckenzug:



Da alle Teilstrecken einen positiven Anstieg aufweisen, könnten die gegebenen Wertepaare Elemente einer streng monoton steigenden Funktion sein.
 Dies ist u. a. eine Bedingung für ein passendes Modell einer Kostenfunktion.

Regressionsfunktion mittels Technologieeinsatz:
 $K(x) = 0,0061 \cdot x^3 - 0,3152 \cdot x^2 + 14,5417 \cdot x + 33,7192$

Kostenkehre aus $K''(x) = 0$: $0,0366 \cdot x - 0,6304 = 0$
 Die Kostenkehre liegt bei $x_k \approx 17,21$ ME.

d)

Der Break-even-Point liegt bei einer Verkaufsmenge von 2 ME.	<input checked="" type="checkbox"/>

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 4 Analysis
- b) 4 Analysis
- c) 4 Analysis
- d) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) —
- c) —
- d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) B Operieren und Technologieeinsatz
- d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) C Interpretieren und Dokumentieren, D Argumentieren und Kommunizieren
- b) C Interpretieren und Dokumentieren, D Argumentieren und Kommunizieren
- c) A Modellieren und Transferieren, D Argumentieren und Kommunizieren
- d) —

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) mittel
- c) mittel
- d) mittel

Punkteanzahl:

- a) 3
- b) 4
- c) 4
- d) 1

Thema: Wirtschaft

Quelle: Itemwriterkurs OÖ3 2014

Ertragsgesetzliche Kostenfunktion

Aufgabennummer: B_136

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Die Gesamtkosten K für die Herstellung eines bestimmten Produkts in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x verlaufen nach einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion.

x ... Anzahl der produzierten Mengeneinheiten (ME)

$K(x)$... Gesamtkosten bei x ME in Geldeinheiten (GE)

Die Kostenfunktion muss in diesem Fall die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. Es existiert ein positiver Funktionswert an der Stelle $x = 0$.
2. Die Kurve hat keinen Extremwert.
3. Die Kurve muss streng monoton steigen.
4. Sie muss im 1. Quadranten von einem degressiven Verlauf in einen progressiven wechseln.

a) Nur einer der beiden unten abgebildeten Graphen stellt eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion dar.

– Begründen Sie, warum der Funktionsgraph in Abb. 2 keine ertragsgesetzliche Kostenfunktion beschreibt.

– Lesen Sie aus dem Graphen der ertragsgesetzlichen Kostenfunktion die Kostenkehre ab.

– Ermitteln Sie mithilfe der abgelesenen Kostenkehre die Stückkosten an dieser Stelle.

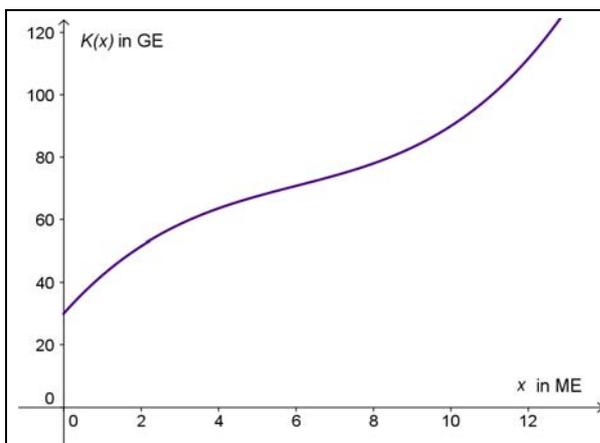


Abb. 1

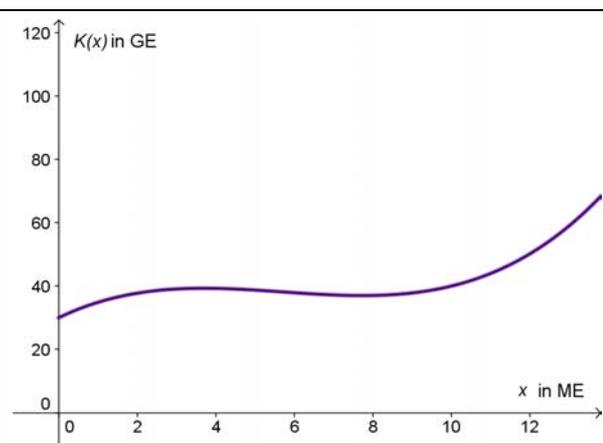


Abb. 2

- b) – Begründen Sie, warum die Funktion K mit

$$K(x) = 0,1x^3 - 1,6x^2 + 12x + 20$$

die 4 Bedingungen einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion erfüllt.

- c) Eine Polynomfunktion 3. Grades beschreibt eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion. Die Fixkosten betragen 25 GE. Die Kostenkehre liegt bei 5 ME. Die Gesamtkosten an der Kostenkehre betragen 53,8 GE. Die Tangente an den Graphen der Gesamtkostenfunktion hat an der Stelle $x = 2$ ME einen Anstieg $k = 6$.

- Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem man die Parameter der Kostenfunktion berechnen kann.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

- a) Der Graph in Abb. 2 erfüllt 2 Bedingungen einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion nicht.
 Die 2. Bedingung ist nicht erfüllt: Die Funktion hat ein lokales Maximum (bei ca. 4 ME) und ein lokales Minimum (bei ca. 8 ME).
 Die 3. Bedingung ist nicht erfüllt: Die Funktion steigt nicht streng monoton. Sie fällt im Bereich von ca. 4 ME bis ca. 8 ME.

Abb.1: Die Kostenkehre liegt bei ca. 6 ME. Toleranzbereich: $\pm 0,5$ ME.

Die Gesamtkosten an der Kostenkehre betragen ca. 70 GE, die Stückkosten an der Kostenkehre betragen daher ungefähr 11,67 GE/ME.

- b) $K(0) = 20$... positiver Funktionswert an der Stelle $x = 0$
 $K'(x) = 0,3x^2 - 3,2x + 12 = 0$, die Gleichung hat keine reelle Lösung.
 Es existieren keine Extremwerte.

Wenn der Funktionsgraph im gesamten Bereich monoton steigt, dann muss $K'(x)$ für alle x größer als null sein.

Der Graph von K' ist eine nach oben offene Parabel, weil der Koeffizient vor x^2 positiv ist. Weil die Ableitungsfunktion K' keine Nullstelle hat, sind alle Funktionswerte positiv.

Die Funktion K steigt daher monoton.

$$K''(x) = 0,6x - 3,2 = 0 \Rightarrow x = 5,33$$

Der Wendepunkt liegt im 1. Quadranten.

$K''(x)$ ist positiv für $x > 5,33$, denn K'' ist eine lineare Funktion mit positiver Steigung.

D. h., das Krümmungsverhalten ist nach der Wendestelle progressiv und vor der Wendestelle daher degressiv.

- c) $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
 $K'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$
 $K''(x) = 6a \cdot x + 2b$

Es gelten die folgenden Gleichungen:

$$K(0) = 25: \quad d = 25$$

$$K(5) = 53,8: \quad 125a + 25b + 5c + d = 53,8$$

$$K'(2) = 6: \quad 12a + 4b + c = 6$$

$$K''(5) = 0: \quad 30a + 2b = 0$$

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 4 Analysis
- b) 4 Analysis
- c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) C Interpretieren und Dokumentieren
- b) D Argumentieren und Kommunizieren
- c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) D Argumentieren und Kommunizieren
- b) —
- c) —

Schwierigkeitsgrad:

- a) leicht
- b) mittel
- c) mittel

Punkteanzahl:

- a) 3
- b) 4
- c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Jahresumsatz

Aufgabennummer: B_135

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

- a) Ein Unternehmen erzielt in den Jahren nach seiner Gründung Jahresumsätze, die in der nachstehenden Tabelle aufgelistet sind.

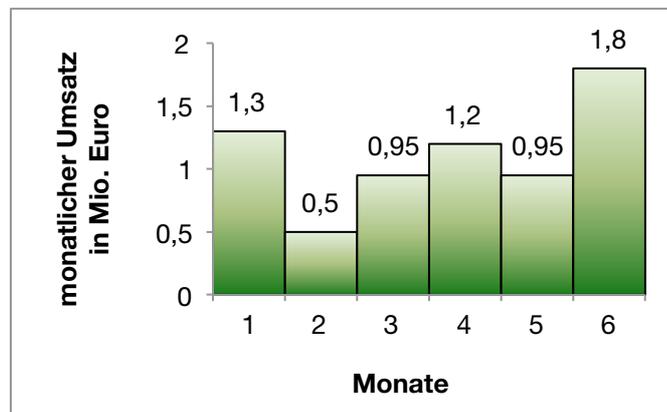
t ... Jahre (a) nach der Gründung

$E(t)$... Erlös t Jahre nach der Gründung in Millionen Euro (Mio. €)

t in a	1	5	9	13	17	21
$E(t)$ in Mio. €	14	12,5	13,9	14,7	16	18,2

- Stellen Sie die Wertepaare der Tabelle in einem Koordinatensystem dar.
- Ermitteln Sie mithilfe der Regression eine Polynomfunktion 2. Grades durch die gegebene Punktwolke.

- b) Die nachstehende Grafik zeigt die monatliche Umsatzverteilung im 1. Halbjahr des 5. Jahres.



- Berechnen Sie das arithmetische Mittel und die Standardabweichung der monatlichen Umsätze.

In einem Geschäftsbericht werden nur das arithmetische Mittel und die Standardabweichung veröffentlicht.

- Erklären Sie, welche Informationen zur Umsatzentwicklung dadurch verloren gehen.

- c) Der Jahresumsatz für ein bestimmtes Produkt dieses Unternehmens beträgt 2,4 Millionen Euro bei 20 000 verkauften Stück. Die Sättigungsmenge liegt bei 30 000 Stück. Die Preisfunktion der Nachfrage p ist linear:

$$p(x) = k \cdot x + d$$

x ... Verkaufsmenge in Stück

$p(x)$... Preis pro Stück bei einer Verkaufsmenge von x Stück

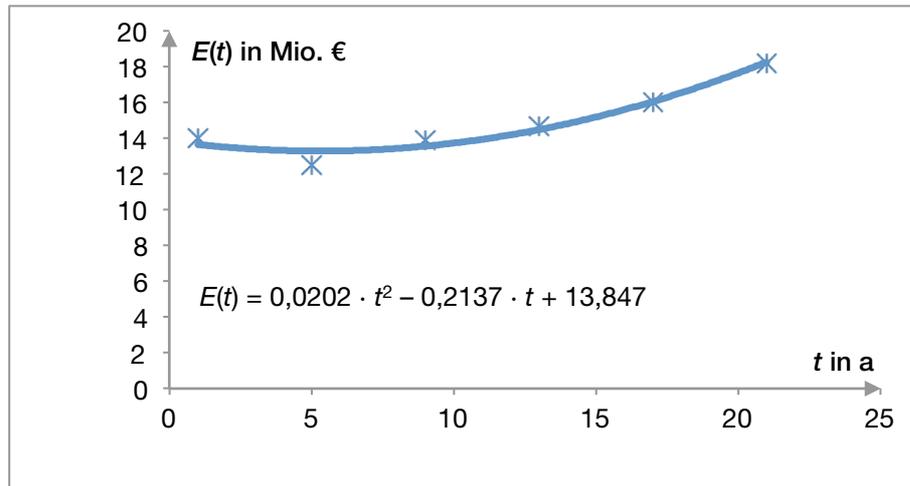
- Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten k und d auf.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Regressionsfunktion:

$$E(t) = 0,0202 \cdot t^2 - 0,2137 \cdot t + 13,8471$$

- b) Im Mittel nimmt das Unternehmen im diesem Halbjahr monatlich jeweils rund € 1,1167 Mio. ein. Die Standardabweichung beträgt rund € 0,3965 Mio.

Das arithmetische Mittel lässt keinen Rückschluss auf die Entwicklung des Umsatzes während des Halbjahres zu. Die tatsächlichen Schwankungen des Umsatzes von Monat zu Monat werden durch die Angabe der Standardabweichung nicht erfasst.

- c) Preis pro Stück bei einer Verkaufsmenge von 20 000 Stück: $\frac{2\,400\,000\ \text{€}}{20\,000\ \text{Stk.}} = 120\ \text{€/Stk.}$

$$p(20\,000) = 120: 20\,000 \cdot k + d = 120$$

$$p(30\,000) = 0: 30\,000 \cdot k + d = 0$$

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 5 Stochastik
- b) 5 Stochastik
- c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) —
- b) D Argumentieren und Kommunizieren
- c) —

Schwierigkeitsgrad:

- a) leicht
- b) leicht
- c) mittel

Punkteanzahl:

- a) 2
- b) 2
- c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Handyproduktion*

Aufgabennummer: B_517

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Ein Unternehmen produziert die zwei Handymodelle H_1 und H_2 .
Dabei werden die beiden Mikrochip-Sorten M_1 und M_2 benötigt.
Für die Produktion der Mikrochips werden unter anderem die Rohstoffe Silicium (R_1) und Kupfer (R_2) benötigt.

Die nachstehende Tabelle, die der Matrix \mathbf{R} entspricht, beschreibt den Mengenbedarf an Rohstoffen (in ME) für die Herstellung je eines Stücks der beiden Mikrochip-Sorten.

	M_1	M_2
R_1	5	7
R_2	1	2

Die nachstehende Tabelle, die der Matrix \mathbf{S} entspricht, beschreibt den Mengenbedarf an Mikrochips (in Stück) für die Herstellung je eines Stücks der beiden Handymodelle.

	H_1	H_2
M_1	5	1
M_2	0	4

- a) 1) Ermitteln Sie diejenige Matrix \mathbf{A} , die den Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung je eines Stücks der beiden Handymodelle beschreibt.

Bei einer bestimmten Produktionsvariante wird die Matrix \mathbf{S} durch eine Matrix $\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ x & 4 \end{pmatrix}$ so ersetzt, dass sich anstelle von \mathbf{A} die neue Matrix $\begin{pmatrix} 46 & 33 \\ 11 & 9 \end{pmatrix}$ ergibt.

- 2) Ermitteln Sie x .

b) Die Anzahlen der täglich produzierten Handys der Handymodelle H_1 und H_2 können durch den Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ dargestellt werden.

Die Preise pro ME für die Rohstoffe R_1 und R_2 können durch den Vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ dargestellt werden.

- 1) Beschreiben Sie, was durch den Ausdruck $\mathbf{S} \cdot \vec{x}$ im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird.
- 2) Ermitteln Sie die Zeilen- und die Spaltenanzahl der Matrix $\vec{p}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{S} \cdot \vec{x}$.

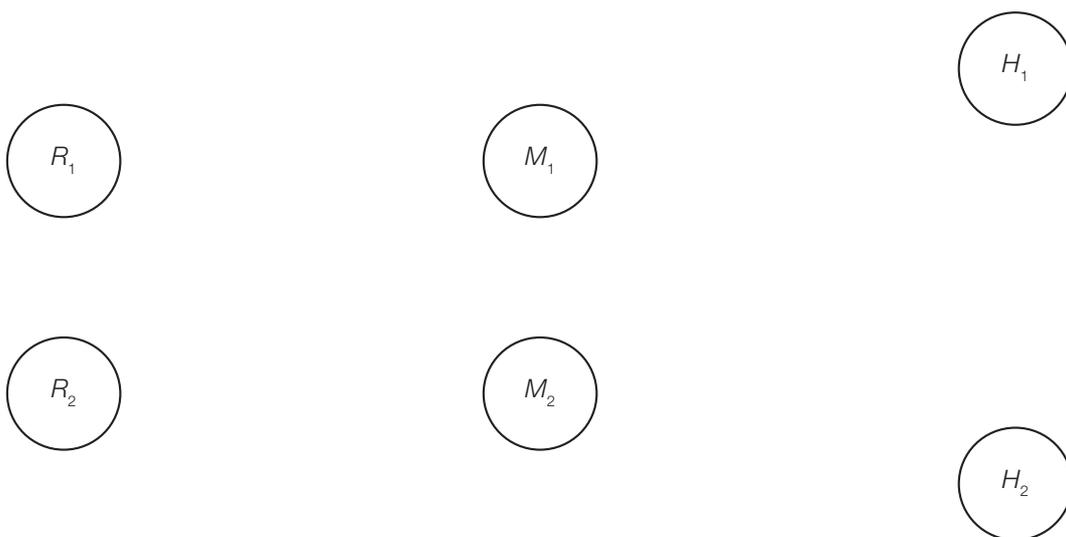
Zeilenanzahl: _____

Spaltenanzahl: _____

- c) Der Prozess der Handyproduktion wird geändert. Die neue Verflechtung zwischen den Rohstoffen, den Mikrochips und den Handymodellen kann durch die nachstehende Tabelle beschrieben werden.

	R_1	R_2	M_1	M_2	H_1	H_2
R_1	0	0	5	7	6	0
R_2	0	0	1	2	0	0
M_1	0	0	0	0	5	1
M_2	0	0	0	0	0	4
H_1	0	0	0	0	0	0
H_2	0	0	0	0	0	0

- 1) Vervollständigen Sie den nachstehenden Gozinto-Graphen so, dass er den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt.



Die tägliche Nachfrage nach den Rohstoffen R_1 und R_2 , den Mikrochips M_1 und M_2 sowie den Handymodellen H_1 und H_2 kann durch den Vektor \vec{n} beschrieben werden:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2000 \\ 1000 \\ 500 \\ 700 \end{pmatrix}$$

- 2) Lesen Sie die Anzahl der insgesamt täglich nachgefragten Mikrochips ab.

- d) Die häufigsten Fehler, die bei den Handymodellen H_1 und H_2 auftreten, sind Displayfehler und Akkufehler.

Die Wahrscheinlichkeiten, mit denen diese beiden Fehler auftreten, sind in der nachstehenden Vierfeldertafel dargestellt.

	Displayfehler	kein Displayfehler	Summe
Akkufehler	0,01	0,02	0,03
kein Akkufehler	0,01	0,96	0,97
Summe	0,02	0,98	1,00

- 1) Beschreiben Sie ein Ereignis im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem nachstehenden Ausdruck berechnet wird.

$$1 - 0,96 = 0,04$$

- 2) Überprüfen Sie nachweislich, ob die beiden Ereignisse „Displayfehler“ und „Akkufehler“ voneinander unabhängig sind.

Bei einem Handy ist ein Displayfehler aufgetreten.

- 3) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter dieser Bedingung auch ein Akkufehler auftritt.

Möglicher Lösungsweg

a1) $A = R \cdot S = \begin{pmatrix} 25 & 33 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$

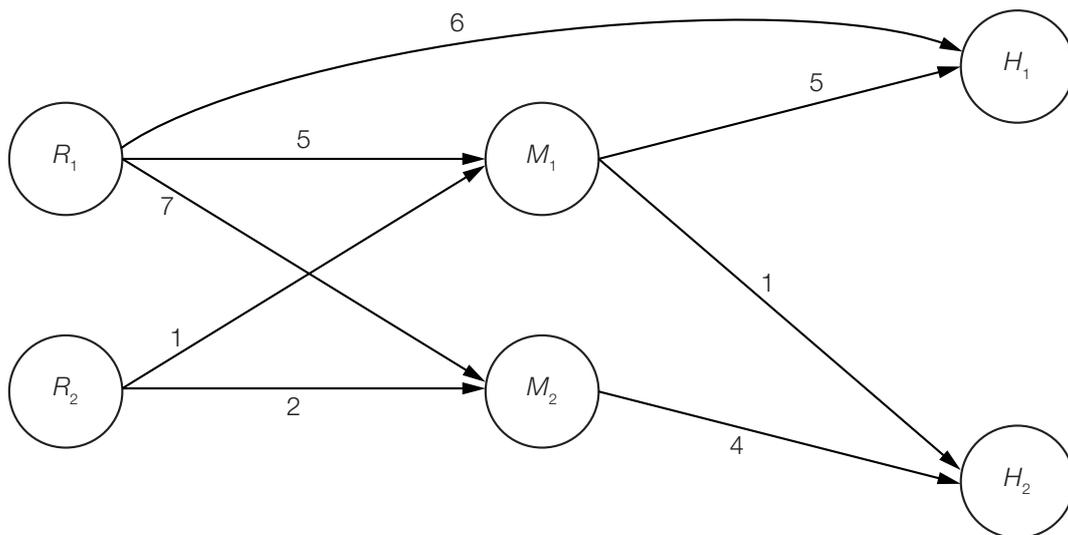
a2) $5 \cdot 5 + 7 \cdot x = 46 \Rightarrow x = 3$
 $1 \cdot 5 + 2 \cdot x = 11 \Rightarrow x = 3$

Für die Punktevergabe ist eine der beiden Gleichungen ausreichend.

b1) Es wird die Anzahl der Mikrochips M_1 und M_2 berechnet, die für die Produktion von x_1 Handys vom Modell H_1 und x_2 Handys vom Modell H_2 benötigt werden.

b2) Zeilenanzahl: 1
 Spaltenanzahl: 1

c1)



c2) Es werden insgesamt 3000 Mikrochips täglich nachgefragt.

d1) Mindestens einer der beiden Fehler tritt auf.

d2) Die Ereignisse „Displayfehler“ (D) und „Akkufehler“ (A) sind unabhängig, wenn gilt:

$$P(D) \cdot P(A) = P(D \cap A)$$

$$P(D \cap A) = 0,01$$

$$P(D) \cdot P(A) = 0,02 \cdot 0,03 = 0,0006 \neq 0,01$$

Daher sind die beiden Ereignisse nicht unabhängig.

d3) $P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0,01}{0,02} = \frac{1}{2}$

Die Wahrscheinlichkeit, dass unter dieser Bedingung ein Akkufehler auftritt, beträgt 50 %.

Lösungsschlüssel

- a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Matrix **A**.
- a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von x .
- b1) Ein Punkt für das richtige Beschreiben im gegebenen Sachzusammenhang.
- b2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Zeilen- und der Spaltenanzahl.
- c1) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen des Gozinto-Graphen.
- c2) Ein Punkt für das Ablesen der richtigen Anzahl.
- d1) Ein Punkt für das richtige Beschreiben im gegebenen Sachzusammenhang.
- d2) Ein Punkt für das richtige nachweisliche Überprüfen.
- d3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der bedingten Wahrscheinlichkeit.

Sparbuch*

Aufgabennummer: B_222

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

- a) Von einem Sparbuch soll über 10 Jahre hinweg jeweils am Monatsende ein Betrag von € 200 abgehoben werden. Unmittelbar nach der letzten Abhebung sollen noch € 1.500 auf dem Sparbuch verbleiben. Der Zinssatz beträgt 1,5 % p. a.
- Berechnen Sie die Höhe desjenigen Betrags, der zu Beginn auf das Sparbuch einbezahlt werden muss (ohne Berücksichtigung der KESt).
- b) Auf ein Sparbuch wird einmalig ein Betrag von € 10.000 und 5 Jahre später einmalig ein Betrag x einbezahlt. Nach insgesamt 8 Jahren soll ein Betrag von € 20.000 zur Verfügung stehen. Der Zinssatz beträgt 1,5 % p. a.
- Erstellen Sie eine Zeitlinie, die diesen Sachverhalt darstellt.
 - Berechnen Sie die Höhe des Betrags x ohne Berücksichtigung der KESt.
 - Begründen Sie, warum sich die Höhe des Betrags x verringert, wenn er bereits nach 2 Jahren einbezahlt wird.
- c) Auf einem Sparbuch stehen zu Jahresbeginn € 25.000 zur Verfügung. In den folgenden 12 Jahren sollen jeweils am Jahresende € 2.300 abgehoben werden können, sodass das Guthaben zur Gänze aufgebraucht ist.
- Berechnen Sie den entsprechenden Jahreszinssatz (ohne Berücksichtigung der KESt).

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

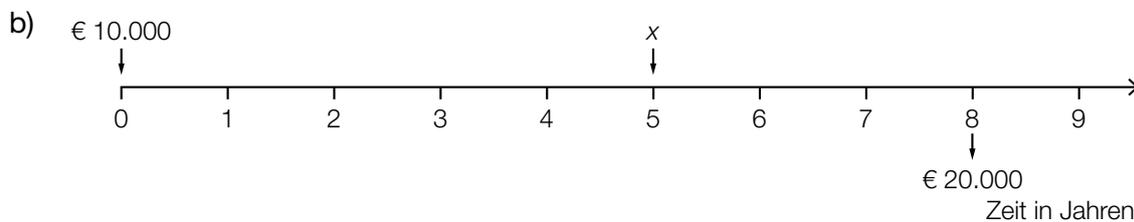
a) $q_{12} = \sqrt[12]{1,015} = 1,00124\dots$

Barwert der Ratenzahlung: $200 \cdot \frac{q_{12}^{120} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{120}} = 22\,284,999\dots$

Barwert des Restbetrags: $\frac{1\,500}{1,015^{10}} = 1\,292,500\dots$

$22\,284,999\dots + 1\,292,500\dots = 23\,577,500\dots$

Es müssen zu Beginn € 23.577,50 auf das Sparbuch einbezahlt werden.



$$10\,000 \cdot 1,015^8 + x \cdot 1,015^3 = 20\,000$$

$$x = 8\,353,499\dots$$

Es muss ein Betrag in Höhe von € 8.353,50 nach 5 Jahren einbezahlt werden.

Wird der Betrag x schon nach 2 Jahren einbezahlt, so können dafür zusätzlich 3 Jahre lang Zinsen lukriert werden. Um diesen Betrag sinkt die Höhe von x bei früherer Einzahlung.

c) $25\,000 = 2\,300 \cdot \frac{q^{12} - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^{12}}$

$$q = 1,01555\dots$$

Der jährliche Zinssatz beträgt rund 1,56 %.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für das Erkennen des richtigen finanzmathematischen Modells (Barwert)
1 × B1: für die Verwendung des richtigen (monatlichen) Zinssatzes
1 × B2: für die richtige Berechnung des am Beginn einzuzahlenden Betrags

- b) 1 × A: für die richtige Erstellung der Zeitlinie
1 × B: für die richtige Berechnung der Höhe des Betrags x
1 × D: für die richtige Begründung

- c) 1 × A: für einen richtigen Ansatz zur Berechnung des jährlichen Zinssatzes
1 × B: für die richtige Berechnung des Jahreszinssatzes

Ölbohrungen*

Aufgabennummer: B_221

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Eine Ölgesellschaft führt Probebohrungen in Texas und in Alaska durch. Erfahrungsgemäß findet man bei einer Bohrung in Texas mit einer Wahrscheinlichkeit von 85 % und bei einer Bohrung in Alaska mit einer Wahrscheinlichkeit von 65 % Öl.

- a) – Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass nur in Texas oder nur in Alaska Öl gefunden wird, wenn die beiden Bohrungen unabhängig voneinander sind.
- b) – Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, in höchstens einem der beiden US-Bundesstaaten Öl zu finden, wenn die beiden Bohrungen unabhängig voneinander sind.
 – Erklären Sie, welchen Vorteil eine Berechnung mittels Gegenwahrscheinlichkeit hier hat.
- c) – Berechnen Sie, wie viele Bohrungen in Alaska zumindest notwendig sind, um mit mindestens 99%iger Wahrscheinlichkeit Öl zu finden.
 – Beschreiben Sie, wie sich die gesuchte Anzahl der Bohrungen verändert, wenn eine 95%ige Wahrscheinlichkeit, Öl zu finden, ausreichend ist.
- d) Von allen Arbeiter/innen der Ölgesellschaft arbeiten 30 % in Alaska, die übrigen bei Bohrungen in Texas. Insgesamt sprechen 65 % aller Arbeiter/innen Spanisch. Ein Sechstel aller in Alaska tätigen Arbeiter/innen spricht Spanisch.
 – Übertragen Sie die Werte der Angabe in die entsprechenden Felder der untenstehenden Vierfeldertafel.
 – Ermitteln Sie die Werte der restlichen Felder und tragen Sie diese in die entsprechenden Felder ein.

	Arbeiter/innen in Alaska	Arbeiter/innen in Texas	Summe
Spanisch sprechend			
nicht Spanisch sprechend			
Summe			

*Hinweis zur Aufgabe:
 Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.*

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) $P(T \cap A') + P(T' \cap A) = 0,85 \cdot 0,35 + 0,15 \cdot 0,65 = 0,395 = 39,5 \%$

Die Wahrscheinlichkeit, dass nur in Texas oder nur in Alaska Öl gefunden wird, beträgt 39,5 %.

b) $1 - P(T \cap A) = 1 - 0,85 \cdot 0,65 = 0,4475 = 44,75 \%$

Die Wahrscheinlichkeit, in höchstens einem der beiden US-Bundesstaaten Öl zu finden, beträgt 44,75 %.

Bei einer Berechnung mithilfe der Gegenwahrscheinlichkeit hat man den Vorteil, dass man nur die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis – nämlich das Ereignis, dass bei beiden Bohrungen Öl gefunden wird – berechnen muss.

c) $1 - 0,35^n = 0,99$

Berechnung mithilfe von Technologie: $n \approx 4,4$

Es sind zumindest 5 Bohrungen in Alaska notwendig, um mit mindestens 99%iger Wahrscheinlichkeit Öl zu finden.

Ist nur eine 95%ige Sicherheit gefordert, so ist die Anzahl der notwendigen Bohrungen geringer.

d)

	Arbeiter/innen in Alaska	Arbeiter/innen in Texas	Summe
Spanisch sprechend	5 %	60 %	65 %
nicht Spanisch sprechend	25 %	10 %	35 %
Summe	30 %	70 %	

Die hervorgehobenen Werte in der obenstehenden Tabelle sind diejenigen, die aus der Angabe übertragen wurden.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × B für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
- b) 1 × B für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
1 × D für die richtige Erklärung zur Gegenwahrscheinlichkeit
- c) 1 × B für die richtige Berechnung der Anzahl der notwendigen Bohrungen
1 × C für die richtige Beschreibung zur Veränderung der notwendigen Bohrungen
- d) 1 × A für das richtige Übertragen der Werte in die Vierfeldertafel
1 × B für das richtige Ermitteln der fehlenden Werte

Produktion*

Aufgabennummer: B-C8_31

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

- a) In der nachstehenden Tabelle sind die Gesamtkosten eines Unternehmens $K(x)$ in GE für die Produktionsmenge x in ME angegeben. Die Fixkosten betragen 40 GE.

x in ME	2	5	9
$K(x)$ in GE	105	152	369

- Ermitteln Sie die Gleichung der ertragsgesetzlichen Kostenfunktion K .
 - Zeichnen Sie den Graphen dieser Kostenfunktion K im Intervall $0 \leq x \leq 10$.
 - Lesen Sie aus dem Graphen denjenigen Bereich ab, in dem ein progressiver Kostenverlauf vorliegt.
- b) – Beschreiben Sie die notwendigen Schritte zur Berechnung der kurzfristigen Preisuntergrenze, wenn die Gesamtkostenfunktion bekannt ist.
- c) Zur Gewinnermittlung für ein anderes Produkt verwendet das Unternehmen die folgende Kostenfunktion K sowie die folgende Erlösfunktion E :

$$K(x) = x^3 - 9 \cdot x^2 + 55 \cdot x + 190$$

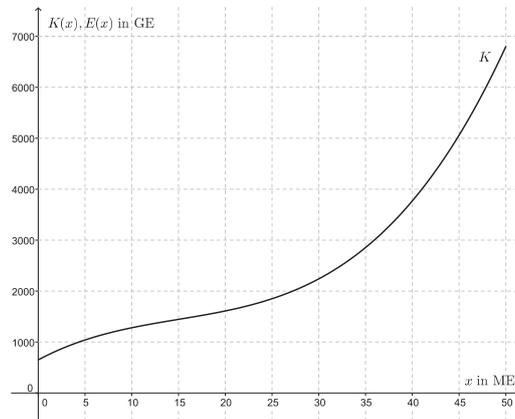
$$E(x) = 90 \cdot x$$

x in ME

$K(x), E(x)$ in GE

- Stellen Sie Funktionsgleichung der Gewinnfunktion auf.
- Berechnen Sie die Höhe des maximalen Gewinns.

- d) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Kostenfunktion K eines weiteren Produktes dargestellt.



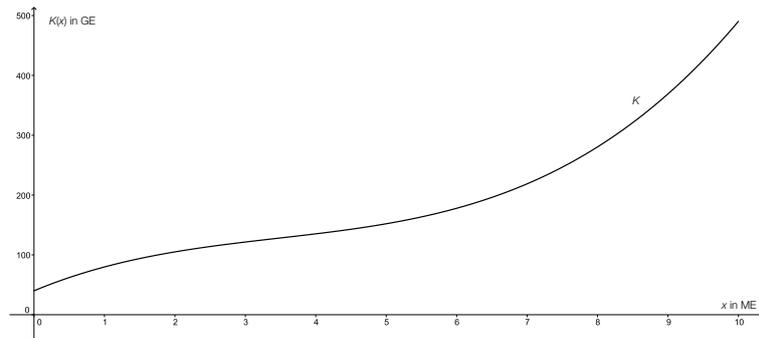
- Zeichnen Sie den Graphen der Erlösfunktion E bei einem Marktpreis von 100 GE/ME ein.
- Lesen Sie die beiden Gewinn Grenzen ab.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $K(x) = 0,99 \cdot x^3 - 10,27 \cdot x^2 + 49,1 \cdot x + 40$

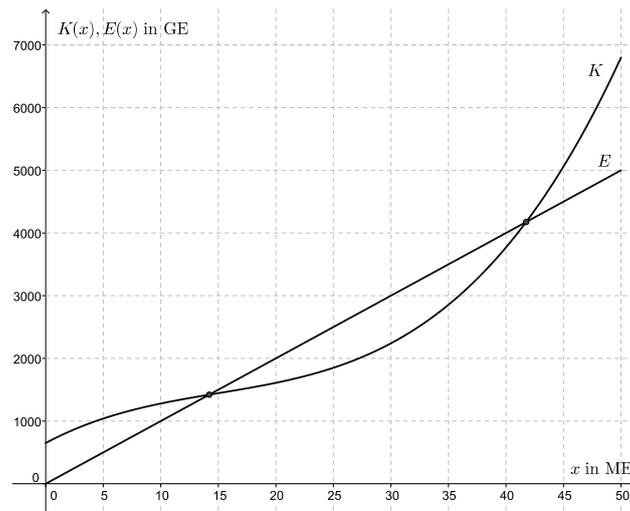


Im Bereich ab rund 3,5 ME liegt ein progressiver Kostenverlauf vor.
Für die untere Grenze gilt folgender Ablesetoleranzbereich: [3; 4].

- b) Schritte zur Berechnung der kurzfristigen Preisuntergrenze:
- Bestimmung der variablen Stückkostenfunktion
 - Stelle des Minimums der variablen Stückkostenfunktion berechnen (Betriebsminimum)
 - Betriebsminimum in variable Stückkostenfunktion einsetzen
→ Ergebnis ist die kurzfristige Preisuntergrenze

c) $G(x) = -x^3 + 9 \cdot x^2 + 35 \cdot x - 190$
maximaler Gewinn: 156,9 GE

d)



untere Gewinnngrenze: ca. 14 ME, Ablesetoleranzbereich [12; 16]
obere Gewinnngrenze: ca. 42 ME, Ablesetoleranzbereich [40; 44]

Lösungsschlüssel

- a) 1 × B1 für die richtige Ermittlung der Gleichung
1 × B2 für das richtige Zeichnen des Funktionsgraphen
1 × C für das richtige Ablesen des Intervalls
- b) 1 × C für die richtige Beschreibung der Berechnungsschritte
- c) 1 × A für das richtige Aufstellen der Gewinnfunktion
1 × B für die richtige Berechnung des maximalen Gewinns
- d) 1 × A für das richtige Einzeichnen des Graphen der Erlösfunktion
1 × C für das richtige Ablesen der Gewinn Grenzen

Startkapital

Aufgabennummer: B_146

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Simon möchte sich selbstständig machen. Er setzt für die Gründung seines Unternehmens als Startkapital seine Ersparnisse und einen Kredit ein.

- a) Er hat während der letzten 10 Jahre die folgenden Zahlungen auf ein mit 2,1 % p. a. verzinstes Sparbuch getätigt: Zu Beginn des 1. Jahres € 20.000, zu Beginn des 4. Jahres € 75.000 und ab dem Beginn des 8. Jahres monatlich vorschüssige Raten in Höhe von je € 450.

- Veranschaulichen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse.
- Berechnen Sie, über welchen Betrag Simon nach diesen 10 Jahren verfügen kann.

Simon überlegt durch welche nachschüssigen Monatsraten R er in 10 Jahren denselben Betrag hätte ansparen können.

- Ermitteln Sie die Höhe dieser Rate R .

- b) Simon benötigt zusätzlich zu seinen Ersparnissen ein Kapital in Höhe von € 45.000. Die Bank bietet ihm einen entsprechenden Kredit mit dem folgenden Tilgungsplan:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 45.000,00
1	€ 1.665,00	€ 9.000,00	€ 10.665,00	€ 36.000,00
2	€ 1.332,00	€ 9.000,00		€ 27.000,00
3	€ 999,00	€ 9.000,00	€ 9.999,00	€ 18.000,00
4	€ 666,00	€ 9.000,00	€ 9.666,00	€ 9.000,00
5	€ 333,00	€ 9.000,00	€ 9.333,00	€ 0,00

- Ermitteln Sie die fehlende Zahl im Tilgungsplan.

In einem anderen Angebot soll diese Schuld bei einem Zinssatz von 4 % p. a. durch 5 nachschüssige Jahresraten getilgt werden.

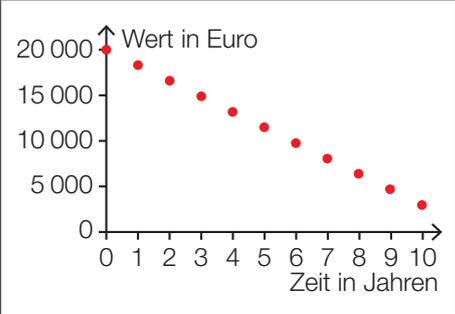
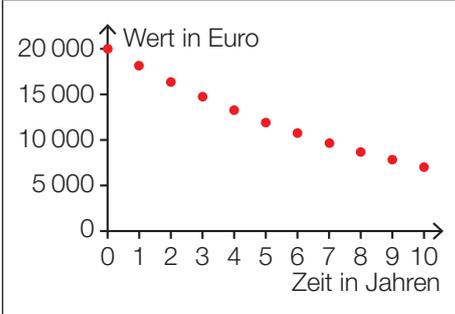
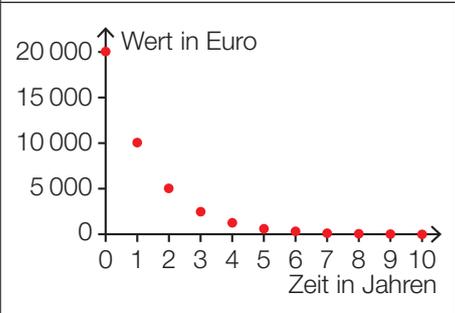
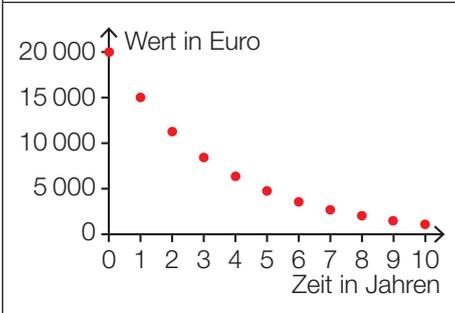
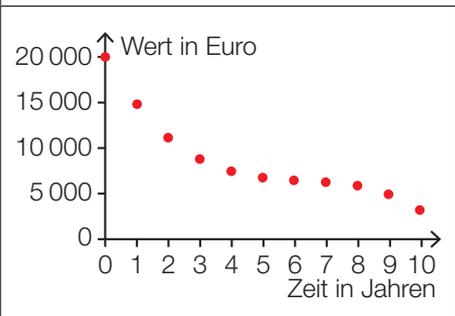
- Berechnen Sie die zugehörige Ratenhöhe.

c) Simon kauft vom Startkapital zu Beginn des Jahres für sein Unternehmen eine Maschine um € 20.000. Die Maschine verliert gegenüber dem Vorjahr jährlich 25 % ihres Wertes.

- Stellen Sie die Funktionsgleichung auf, die den Wert der Maschine jeweils zu Beginn jedes Jahres beschreibt. Wählen Sie $t = 0$ für den Beginn desjenigen Jahres, in dem die Maschine gekauft wird.
- Geben Sie eine passende Definitionsmenge zu dieser Funktion an.

Die nachstehenden grafischen Darstellungen sollen den Wert der Maschine zu Beginn jedes Jahres darstellen.

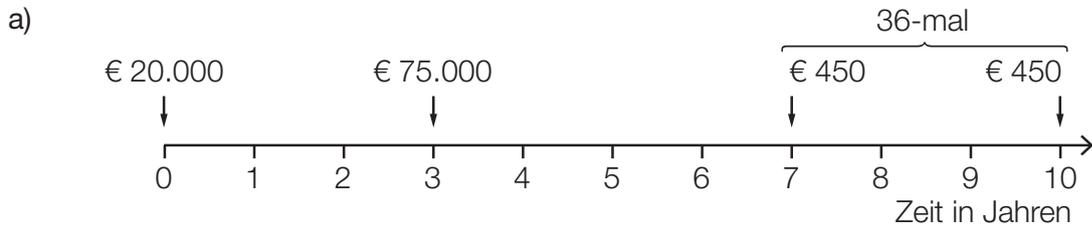
– Kreuzen Sie die korrekte Darstellung an. [1 aus 5]

	<input type="checkbox"/>
	<input type="checkbox"/>
	<input type="checkbox"/>
	<input type="checkbox"/>
	<input type="checkbox"/>

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg



$$q_{12} = \sqrt[12]{1,021}$$

$$K_{10} = 20000 \cdot 1,021^{10} + 75000 \cdot 1,021^7 + 450 \cdot \frac{q_{12}^{36} - 1}{q_{12} - 1} \cdot q_{12} = 128094,522\dots$$

Simon kann nach 10 Jahren € 128.094,52 beheben.

$$R \cdot \frac{q_{12}^{120} - 1}{q_{12} - 1} = 128094,52 \Rightarrow R = 961,203\dots$$

Die Ratenhöhe beträgt € 961,20.

b) fehlende Zahl:

2. Zeile Annuität: € 10.332 (aus $Z + T = 1332 + 9000$)

$$45000 = R \cdot \frac{1,04^5 - 1}{0,04} \cdot \frac{1}{1,04^5}$$

$$R = 10108,220\dots$$

Die Ratenhöhe beträgt € 10.108,22.

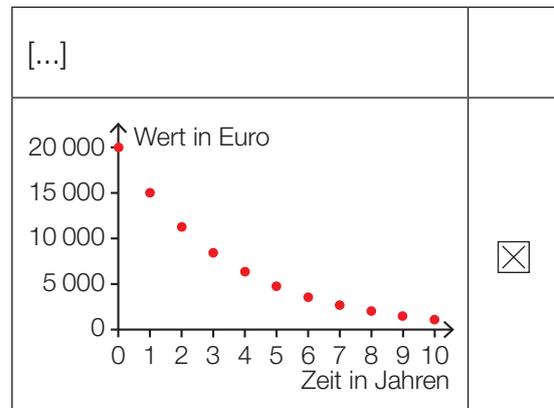
c) $W(t) = 20000 \cdot 0,75^t$ mit $t \in \mathbb{N}$

t ... Anzahl der Jahre (ganzzahlig)

$W(t)$... Wert zu Beginn des Jahres t in Euro (€)

$$D = \mathbb{N}$$

[...]	
[...]	
[...]	



Klassifikation

- Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) 3 Funktionale Zusammenhänge
- c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren
- b) C Interpretieren und Dokumentieren
- c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) mittel
- c) mittel

Punkteanzahl:

- a) 3
- b) 2
- c) 3

Thema: Wirtschaft

Quelle: teilweise Mitarbeit der Gruppe HUM Itemwriterschulung OÖ 2014

Kraftstoffverbrauch

Aufgabennummer: B_176

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Der Kraftstoffverbrauch eines Kraftfahrzeugs ist unter anderem abhängig von der gefahrenen Geschwindigkeit.

v ... Geschwindigkeit in Kilometern pro Stunde (km/h)

$K(v)$... Kraftstoffverbrauch bei einer konstanten Geschwindigkeit v in Litern pro 100 Kilometer (L/100 km)

- a) Die nachstehende Tabelle zeigt den bei einer Testfahrt festgestellten Kraftstoffverbrauch eines LKWs bei verschiedenen Geschwindigkeiten.

v in km/h	30	50	60
$K(v)$ in L/100 km	10	9,4	11,8

Der Kraftstoffverbrauch bei dieser Testfahrt kann in einem Bereich von 30 km/h bis 70 km/h annähernd durch eine quadratische Funktion der Form $K(v) = a \cdot v^2 + b \cdot v + c$ beschrieben werden.

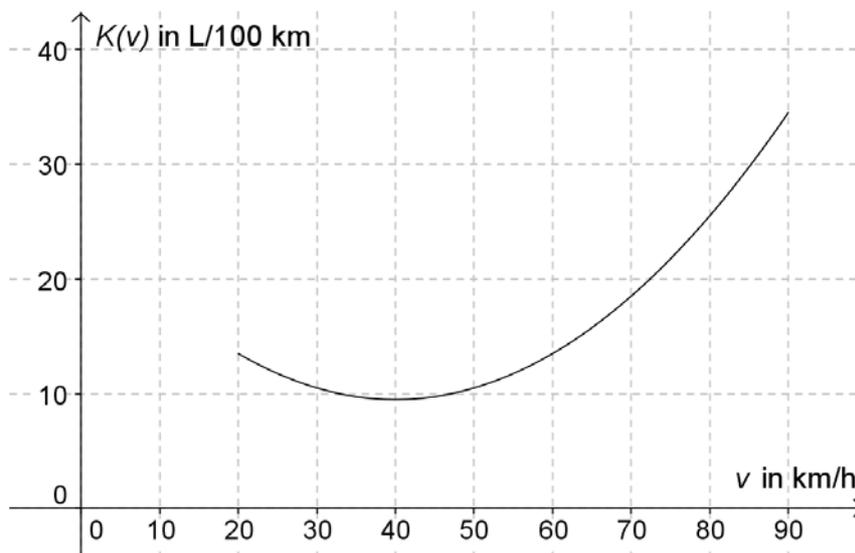
- Stellen Sie ein Gleichungssystem für die Berechnung der Koeffizienten a , b und c auf.
- Ermitteln Sie die Funktionsgleichung $K(v)$.

- b) Der Kraftstoffverbrauch eines Kleinlastwagens lässt sich im Intervall [30 km/h; 70 km/h] näherungsweise durch folgende Funktion K beschreiben:

$$K(v) = 0,005 \cdot v^2 - 0,4 \cdot v + 14,3$$

- Berechnen Sie diejenige Geschwindigkeit, bei der der Kraftstoffverbrauch minimal ist.

- c) Die nachstehende Grafik zeigt den Kraftstoffverbrauch eines Kleintransporters in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit beim Fahren mit gleichbleibendem Gang.



- Veranschaulichen Sie in der Grafik die momentane Änderungsrate des Kraftstoffverbrauchs bei einer Geschwindigkeit von 60 km/h.
- Lesen Sie die momentane Änderungsrate des Kraftstoffverbrauchs bei 60 km/h ab.

- d) Bei einem Test eines PKWs ergaben sich für den 4. Gang folgende Verbrauchswerte:

v in km/h	80	90	100	110	120
$K(v)$ in L/100 km	5,1	5,65	6,25	6,9	7,6

Zur Beschreibung des Kraftstoffverbrauchs kann man ab 80 km/h ein Modell verwenden, bei dem der Verbrauch mit zunehmender Geschwindigkeit konstant steigt.

- Argumentieren Sie, welcher Funktionstyp diesem Modell gerecht wird.
- Ermitteln Sie die Gleichung der zugehörigen Funktion mittels Regression.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

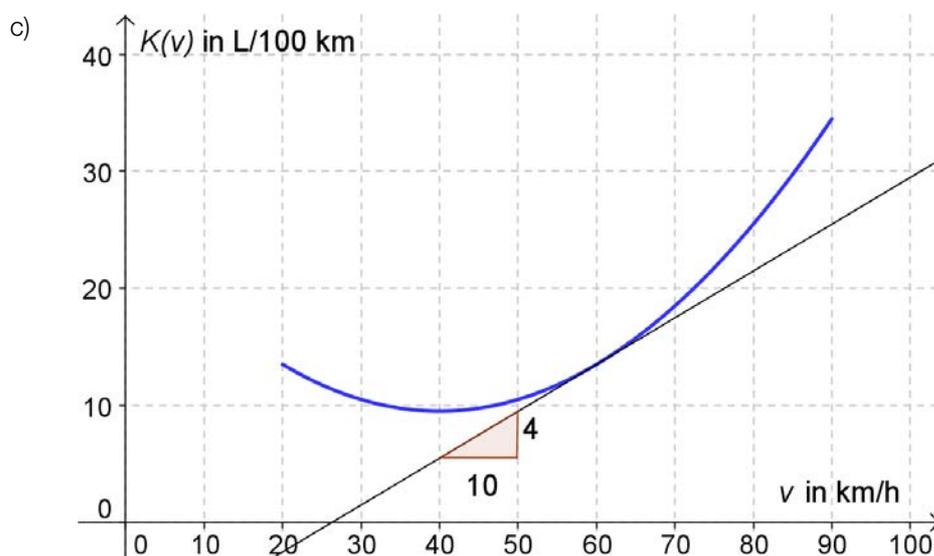
Möglicher Lösungsweg

a) $10 = 30^2 \cdot a + 30 \cdot b + c$
 $9,40 = 50^2 \cdot a + 50 \cdot b + c$
 $11,8 = 60^2 \cdot a + 60 \cdot b + c$

$$K(v) = 0,009 \cdot v^2 - 0,75 \cdot v + 24,4$$

b) $K'(v) = 0,01 \cdot v - 0,4 = 0$
 $v = 40$
 $K''(v) > 0$

Bei 40 km/h ist der Kraftstoffverbrauch minimal.



Die momentane Änderung des Kraftstoffverbrauchs bei einer Geschwindigkeit von 60 km/h beträgt 0,4 L/100 km pro km/h.

Eine angemessene Ungenauigkeit wird toleriert.

d) Der passende Funktionstyp ist eine lineare Funktion, da die Steigung konstant ist.

Berechnung eines linearen Modells mittels Technologieeinsatz:

$$K(v) = 0,0625 \cdot v + 0,05$$

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 2 Algebra und Geometrie
- b) 4 Analysis
- c) 4 Analysis
- d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) –
- c) –
- d) 5 Stochastik

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) A Modellieren und Transferieren
- d) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) –
- c) C Interpretieren und Dokumentieren
- d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) mittel
- c) mittel
- d) mittel

Punkteanzahl:

- a) 2
- b) 1
- c) 2
- d) 2

Thema: Alltag

Quellen: –

Rohstoffbedarf

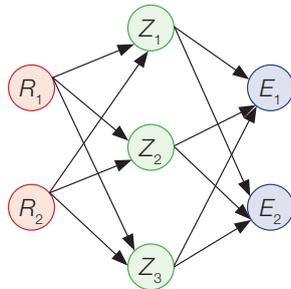
Aufgabennummer: B_162

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

In einem Unternehmen können die Verflechtungen zwischen den Rohstoffen R_1 und R_2 , den Zwischenprodukten Z_1 , Z_2 und Z_3 und den beiden Endprodukten E_1 und E_2 in einem zwei-stufigen Produktionsverfahren durch den nachstehenden Gozinto-Graphen und mit den beiden nachstehenden Tabellen dargestellt werden. Die Tabellen geben an, wie viele ME von den jeweiligen Rohstoffen bzw. Zwischenprodukten benötigt werden, um jeweils 1 ME der Zwischenprodukte bzw. Endprodukte herzustellen.



	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	10	5	0
R_2	15	0	25

	E_1	E_2
Z_1	30	35
Z_2	25	20
Z_3	0	10

Von E_1 werden 200 ME und von E_2 350 ME nachgefragt.

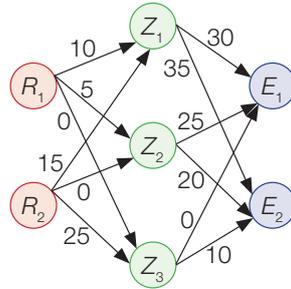
- Übertragen Sie die in den Tabellen angegebenen Mengen in den Gozinto-Graphen.
- Erstellen Sie eine Matrix, die den Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der beiden Endprodukte beschreibt.
 - Interpretieren Sie die Zahlen in der ersten Spalte dieser Matrix im gegebenen Sachzusammenhang.
- Es sollen 200 ME von E_1 und 350 ME von E_2 verkauft werden. Die nachgefragten Mengen von E_1 werden zu einem Preis von 4 €/ME und jene von E_2 zu 3,50 €/ME verkauft.
 - Ermitteln Sie den Gesamterlös.
- Berechnen Sie das Produkt der beiden Matrizen $\begin{pmatrix} 30 & 35 \\ 25 & 20 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 350 \end{pmatrix}$.
 - Geben Sie an, welchen Typ von Matrix das Ergebnis darstellt.
 - Interpretieren Sie, welche Aussagen über die oben beschriebene Produktion aus der berechneten Matrix abgelesen werden können.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



$$b) \begin{pmatrix} 10 & 5 & 0 \\ 15 & 0 & 25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 & 35 \\ 25 & 20 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 425 & 450 \\ 450 & 775 \end{pmatrix}$$

Vom Rohstoff R_1 werden für die Produktion von 1 ME des Endprodukts E_1 425 ME benötigt.

Vom Rohstoff R_2 werden für die Produktion von 1 ME des Endprodukts E_1 450 ME benötigt.

$$c) (4 \ 3,5) \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 350 \end{pmatrix} = 800 + 1\,225 = 2\,025$$

Der Gesamterlös beträgt € 2.025.

$$d) \begin{pmatrix} 30 & 35 \\ 25 & 20 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 350 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18\,250 \\ 12\,000 \\ 3\,500 \end{pmatrix}$$

Es handelt sich um einen dreizeiligen Spaltenvektor (3×1 -Matrix).

18250 ME des Zwischenprodukts Z_1 und 12000 ME des Zwischenprodukts Z_2 sowie 3500 ME des Zwischenprodukts Z_3 werden benötigt, um 200 ME von E_1 und 350 ME von E_2 herstellen zu können.

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 2 Algebra und Geometrie
- b) 2 Algebra und Geometrie
- c) 2 Algebra und Geometrie
- d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —
- d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren
- b) A Modellieren und Transferieren
- c) B Operieren und Technologieeinsatz
- d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

- a) —
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) —
- d) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

Punkteanzahl:

- | | |
|-----------|------|
| a) mittel | a) 1 |
| b) mittel | b) 3 |
| c) leicht | c) 1 |
| d) mittel | d) 3 |

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Körpergröße von Kindergartenkindern

Aufgabennummer: B_235

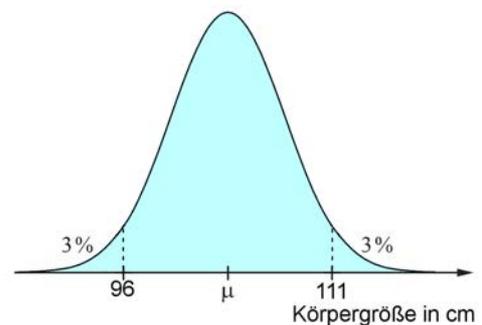
Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

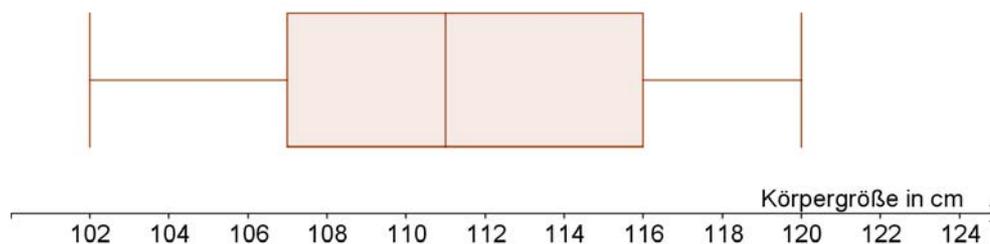
Bei den Vorsorgeuntersuchungen von Kindern wird auch die Körpergröße überprüft, um bei Auffälligkeiten rechtzeitig Therapiemaßnahmen setzen zu können.

- a) Die nebenstehende Glockenkurve nach Gauß schematisiert die Größenverteilung von 4-jährigen Kindern.
 Die 3 % am oberen und am unteren Ende weisen auf die auffällig großen bzw. die auffällig kleinen Kinder hin.



- Interpretieren Sie die Kurve in Bezug auf die Verteilung der Körpergröße von 4-jährigen Kindern und den Erwartungswert μ .
- Berechnen Sie die Standardabweichung σ .

- b) Als Ergebnis der Messung der Körpergröße von 5-jährigen Kindern wurde folgender Boxplot erstellt:



- Interpretieren Sie das Diagramm im Hinblick auf die Bedeutung der 5 Kennzahlen Minimum, Maximum, Median, 1. und 3. Quartil.

- c) Die gemessenen Körpergrößen der 4-jährigen Buben haben folgende Kennzahlen geliefert:

Minimum (Min):	96 cm
Maximum (Max):	112 cm
Median (Med):	103 cm
1. Quartil (Q_1):	100,5 cm
3. Quartil (Q_3):	108 cm

- Erstellen Sie mit diesen Kennzahlen einen Boxplot.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

- a) 3 % der 4-jährigen Kinder sind kleiner als 96 cm.
3 % der Kinder sind größer als 111 cm.
94 % der Kinder sind zwischen 96 cm und 111 cm groß.
Der Erwartungswert μ der Körpergröße bei 4-Jährigen liegt bei 103,5 cm,
Ermittlung von σ mittels Technologieeinsatz, z. B. durch Ablesen aus der Wertetabelle der Funktion „normalcdf“:
 $\sigma = 3,987\dots$
 $\sigma \approx 3,99$ cm

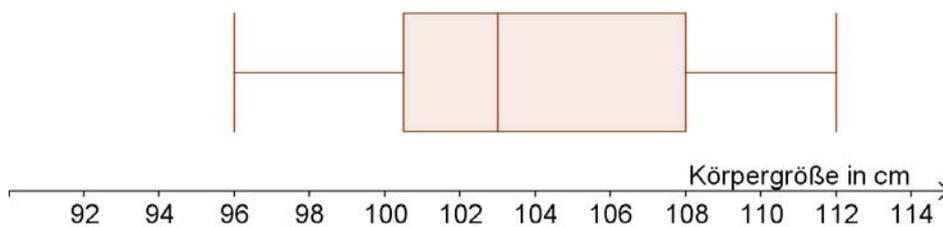
- b) Der Median m liegt in der Mitte einer geordneten Liste. Mindestens 50 % der Messwerte sind $\leq m$, mindestens 50 % sind $\geq m$. Die Quartile teilen die geordnete Liste in 4 Teile.

Aus dem Diagramm kann man die folgenden Größen ablesen:

Die Körpergrößen der 5-jährigen Kinder liegen zwischen 102 und 120 cm.
Der Median liegt bei 111 cm, das 1. Quartil bei 107 cm und das 3. Quartil bei 116 cm.

Der Unterschied zwischen Minimum und 1. Quartil beträgt 5 cm, zwischen 1. Quartil und Median 4 cm, zwischen Median und 3. Quartil 5 cm, zwischen 3. Quartil und Maximum 4 cm.

- c)



Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 5 Stochastik
- b) 5 Stochastik
- c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) C Interpretieren und Dokumentieren
- b) C Interpretieren und Dokumentieren
- c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) —
- c) —

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) leicht
- c) leicht

Punkteanzahl:

- a) 3
- b) 2
- c) 1

Thema: Alltag

Quelle: Statistische Kennzahlen: Forschungsinstitut für Kinderernährung, Dortmund

Straßenverkehr in Tirol (1)*

Aufgabennummer: B_209

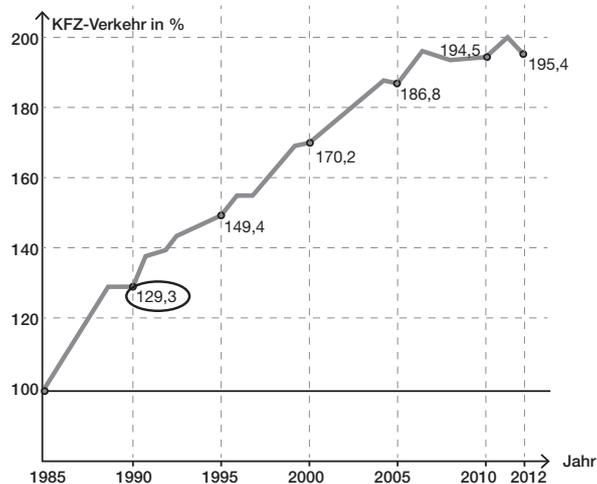
Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Das Verkehrsaufkommen wird seit vielen Jahren statistisch erfasst.

a) Die nachstehende Grafik zeigt die Entwicklung des KFZ-Verkehrs von 1985 bis 2012 in Tirol.



- Interpretieren Sie die Bedeutung der in der Grafik markierten Zahl 129,3 in diesem Sachzusammenhang.
- Interpretieren Sie die Bedeutung des folgenden Rechenausdrucks in diesem Sachzusammenhang:

$$\sqrt[10]{\frac{170,2}{129,3}} - 1 \approx 0,0279$$

- Erstellen Sie basierend auf den Daten der Grafik eine quadratische Regressionsfunktion. Wählen Sie dabei für das Jahr 1985 den Zeitpunkt $t = 0$.
- Ermitteln Sie mithilfe dieser Regressionsfunktion eine Prognose für den KFZ-Verkehr im Jahr 2013.

b) Die Anzahl der durchschnittlichen täglichen KFZ-Fahrten auf der Brennerautobahn kann für den Zeitraum 2000 bis 2007 durch die lineare Regressionsfunktion f beschrieben werden:

$$f(t) = 617 \cdot t + 28017$$

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ im Jahr 2000

$f(t)$... Anzahl der durchschnittlichen täglichen KFZ-Fahrten zur Zeit t

- Interpretieren Sie die Bedeutung des Koeffizienten 617 in diesem Sachzusammenhang.

- c) Auf einer österreichischen Transitroute wurden im Jahr 2003 insgesamt 1 700 000 Fahrten gezählt. Im Jahr 2011 waren es bereits 2 006 000 Fahrten.
- Stellen Sie diejenige Funktionsgleichung auf, die die Entwicklung der Anzahl der Fahrten auf dieser Route mit einer Exponentialfunktion der Form $y(t) = a \cdot b^t$ beschreibt.
- t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ im Jahr 2003
 $y(t)$... Zahl der jährlichen Fahrten zur Zeit t
- Erklären Sie den Unterschied zwischen exponentiellem und linearem Wachstum.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

- a) 129,3 bedeutet, dass der Verkehr im Jahr 1990 gegenüber dem Jahr 1985 um 29,3 % zugenommen hat.

Der gegebene Rechenausdruck gibt an, um wie viel Prozent das KFZ-Verkehrsaufkommen durchschnittlich jeweils von einem zum nächsten Jahr im Zeitraum 1990 bis 2000 zugenommen hat.

quadratische Regression: $r(t) = -0,09 \cdot t^2 + 6,11 \cdot t + 99,93$

2013 entspricht $t = 28$: $r(28) = 197,50... \approx 197,5$.

Die Regressionsfunktion prognostiziert ein KFZ-Verkehrsaufkommen von rund 197,5 % bezogen auf das KFZ-Verkehrsaufkommen im Jahr 1985.

- b) 617 entspricht der jährlichen Zunahme der durchschnittlichen täglichen KFZ-Fahrten auf der Brennerautobahn.

c) $a = 1\,700\,000$

$$b = \sqrt[8]{\frac{2\,006\,000}{1\,700\,000}} = 1,0209... \approx 1,021$$

$$y(t) = 1\,700\,000 \cdot 1,021^t$$

Bei einem linearen Modell ist die absolute Änderung pro Zeiteinheit konstant. Bei einem exponentiellen Modell ändert sich die Größe in jeweils gleichen Zeitschritten immer um denselben Faktor.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × C1: für die richtige Interpretation der markierten Zahl
 1 × C2: für die richtige Interpretation des Rechenausdrucks
 1 × A: für das richtige Erstellen der Regressionsfunktion
 1 × B: für das richtige Ermitteln der Prognose für das Jahr 2013
- b) 1 × C: für die richtige Interpretation des Koeffizienten
- c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung
 1 × D: für die richtige Erklärung

Küchengerät

Ein neues Küchengerät wird auf den Markt gebracht.

- a) Die zeitliche Entwicklung der Verkaufszahlen dieses Küchengeräts soll durch die beschränkte Wachstumsfunktion N_1 beschrieben werden.

$$N_1(t) = S \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot t})$$

t ... Zeit ab Verkaufsbeginn in Wochen

$N_1(t)$... insgesamt verkaufte Menge bis zur Zeit t in Stück

S ... Sättigungsmenge in Stück

λ ... positiver Parameter

- 1) Argumentieren Sie mathematisch anhand der Funktionsgleichung, dass gilt: $N_1(0) = 0$
[0/1 P.]

Die Sättigungsmenge beträgt 5 000 Stück. Eine Woche nach Verkaufsbeginn wurden bereits 350 Stück verkauft.

- 2) Berechnen Sie λ . [0/1 P.]

Vereinfacht kann die zeitliche Entwicklung der Verkaufszahlen dieses Küchengeräts für einen eingeschränkten Zeitraum auch durch die Funktion N_2 beschrieben werden.

$$N_2(t) = 350 \cdot t$$

t ... Zeit ab Verkaufsbeginn in Wochen

$N_2(t)$... insgesamt verkaufte Menge bis zur Zeit t in Stück

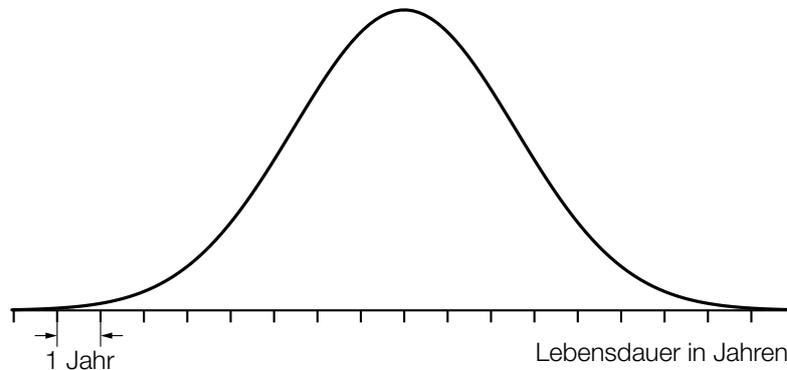
Jemand hat die Gleichungen $N_1(t) = N_2(t)$ und $N_1'(t) = N_2'(t)$ nach t gelöst.

- 3) Ordnen Sie den beiden Gleichungen jeweils die zutreffende Aussage aus A bis D zu.
[0/1 P.]

$N_1(t) = N_2(t)$	
$N_1'(t) = N_2'(t)$	

A	Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist $\{0; 1\}$.
B	Die Lösung dieser Gleichung liegt im Intervall $]0; 1[$.
C	Die Lösung dieser Gleichung liegt im Intervall $[1; \infty[$.
D	Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist $\{0\}$.

- b) Die Lebensdauer des Küchengeräts wird als normalverteilt mit einem Erwartungswert von 10 Jahren angenommen. Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Dichtefunktion dieser Normalverteilung. Der Abstand zwischen zwei Markierungen auf der Achse entspricht 1 Jahr.



Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Küchengerät dieses Typs eine Lebensdauer von maximal 7 Jahren hat, beträgt 12 %.

- 1) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung diese Wahrscheinlichkeit. [0/1 P.]
 - 2) Berechnen Sie die zugehörige Standardabweichung. [0/1 P.]
- c) Eine Marktforschungsanalyse zu diesem Küchengerät hat ergeben, dass folgende Mengen bei den jeweiligen Preisen abgesetzt werden können:

abgesetzte Menge in Stück	210	420	1 430	1 760
Preis in Euro/Stück	55	45	20	15

Die Kosten für die Produktion von 1 430 Stück betragen 28.000 Euro. Diese Menge wird zu einem Preis von 20 Euro/Stück abgesetzt.

- 1) Überprüfen Sie nachweislich, ob der Break-even-Point bei weniger als 1 430 Stück erreicht wird. [0/1 P.]

Mit den Daten aus der obigen Tabelle soll mithilfe von exponentieller Regression eine Preis-Absatz-Funktion p erstellt werden.

$$p(x) = a \cdot e^{-\lambda \cdot x}$$

x ... abgesetzte Menge in Stück

$p(x)$... Preis bei der abgesetzten Menge x in Euro/Stück

- 2) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der Funktion p auf. [0/1 P.]
- 3) Begründen Sie, warum es gemäß diesem Modell keine Sättigungsmenge gibt. [0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

a1) $N_1(0) = S \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot 0}) = S \cdot (1 - 1) = 0$

a2) $S = 5000$

$N_1(1) = 350$ oder $5000 \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot 1}) = 350$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$\lambda = -\ln(0,93) = 0,07257\dots$

a3)

$N_1(t) = N_2(t)$	A
$N_1'(t) = N_2'(t)$	B

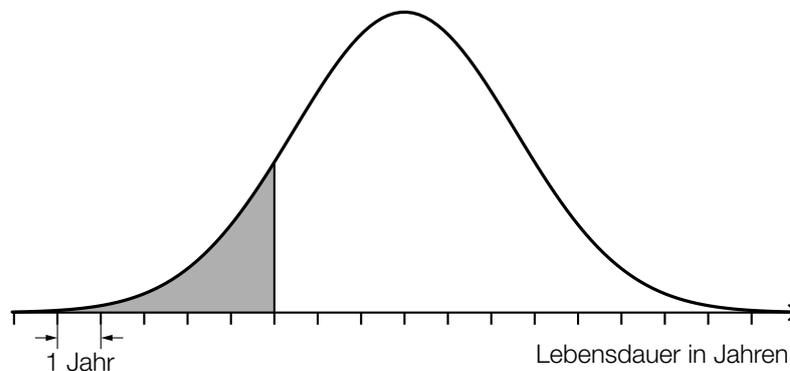
A	Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist $\{0; 1\}$.
B	Die Lösung dieser Gleichung liegt im Intervall $]0; 1[$.
C	Die Lösung dieser Gleichung liegt im Intervall $[1; \infty[$.
D	Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist $\{0\}$.

a1) Ein Punkt für das richtige Argumentieren.

a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen von λ .

a3) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

b1)



b2) X ... Lebensdauer in Jahren

$P(X \leq 7) = 0,12$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$\sigma = 2,55\dots$ Jahre

b1) Ein Punkt für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit.

b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Standardabweichung.

c1) $20 \cdot 1\,430 - 28\,000 = 600$

Der Gewinn beim Verkauf von 1 430 Stück beträgt 600 Euro, daher wird der Break-even-Point bei weniger als 1 430 Stück erreicht.

c2) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$$p(x) = 64,7 \cdot e^{-0,00083 \cdot x} \quad (\text{Parameter gerundet})$$

c3) Die Sättigungsmenge ist die Nullstelle der Preis-Absatz-Funktion. Da hier ein exponentielles Modell gewählt wurde, gibt es keine Nullstelle.

c1) Ein Punkt für das richtige nachweisliche Überprüfen.

c2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung von p .

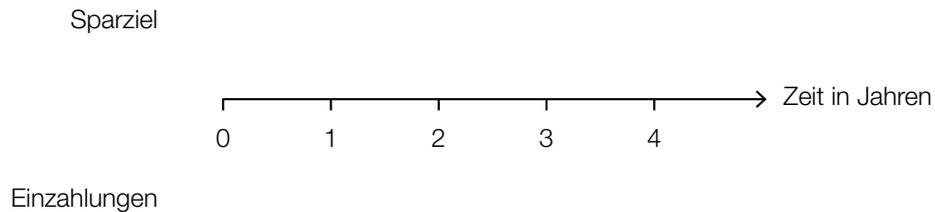
c3) Ein Punkt für das richtige Begründen.

Esszimmereinrichtung

Petra möchte eine neue Esszimmereinrichtung kaufen, die € 4.000 kostet.

- a) Petra hat vor 3 Jahren € 2.000 und vor 1 Jahr den Betrag X auf ein Konto eingezahlt, sodass sie nun als Sparziel den Betrag € 4.000 auf diesem Konto hat.

- 1) Veranschaulichen Sie diesen Zahlungsstrom (Einzahlungen und Sparziel) auf der nachstehenden Zeitachse. [0/1 P.]



Die eingezahlten Beträge werden mit dem Jahreszinssatz i verzinst.

- 2) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Höhe des Betrags X auf. Verwenden Sie dabei die Beträge € 4.000 und € 2.000 sowie den Jahreszinssatz i .

$X =$ _____ [0/1 P.]

- b) Petra kann die Esszimmereinrichtung auch bei einem Versandhaus über Ratenzahlung finanzieren. Aufgrund der anfallenden Zinsen betragen die Kosten dabei monatlich € 1,65 pro € 100 offener Restschuld.

Petra berechnet für diese Ratenzahlung einen Jahreszinssatz von rund 21,7 %.

- 1) Überprüfen Sie nachweislich, ob Petras Berechnung stimmt. [0/1 P.]

Beim Kauf der Esszimmereinrichtung um € 4.000 über Ratenzahlung müssen 12 nachschüssige Monatsraten in Höhe von jeweils € 370 und ein Restbetrag, der zeitgleich mit der letzten Monatsrate fällig ist, bezahlt werden. Der Jahreszinssatz beträgt 21,7 %.

- 2) Berechnen Sie die Höhe des Restbetrags. [0/1 P.]

Beim Kauf eines Möbelstücks mit dem Verkaufspreis W über Ratenzahlung müssen 3 nachschüssige Monatsraten der Höhe R bezahlt werden. Der zugehörige monatliche Aufzinsungsfaktor wird mit q_{12} bezeichnet.

- 3) Kreuzen Sie die zutreffende Gleichung an. [1 aus 5] [0/1 P.]

$W = R + \frac{R}{q_{12}} + \frac{R}{q_{12}^2}$	<input type="checkbox"/>
$W \cdot q_{12}^3 = R + \frac{R}{q_{12}} + \frac{R}{q_{12}^2}$	<input type="checkbox"/>
$W = \frac{R}{q_{12}} + \frac{R}{q_{12}^2} + \frac{R}{q_{12}^3}$	<input type="checkbox"/>
$W \cdot q_{12}^3 = \frac{R}{q_{12}} + \frac{R}{q_{12}^2} + \frac{R}{q_{12}^3}$	<input type="checkbox"/>
$W \cdot q_{12}^3 = R \cdot q_{12}^3 + R \cdot q_{12}^2 + R \cdot q_{12}$	<input type="checkbox"/>

- c) Petra kann die Esszimmereinrichtung auch über einen Kredit mit einer Laufzeit von 5 Jahren finanzieren.

Dazu wird eine gleichbleibende Annuität berechnet und ein Tilgungsplan erstellt.

Allerdings ist nach 5 Jahren die Schuld noch nicht vollständig getilgt, weil während der Laufzeit eine einmalige Änderung des Zinssatzes stattgefunden hat.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	---	---	---	€ 4.000,00
1	€ 100,00	€ 760,99	€ 860,99	€ 3.239,01
2	€ 80,98	€ 780,01	€ 860,99	€ 2.459,00
3	€ 98,36	€ 762,63	€ 860,99	€ 1.696,37
4	€ 67,85	€ 793,13	€ 860,99	€ 903,24
5	€ 36,13	€ 824,86	€ 860,99	€ 78,38

- 1) Erklären Sie, woran man erkennen kann, dass während der Laufzeit eine Änderung des Zinssatzes stattgefunden hat.

[0/1 P.]

- 2) Berechnen Sie den Zinssatz im Jahr 5.

[0/1 P.]

Der Kredit soll am Ende des Jahres 5 vollständig getilgt werden.
Dadurch verändert sich die letzte Zeile des obigen Tilgungsplans.

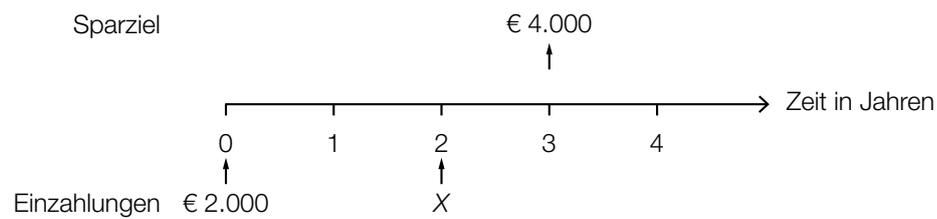
- 3) Tragen Sie in der nachstehenden Tabelle die beiden fehlenden Zahlen ein.

[0/1 P.]

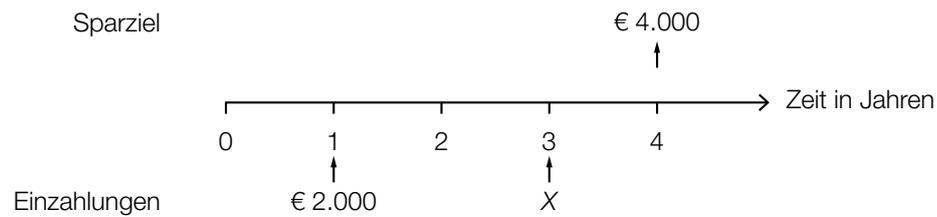
Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
5	€ 36,13			€ 0,00

Möglicher Lösungsweg

a1)



oder:



a2)
$$X = \frac{4000}{1+i} - 2000 \cdot (1+i)^2$$

- a1) Ein Punkt für das richtige Veranschaulichen auf der Zeitachse.
a2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.

b1) „Monatlich € 1,65 pro € 100“ bedeutet, dass der Zinssatz 1,65 % p. m. beträgt.

$$i = 1,0165^{12} - 1 = 0,2169\dots$$

Der Jahreszinssatz beträgt also rund 21,7 %.

b2)
$$X = 4000 \cdot 1,217 - 370 \cdot \frac{1,217^{\frac{12}{12}} - 1}{1,217^{\frac{1}{12}} - 1} = 2,053\dots$$

Der Restbetrag hat eine Höhe von € 2,05.

b3)

$W = \frac{R}{q_{12}} + \frac{R}{q_{12}^2} + \frac{R}{q_{12}^3}$	<input checked="" type="checkbox"/>

b1) Ein Punkt für das richtige nachweisliche Überprüfen.

b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Höhe des Restbetrags.

b3) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

c1) Die Zinsen im Jahr 3 sind (trotz gleichbleibender Annuität) höher als im Jahr 2.

c2)
$$i = \frac{Z_5}{K_4} = \frac{36,13}{903,24} = 0,0400\dots$$

Der Zinssatz im Jahr 5 beträgt rund 4 %.

c3)

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
5	€ 36,13	€ 903,24	€ 939,37	€ 0,00

c1) Ein Punkt für das richtige Erklären.

c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Zinssatzes.

c3) Ein Punkt für das Eintragen der beiden richtigen Zahlen.

Reisebus*

Aufgabennummer: B_516

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Ein Reiseunternehmen plant, einen neuen Reisebus anzuschaffen.

- a) Für den Reisebus rechnet das Reiseunternehmen mit Anschaffungskosten in Höhe von € 180.000, einer Nutzungsdauer von 6 Jahren und einem Restwert in Höhe von € 40.000. Zudem rechnet es mit jährlichen Versicherungskosten in Höhe von € 3.300, jährlichen Treibstoffkosten in Höhe von € 8.500 und jährlichen Reparaturkosten in Höhe von € 8.200. Das Reiseunternehmen erwartet durch die Anschaffung des Reisebusses jährliche Einnahmen in Höhe von € 50.000.

1) Übertragen Sie alle Einnahmen und Ausgaben in die nachstehende Tabelle.

Jahr	Einnahmen in €	Ausgaben in €
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		

2) Erklären Sie anhand der obigen Tabelle, warum diese Investition vorteilhaft sein könnte.

Das Reiseunternehmen rechnet mit einem kalkulatorischen Zinssatz von 4 % p. a.

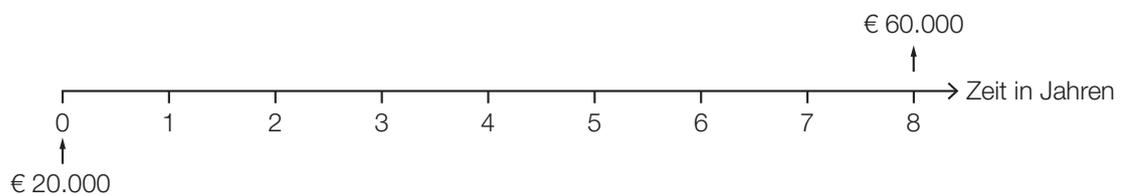
3) Berechnen Sie den Kapitalwert dieser Investition.

- b) Für den Ankauf des Reisebusses hat das Reiseunternehmen in den letzten 8 Jahren eine Rücklage in Höhe von € 60.000 gebildet.

Die Höhe der Rücklage ergibt sich aus einer Einmalzahlung in Höhe von € 20.000 und regelmäßigen Zahlungen R :

$$20\,000 \cdot 1,021^8 + R \cdot \frac{1,021^4 - 1}{1,021 - 1} \cdot 1,021^2 = 60\,000$$

- 1) Tragen Sie alle Zahlungen R auf der nachstehenden Zeitachse ein.



- 2) Berechnen Sie die Höhe von R .

- c) Für den Ankauf des Reisebusses nimmt das Reiseunternehmen einen Kredit zu einem Zinssatz von 3 % p. a. auf. Die Rückzahlung des Kredits erfolgt durch gleichbleibende jährliche Annuitäten.

Einige Werte des Tilgungsplans sind in der nachstehenden Tabelle angegeben.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
2				€ 35.331,00
3	€ 1.059,93	€ 2.440,07		

- 1) Tragen Sie in der obigen Tabelle die Höhe der Annuität in die grau markierte Zelle ein.

Bei der weiteren Tilgung des Kredits verbleibt ein Restbetrag, der ein Jahr nach der letzten Vollrate bezahlt wird.

- 2) Ermitteln Sie die Höhe dieses Restbetrags.

Möglicher Lösungsweg

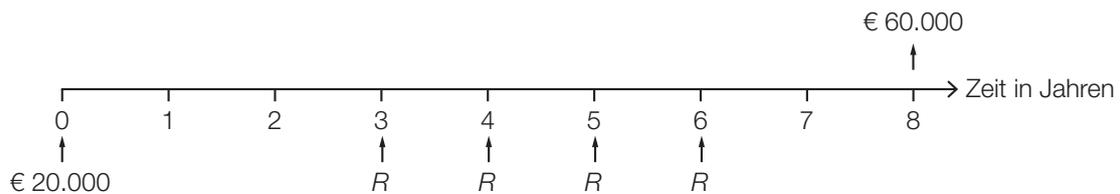
a1)

Jahr	Einnahmen in €	Ausgaben in €
0		180 000
1	50 000	20 000
2	50 000	20 000
3	50 000	20 000
4	50 000	20 000
5	50 000	20 000
6	90 000	20 000

a2) Da die Summe der Einnahmen (€ 340.000) höher als die Summe der Ausgaben (€ 300.000) ist, könnte die Investition vorteilhaft sein.

a3) $C_0 = -180\,000 + \frac{30\,000}{1,04} + \frac{30\,000}{1,04^2} + \frac{30\,000}{1,04^3} + \frac{30\,000}{1,04^4} + \frac{30\,000}{1,04^5} + \frac{70\,000}{1,04^6} = 8\,876,6\dots$
 Der Kapitalwert beträgt rund € 8.877.

b1)



b2) $R = (60\,000 - 20\,000 \cdot 1,021^8) \cdot \frac{1,021 - 1}{(1,021^4 - 1) \cdot 1,021^2} = 8\,455,20\dots$

Die Höhe von R beträgt € 8.455,20.

c1)

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
2				€ 35.331,00
3	€ 1.059,93	€ 2.440,07	€ 3.500,00	

$$c2) 35331 = 3500 \cdot \frac{1,03^n - 1}{1,03 - 1} \cdot \frac{1}{1,03^n}$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$n = 12,204\dots$$

$$\left(35331 - 3500 \cdot \frac{1,03^{12} - 1}{1,03 - 1} \cdot \frac{1}{1,03^{12}}\right) \cdot 1,03^{13} = 722,498\dots$$

Die Höhe des Restbetrags beträgt € 722,50.

Lösungsschlüssel

- a1) Ein Punkt für das richtige Übertragen aller Einnahmen und Ausgaben.
- a2) Ein Punkt für das richtige Erklären.
- a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Kapitalwerts.
- b1) Ein Punkt für das richtige Eintragen der vier Zahlungen.
- b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Höhe von R .
- c1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Höhe der Annuität.
- c2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Höhe des Restbetrags.

E-Reader*

Aufgabennummer: B_224

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Ein Unternehmen bringt einen neuen E-Reader auf den Markt. Die nachstehende Tabelle beschreibt die Entwicklung der Anzahl der insgesamt (von Anfang an) verkauften E-Reader in einer bestimmten Region.

Zeit in Wochen	Anzahl der insgesamt (von Anfang an) verkauften E-Reader
1	179
2	364
3	674
4	981
5	1310
6	1700
7	2055
8	2280
9	2470
10	2500
11	2540
12	2545

a) Betrachtet man nur die 5 Zahlenpaare im Zeitintervall [3; 7], so zeigt sich ein annähernd linearer Verlauf.

- Ermitteln Sie die Regressionsgerade für das Zeitintervall [3; 7].
- Interpretieren Sie die Steigung dieser Regressionsgeraden im Sachzusammenhang.

b) Betrachtet man nur die ersten 3 Zahlenpaare, so zeigt sich ein annähernd exponentieller Verlauf. Dieser kann durch

$$V_1(t) = 93,7 \cdot 1,94^t$$

oder durch

$$V_2(t) = 93,7 \cdot e^{0,662688 \cdot t}$$

dargestellt werden.

t ... Zeit in Wochen

$V_1(t)$, $V_2(t)$... Anzahl der bis zur Zeit t insgesamt verkauften E-Reader

- Erklären Sie, warum beide Funktionen V_1 und V_2 annähernd denselben Wachstumsverlauf beschreiben.
- Berechnen Sie die Verdoppelungszeit in diesem exponentiellen Wachstumsmodell.

* ehemalige Klausuraufgabe

- c) Betrachtet man alle 12 Zahlenpaare, so lässt sich die Entwicklung der Anzahl der insgesamt verkauften E-Reader näherungsweise durch eine logistische Funktion V beschreiben:

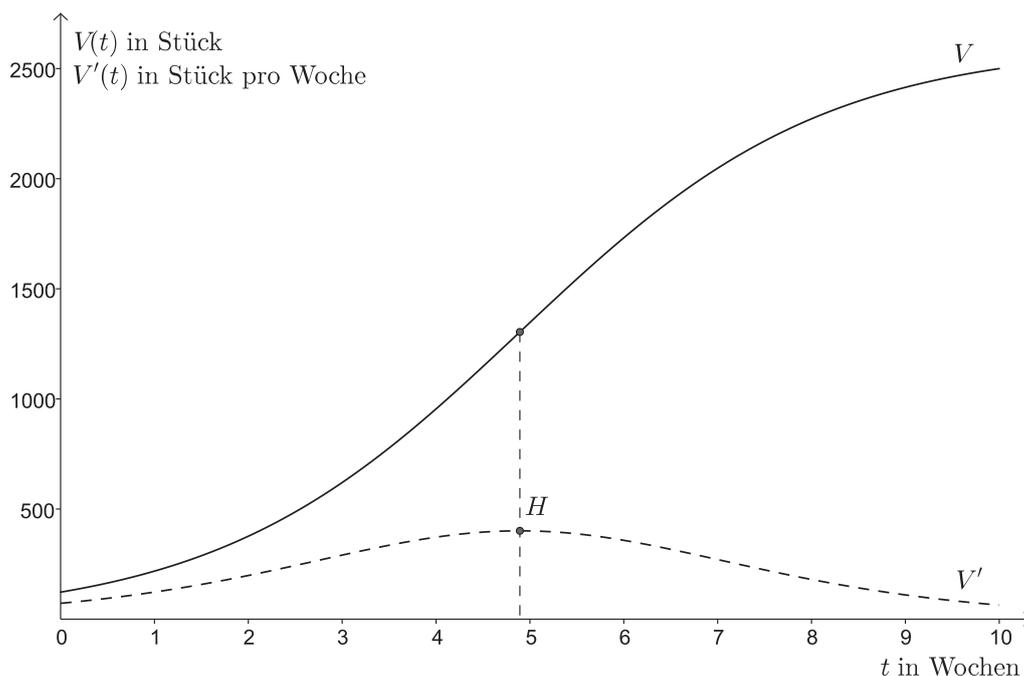
$$V(t) = \frac{2608}{1 + 20,28 \cdot e^{-0,6151 \cdot t}}$$

t ... Zeit in Wochen

$V(t)$... Anzahl der bis zur Zeit t insgesamt verkauften E-Reader

- Begründen Sie anhand der gegebenen Funktion, warum die Funktionswerte sich mit wachsendem t dem maximalen Wert 2608 annähern.
- Berechnen Sie, um wie viel der logistische Funktionswert $V(8)$ vom gegebenen Tabellenwert bei 8 Wochen abweicht.

In der nachstehenden Grafik sind die logistische Funktion V sowie deren Ableitungsfunktion V' grafisch dargestellt.



- Interpretieren Sie die Bedeutung der Koordinaten des Hochpunktes H der Ableitungsfunktion V' im Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

- a) Ermitteln der Regressionsgerade mittels Technologieeinsatz:

$$V(t) = 348,1 \cdot t - 396,5$$

t ... Zeit in Wochen

$V(t)$... Anzahl der bis zur Zeit t insgesamt verkauften E-Reader

In diesem Zeitraum werden nach diesem Modell pro Woche rund 348 Stück verkauft.

- b) Da $1,94 \approx e^{0,662688}$, beschreiben V_1 und V_2 annähernd denselben Wachstumsverlauf.

$$\text{Verdoppelungszeit: } T = \frac{\ln(2)}{\ln(1,94)} = 1,045\dots$$

Die Verdoppelungszeit beträgt rund 1,05 Wochen.

- c) Da für großes t der Wert $e^{-0,6151 \cdot t}$ gegen null geht, nähert sich der Nenner der Zahl 1 und $V(t)$ damit 2608.

Funktionswert nach 8 Wochen: $V(8) \approx 2272$

Abweichung vom gegebenen Tabellenwert: $2280 - 2272 = 8$

Der logistische Funktionswert weicht um ca. 8 Stück vom gegebenen Tabellenwert ab.

Die 1. Koordinate von H ist nach diesem Modell derjenige Zeitpunkt, in dessen Nähe am meisten E-Reader pro Woche verkauft wurden. Die 2. Koordinate entspricht in etwa der Anzahl der verkauften E-Reader in dieser Woche.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × B: für die richtige Ermittlung der Regressionsgeraden
1 × C: für die richtige Interpretation der Steigung im Sachzusammenhang
- b) 1 × D: für die richtige Erklärung, warum V_1 und V_2 annähernd denselben Wachstumsverlauf beschreiben
1 × B: für die richtige Berechnung der Verdoppelungszeit mithilfe der Funktion V_1 oder V_2
- c) 1 × D: für die richtige Begründung, warum sich die Funktionswerte mit wachsendem t dem maximalen Wert 2608 annähern
1 × B: für die richtige Berechnung der Abweichung
1 × C: für die richtige Interpretation der Koordinaten des Hochpunktes im Sachzusammenhang

Investitionen*

Aufgabennummer: B_296

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

a) Ein Unternehmen überlegt, eine neue Maschine anzuschaffen. Die Anschaffungskosten betragen € 120.000. Die Nutzungsdauer wird mit 5 Jahren angenommen. Nach 5 Jahren kann die Maschine um 40 % des Anschaffungswerts verkauft werden.

Man rechnet bei Ankauf der Maschine mit jährlichen Einnahmen von € 25.000. Die Kosten für die Wartung betragen jährlich € 5.000. Nach 2 und 4 Jahren muss ein Teil der Maschine ausgetauscht werden. Dieser Austausch kostet jeweils € 1.250.

– Übertragen Sie für den Zeitraum der Nutzungsdauer die Einnahmen und die Ausgaben in die nachstehende Tabelle.

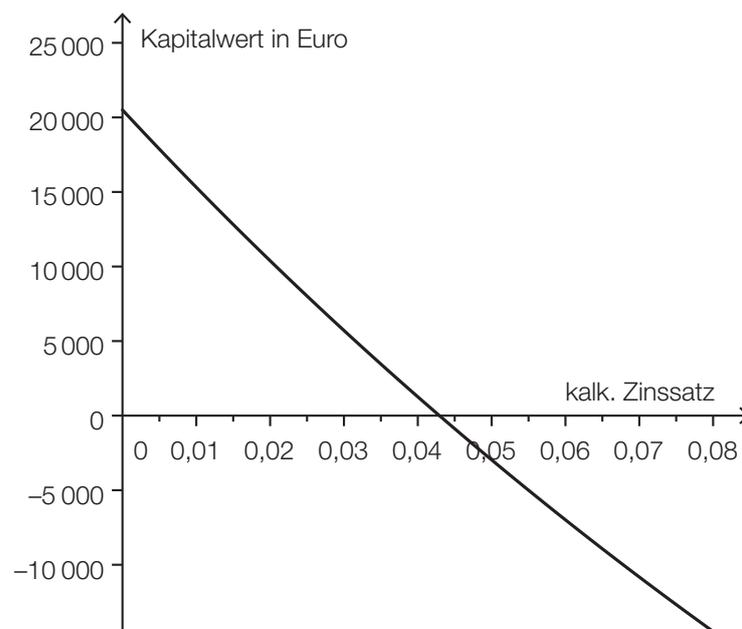
Jahr	Einnahmen	Ausgaben
0		
1		
2		
3		
4		
5		

- b) Ein Unternehmen überlegt, eine neue Maschine anzuschaffen. Die Anschaffungskosten betragen € 120.000. Die Nutzungsdauer wird mit 5 Jahren angenommen. Nach 5 Jahren kann die Maschine um 40 % des Anschaffungswerts verkauft werden.

Die Betriebsleiterin kann einen Pauschalvertrag aushandeln, der auch den Austausch von Teilen beinhaltet. Die Wartungskosten betragen € 5.500 pro Jahr. Zusätzlich rechnet sie mit einmaligen Einschulungskosten von € 5.000 am Beginn. Die jährlichen Einnahmen werden mit € 25.000 angenommen. Der Wiederverkaufswert bleibt gleich. Man rechnet mit einem kalkulatorischen Zinssatz von 2,5 %.

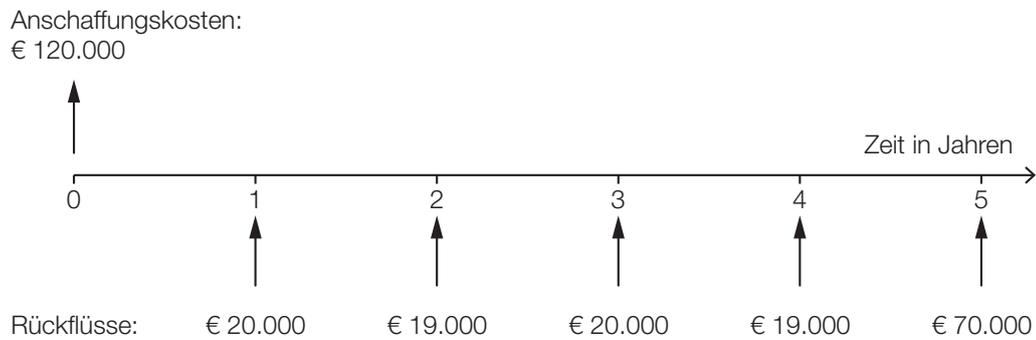
– Berechnen Sie den Kapitalwert dieser Investition.

In der nachstehenden Abbildung ist der Kapitalwert dieser Investition in Abhängigkeit vom kalkulatorischen Zinssatz dargestellt.



- Lesen Sie den internen Zinssatz dieser Investition ab.
– Begründen Sie, warum diese Investition vorteilhaft ist.

c) Die Anschaffungskosten und Rückflüsse einer anderen Investition sind in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



Die Nutzungsdauer wird mit 5 Jahren angenommen. Die Rückflüsse können zu einem Zinssatz von 3 % wiederveranlagt werden.

- Berechnen Sie den Endwert der wiederveranlagten Rückflüsse.
- Berechnen Sie den modifizierten internen Zinssatz.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)

Jahr	Einnahmen	Ausgaben
0		€ 120.000
1	€ 25.000	€ 5.000
2	€ 25.000	€ 6.250
3	€ 25.000	€ 5.000
4	€ 25.000	€ 6.250
5	€ 73.000	€ 5.000

b) Barwert der Einnahmen: $25\,000 \cdot \frac{1,025^5 - 1}{0,025} \cdot \frac{1}{1,025^5} + 48\,000 \cdot \frac{1}{1,025^5} = 158\,570,718\dots$

Barwert der Ausgaben: $120\,000 + 5\,000 + 5\,500 \cdot \frac{1,025^5 - 1}{0,025} \cdot \frac{1}{1,025^5} = 150\,552,056\dots$

Kapitalwert: € 8.018,66

interner Zinssatz: 4,3 %

Toleranzbereich: [4,2 %; 4,4 %]

Diese Investition ist vorteilhaft, weil der Kapitalwert positiv ist.

oder:

Diese Investition ist vorteilhaft, weil der interne Zinssatz höher ist als der Kalkulationszinssatz.

c) $20\,000 \cdot 1,03^4 + 19\,000 \cdot 1,03^3 + 20\,000 \cdot 1,03^2 + 19\,000 \cdot 1,03 + 70\,000 = 154\,059,989\dots$

$$i_{\text{mod}} = \sqrt[5]{\frac{154\,059,989\dots}{120\,000}} - 1 = 0,0512\dots$$

Der modifizierte interne Zinssatz beträgt rund 5,1 %.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A1: für das richtige Übertragen der Einnahmen
1 × A2: für das richtige Übertragen der Ausgaben
- b) 1 × B: für die richtige Berechnung des Kapitalwerts
1 × C: für das richtige Ablesen des internen Zinssatzes im Toleranzbereich [4,2 %; 4,4 %]
1 × D: für eine richtige Begründung zur Vorteilhaftigkeit dieser Investition
- c) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Endwerts
1 × B2: für die richtige Berechnung des modifizierten internen Zinssatzes

Kreditrückzahlung*

Aufgabennummer: B_206

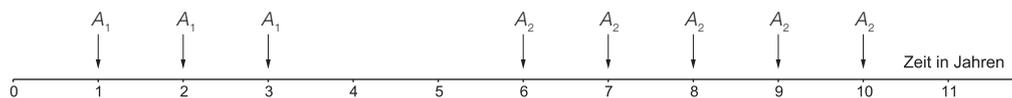
Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Für den Kauf eines Grundstücks nimmt Herr Maier einen Kredit auf. Ursprünglich vereinbart er mit seiner Bank, diesen innerhalb von 10 Jahren in Form von gleich hohen, nachschüssigen, jährlichen Annuitäten A_1 zurückzuzahlen. Dieser Plan ändert sich jedoch.

Der tatsächliche Verlauf der vollständigen Rückzahlung von Herrn Maier ist auf der nachstehenden Zeitachse dargestellt.



- a) In den ersten 3 Jahren läuft die Kredittilgung nach dem ursprünglichen Plan. Für das 3. Jahr der Rückzahlung ergeben sich folgende Einträge im Tilgungsplan:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
3	€ 3.703,15	€ 13.881,45	€ 17.584,60	€ 109.556,81

- Berechnen Sie den zugrunde liegenden jährlichen Zinssatz dieser Kredittilgung.
 - Berechnen Sie die ursprüngliche Kredithöhe.
- b) Fassen Sie die tatsächlich erfolgten Zahlungen wie in der oben dargestellten Zeitachse als 2 nachschüssige Renten mit Annuitäten A_1 und A_2 auf.
- Übersetzen Sie den oben dargestellten Zahlungsstrom in einen passenden Text, der den Rückzahlungsverlauf beschreibt.
 - Markieren Sie jeweils die Bezugszeitpunkte für die Barwerte und die Endwerte der beiden Renten in der oben dargestellten Zeitachse.
- c) Nach dem Bezahlen der Annuitäten A_1 verbleibt am Ende des 3. Jahres eine Restschuld.
- Begründen Sie, warum sich die Höhe dieser Restschuld bis zum Ende des 5. Jahres ändert.

- d) Am Ende des 5. Jahres beträgt die verbleibende Schuld € 116.228,82.
Eine weitere Rückzahlungsvariante, die die Laufzeit verlängert hätte, wäre gewesen:
Herr Maier zahlt weiterhin jährlich Annuitäten in Höhe von € 17.584,60.
Die Bank verlangt ab dem 6. Jahr Zinsen in Höhe von 3,5 % p. a.

Die vorletzte Zeile des sich daraus ergebenden Tilgungsplans lautet:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
	€ 969,26	€ 16.615,34	€ 17.584,60	€ 11.077,75

- Bestimmen Sie, in welchem Jahr (vom Zeitpunkt der Aufnahme des Kredits) die Zahlung erfolgt, die in dieser Zeile des Tilgungsplans dargestellt ist.
- Ermitteln Sie die letzte Zeile dieses Tilgungsplans.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

- a) Die Höhe der ursprünglichen Schuld kann durch direktes Rückrechnen im Tilgungsplan erfolgen.

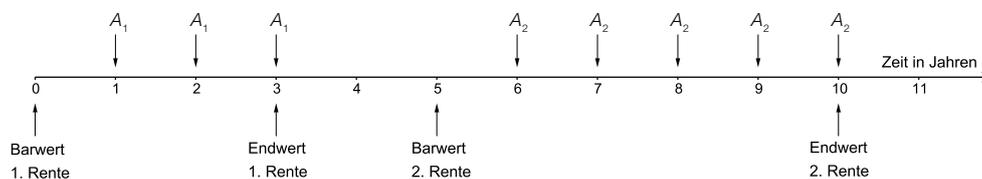
Restschuld des 2. Jahres = € 109.556,81 + € 13.881,45 = € 123.438,26

$$\text{Zinssatz: } i = \frac{3703,15}{123438,26} = 0,030\dots \approx 3 \%$$

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 150.000,00
1	€ 4.500,00	€ 13.084,60	€ 17.584,60	€ 136.915,40
2	€ 4.107,46	€ 13.477,14	€ 17.584,60	€ 123.438,26
3	€ 3.703,15	€ 13.881,45	€ 17.584,60	€ 109.556,81

Die ursprüngliche Schuld kann auch direkt mithilfe der Rentenrechnung bestimmt werden.

- b) Herr Maier bezahlt 3 Jahre lang nachschüssig Annuitäten in Höhe von A_1 .
Im 4. und 5. Jahr leistet er keine Zahlungen, dafür bezahlt er ab dem 6. Jahr nachschüssig 5 Annuitäten in Höhe von A_2 .



- c) Da im 4. und 5. Jahr keine Rückzahlung erfolgt, erhöht sich die Restschuld des 3. Jahres um die Zinsen des 4. und 5. Jahres.
- d) Die Rückzahlung entspricht in diesem Fall einer nachschüssigen Rente mit Annuitäten in Höhe von € 17.584,60. Der Barwert der Rente beträgt € 116.228,82.

$$116228,82 \cdot 1,035^n - 17584,60 \cdot \frac{1,035^n - 1}{0,035} = 11077,75$$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $n \approx 7$

Die angegebene Zeile des Tilgungsplans ist daher jene für das Jahr 12.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
12	€ 969,26	€ 16.615,34	€ 17.584,60	€ 11.077,75
13	€ 387,72	€ 11.077,75	€ 11.465,47	€ 0

Lösungsschlüssel

- a) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Zinssatzes
1 × B2: für die richtige Berechnung der Anfangsschuld
- b) 1 × A: für das richtige Übersetzen des dargestellten Zahlungsflusses
1 × C1: für das richtige Markieren des Barwerts und des Endwerts der 1. Rente
1 × C2: für das richtige Markieren des Barwerts und des Endwerts der 2. Rente
- c) 1 × D: für eine richtige Begründung
- d) 1 × B1: für die richtige Bestimmung des Jahres
1 × B2: für das richtige Ermitteln der letzten Zeile des Tilgungsplans

Lieferwagen*

Aufgabennummer: B_306

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Ein Unternehmen will einen Lieferwagen anschaffen.

- a) Für das Lieferwagen-Modell A betragen die Anschaffungskosten € 34.000, die Nutzungsdauer wird mit 4 Jahren veranschlagt. An Einnahmen erwartet das Unternehmen € 12.000 im ersten Jahr, dann jährlich € 2.000 mehr gegenüber dem Vorjahr. Der Liquidationserlös wird mit 20 % der Anschaffungskosten angenommen. Bei den Ausgaben kalkuliert das Unternehmen mit € 0,10 Treibstoffkosten pro km, wobei der Lieferwagen jährlich 40.000 km im Einsatz sein soll. Die jährlichen Fixkosten für Versicherung, Service und Steuern werden mit € 2.000 angesetzt.

– Übertragen Sie für den Zeitraum der Nutzungsdauer die Einnahmen und die Ausgaben in die nachstehende Tabelle.

Jahr	Einnahmen	Ausgaben
0		
1		
2		
3		
4		

- b) Für das etwas teurere Lieferwagen-Modell B mit dem Anschaffungspreis € 42.000 ermittelt das Unternehmen folgende Rückflüsse (Einnahmen minus Ausgaben):

Jahr	Rückflüsse
1	€ 8.000
2	€ 10.000
3	€ 12.000
4	€ 22.000

Das Unternehmen kalkuliert mit einem Zinssatz von 6 % p. a.

- Berechnen Sie den Kapitalwert für das Modell B.
- Begründen Sie mithilfe des Kapitalwerts, warum diese Investition vorteilhaft ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) In einer Wirtschaftszeitschrift stoßen Sie auf folgende Aussage: „Niedrige Zinssätze führen zu hohen Kapitalwerten.“

– Erklären Sie, warum diese Aussage richtig ist.

d) Für das Lieferwagen-Modell C mit einem Anschaffungspreis von € 45.000 ermittelt das Unternehmen folgende Rückflüsse (Einnahmen minus Ausgaben):

Jahr	Rückflüsse
1	€ 9.000
2	€ 11.000
3	€ 13.000
4	€ 15.000

Die Rückflüsse können zum Zinssatz 4,5 % p. a. wiederveranlagt werden.

- Berechnen Sie den Endwert der wiederveranlagten Rückflüsse.
- Berechnen Sie den modifizierten internen Zinssatz.
- Interpretieren Sie den modifizierten internen Zinssatz im Hinblick auf die Vorteilhaftigkeit der Investition.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)

Jahr	Einnahmen	Ausgaben
0		€ 34.000
1	€ 12.000	€ 6.000
2	€ 14.000	€ 6.000
3	€ 16.000	€ 6.000
4	€ 24.800	€ 6.000

b) Kapitalwert: $-42000 + \frac{8000}{1,06} + \frac{10000}{1,06^2} + \frac{12000}{1,06^3} + \frac{22000}{1,06^4} \approx 1949$

Der Kapitalwert beträgt ca. € 1.949.

Die Investition ist vorteilhaft, weil der Kapitalwert positiv ist.

c) Der Kapitalwert ist gleich der Summe aus den abgezinnten Rückflüssen minus der Anschaffungskosten.

Je niedriger der Zinssatz ist, mit dem kalkuliert wird, desto höher sind die abgezinnten Rückflüsse und desto höher ist der Kapitalwert.

d) Endwert: $E = 9000 \cdot 1,045^3 + 11000 \cdot 1,045^2 + 13000 \cdot 1,045 + 15000 = 50867,77$

Modifizierter interner Zinssatz:

$$45000 \cdot (1 + i_{\text{mod}})^4 = 50867,77$$

$$i_{\text{mod}} = \sqrt[4]{\frac{50867,77}{45000}} - 1 \approx 0,0311$$

Der modifizierte interne Zinssatz beträgt ca. 3,11 % p. a.

Da der modifizierte interne Zinssatz kleiner als der Wiederveranlagungszinssatz ist, ist die Investition nicht sinnvoll.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Übertragen der Einnahmen
1 × A2: für das richtige Übertragen der Ausgaben

b) 1 × B: für die richtige Berechnung des Kapitalwerts
1 × D: für die richtige Begründung

c) 1 × D: für die richtige Erklärung

d) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Endwerts
1 × B2: für die richtige Berechnung des modifizierten internen Zinssatzes
1 × C: für die richtige Interpretation des modifizierten internen Zinssatzes

Marketingausgaben*

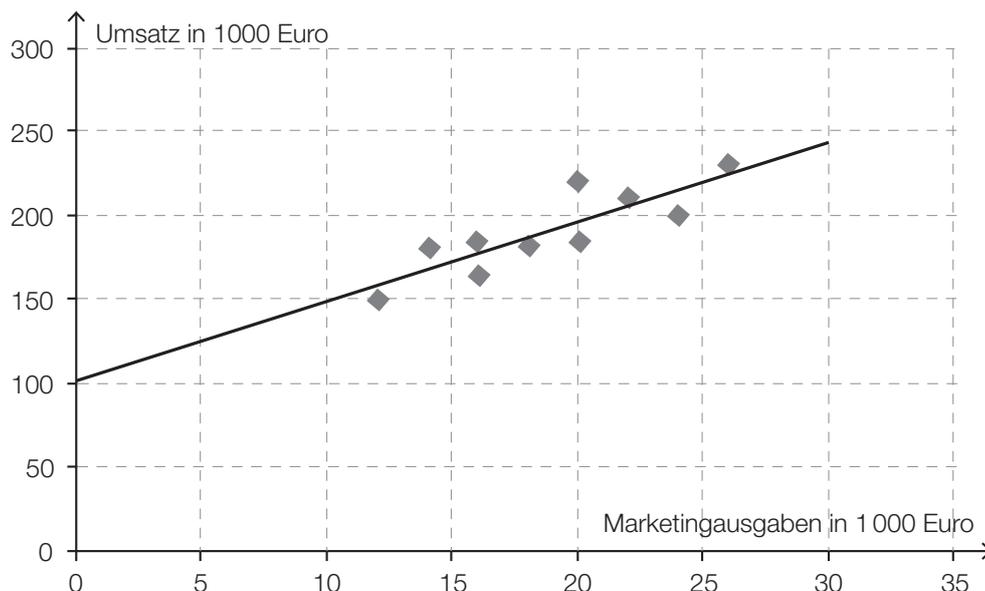
Aufgabennummer: B_304

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Die Marketingabteilung einer Handelskette möchte wissen, ob ihre Werbemaßnahmen wirken. Die Buchhaltung liefert Informationen über die monatlichen Umsätze. Die Umsätze von 10 aufeinanderfolgenden Monaten mit den entsprechenden Marketingausgaben liefern folgende Daten (Beträge in 1.000 Euro):

Monat	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Marketingausgaben	24	16	20	26	14	16	20	12	18	22
Umsatz	200	184	220	230	180	164	185	150	182	210

- a) – Ermitteln Sie den Korrelationskoeffizienten zwischen Marketingausgaben und Umsatz.
 – Interpretieren Sie diesen Korrelationskoeffizienten.
- b) – Ermitteln Sie die Gleichung derjenigen Regressionsgeraden, die den Umsatz in Abhängigkeit von den Marketingausgaben beschreibt.
 – Interpretieren Sie den Wert der Steigung der Regressionsgeraden im Hinblick auf den Umsatz und die Marketingausgaben.
- c) In der nachstehenden Grafik sind die Datenpunkte und die dazugehörige Regressionsgerade dargestellt.



- Lesen Sie aus der Grafik denjenigen Umsatz ab, den die Handelskette bei Marketingausgaben von € 10.000 erwarten kann.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) mittels Technologieeinsatz: $r \approx 0,86$

Die gegebenen Daten lassen einen positiven linearen Zusammenhang zwischen Marketingausgaben und Umsatz vermuten.

b) mittels Technologieeinsatz: $y = 4,786 \cdot x + 100,523$

Steigen die Marketingausgaben um € 1.000, dann steigt der Umsatz um ca. € 4.786.

c) ca. € 150.000

Toleranzbereich: [€ 140.000; € 160.000]

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung des Korrelationskoeffizienten
1 × C: für die richtige Interpretation des Korrelationskoeffizienten

b) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Gleichung der Regressionsgeraden
1 × C: für die richtige Interpretation der Steigung im Sachzusammenhang

c) 1 × C: für das richtige Ablesen des Wertes

Zahnpasta*

Aufgabennummer: B_307

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

a) In der Marketingabteilung eines Zahnpastaproduzenten stellt man fest, dass sich bei einem Preis von € 2,00 pro Tube täglich 500 Stück absetzen lassen. Nach einer Preissenkung auf € 1,80 lassen sich täglich 600 Stück absetzen.

– Beschreiben Sie, wie sich durch diese Preissenkung der Erlös ändert.

b) Bei einem Preis von € 2,00 pro Tube lassen sich täglich 500 Stück in einer bestimmten Region absetzen, bei einem Preis von € 1,80 lassen sich täglich 600 Stück absetzen. Der Höchstpreis liegt bei € 3,15.

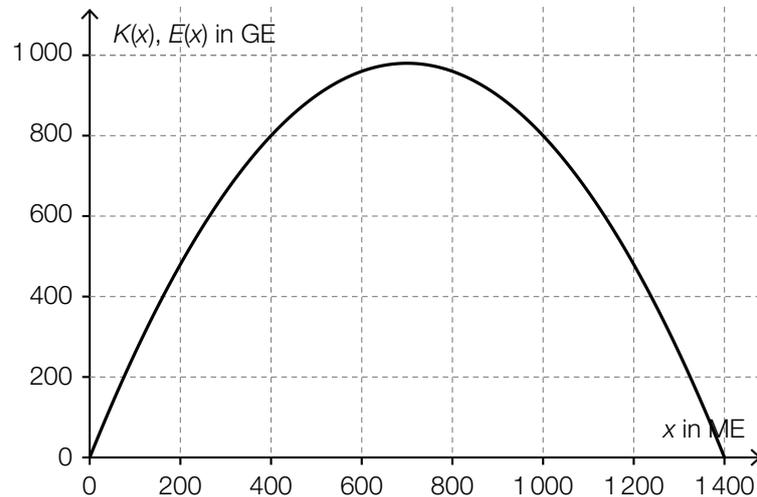
Es soll der Zusammenhang zwischen dem Preis p in Euro und der nachgefragten Menge x in Stück durch eine quadratische Funktion $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ dargestellt werden.

– Stellen Sie die Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage auf.

– Berechnen Sie die Sättigungsmenge.

– Erklären Sie, warum die Funktion nur im Intervall zwischen null und der Sättigungsmenge ein sinnvolles Modell für diesen Zusammenhang liefert.

- c) In der nachstehenden Grafik ist die Erlösfunktion E eines Zahnpastaproduzenten dargestellt. Für die zugehörige lineare Kostenfunktion K gelten Fixkosten in Höhe von 400 GE und variable Stückkosten in Höhe von 0,5 GE/ME.



- Zeichnen Sie den Graphen der Kostenfunktion K in die vorgegebene Grafik ein.
- Lesen Sie aus der Grafik ab, bei welcher Menge der Gewinn maximal ist.

- d) Aufgrund einer Lohnerhöhung steigen die Fixkosten.

- Begründen Sie, warum sich die gewinnmaximale Menge dadurch nicht verändert.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

- a) Erlös beim Preis € 2,00: $E = 2 \cdot 500 = 1000$
 Erlös beim Preis € 1,80: $E = 1,8 \cdot 600 = 1080$
 Durch die Preissenkung steigt der Erlös.

- b) $p(0) = 3,15$: $3,15 = c$
 $p(500) = 2$: $2 = 500^2 \cdot a + 500 \cdot b + 3,15$
 $p(600) = 1,8$: $1,8 = 600^2 \cdot a + 600 \cdot b + 3,15$

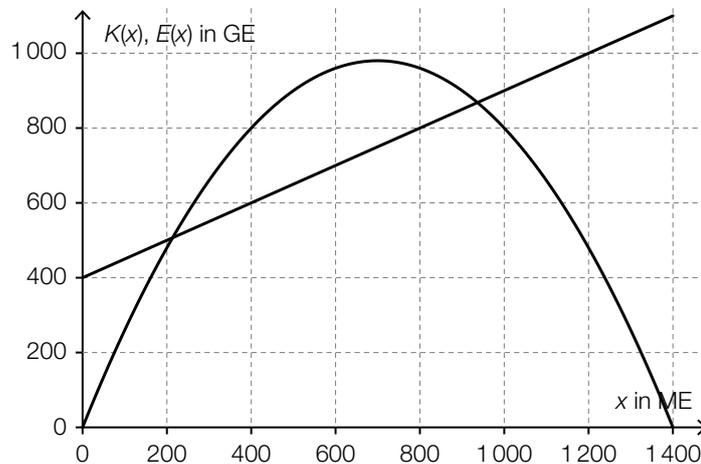
$$a = 0,0000005; b = -0,00255$$

$$p(x) = 0,0000005 \cdot x^2 - 0,00255 \cdot x + 3,15$$

Sättigungsmenge: Setze $p(x) = 0$:
 $0 = 0,0000005 \cdot x^2 - 0,00255 \cdot x + 3,15$
 $x_1 = 2100$; ($x_2 = 3000$)

Die Sättigungsmenge liegt bei 2100 Tuben täglich.
 Ein sinnvolles Intervall ist $[0; 2100]$, da der Preis nicht unter null gesenkt werden kann.

c)



gewinnmaximale Menge: ca. 600 ME (exakt 575 ME)

Toleranzbereich: $[450; 650]$

Achtung: $x = 700$ ist falsch!

- d) Die gewinnmaximale Menge ändert sich nicht, wenn die Fixkosten geändert werden. Die Fixkosten sind in der Gewinnfunktion ein konstanter Summand, der bei der Ableitung wegfällt. Da die gewinnmaximale Menge die Nullstelle des Grenzerlöses ist, haben die Fixkosten keinen Einfluss auf die gewinnmaximale Menge.

oder

Im Gewinnmaximum sind die Grenzkosten gleich dem Grenzerlös. Die Grenzkosten sind unabhängig von den Fixkosten.

oder

$$G(x) = E(x) - K_v(x) - F$$

$$G'(x) = E'(x) - K_v'(x)$$

x ... produzierte bzw. abgesetzte Menge in ME

$G(x)$... Gewinn in GE

$E(x)$... Erlös in GE

$K_v(x)$... variable Kosten in GE

F ... Fixkosten in GE

Der Gewinn ist maximal, wenn gilt: $E'(x) = K_v'(x)$, d. h., die Fixkosten sind irrelevant.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × C: für die richtige Beschreibung der Erlösänderung
- b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Bedingungen
1 × B1: für das richtige Ermitteln der Funktionsgleichung
1 × B2: für die richtige Berechnung der Sättigungsmenge
1 × D: für die richtige Erklärung des Intervalls
- c) 1 × A: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Kostenfunktion
1 × C: für das richtige Ablesen der gewinnmaximalen Menge
- d) 1 × D: für die richtige Begründung

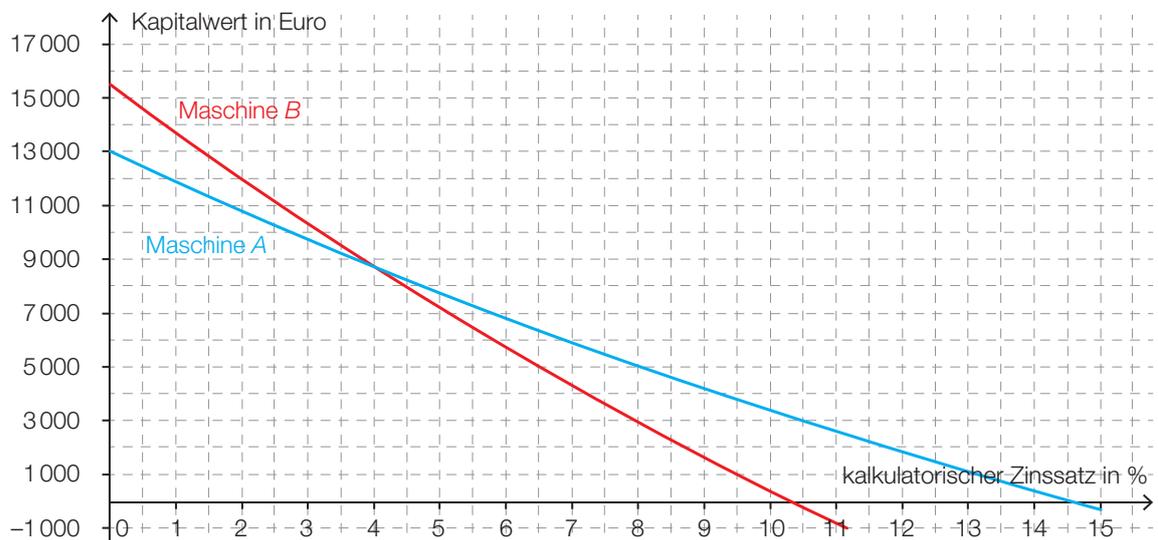
Modernisierung

Aufgabennummer: B_324

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Ein Unternehmer möchte seinen Betrieb modernisieren.

- a) Er überlegt die Anschaffung einer neuen Maschine. Dabei stehen 2 Modelle – Maschine A und Maschine B – zur Auswahl. In der nachstehenden Grafik ist der Kapitalwert dieser Investitionen in Abhängigkeit vom kalkulatorischen Zinssatz dargestellt.



– Kreuzen Sie diejenige Aussage an, die mithilfe der Informationen in der Grafik getroffen werden kann. [1 aus 5]

Beide Maschinen haben dieselbe Nutzungsdauer.	<input type="checkbox"/>
Die Anschaffungskosten von Maschine A sind höher als jene von Maschine B.	<input type="checkbox"/>
Der zu erwartende Liquidationserlös von Maschine B ist höher als jener von Maschine A.	<input type="checkbox"/>
Der interne Zinssatz von Maschine A ist höher als jener von Maschine B.	<input type="checkbox"/>
Die zu erwartenden Rückflüsse von Maschine A sind stets höher als jene von Maschine B.	<input type="checkbox"/>

– Lesen Sie aus der obigen Grafik denjenigen kalkulatorischen Zinssatz ab, für den beide Maschinen einen gleich hohen Kapitalwert haben.

- b) Der Unternehmer hat in den letzten 5 Jahren Rücklagen gebildet. Er hat dazu über den gesamten Zeitraum halbjährlich nachschüssig Raten der Höhe R auf ein Sparbuch gelegt. Es hat aber auch andere Ein- bzw. Auszahlungen am Sparbuch gegeben. Die nachstehende Berechnung zeigt, wie der momentan am Sparbuch zur Verfügung stehende Betrag bei jährlicher Verzinsung gebildet wurde.

$$208\,732,46 = \text{Endwert der Rente} + 40\,000 \cdot 1,025^3 - 20\,000 \cdot 1,025^2 + 28\,000$$

- Stellen Sie den beschriebenen Zahlungsstrom auf einer geeigneten Zeitachse grafisch dar.
 - Lesen Sie aus der obigen Berechnung denjenigen Jahreszinssatz ab, mit dem die Geldbeträge am Sparbuch verzinst wurden.
 - Berechnen Sie den dazu äquivalenten Halbjahreszinssatz.
 - Berechnen Sie die Höhe der halbjährlichen Raten.
- c) Durch den Einsatz neuer Maschinen steigt die Qualität des hergestellten Produkts. Man glaubt, dass bei einem Preis von 20 GE/ME monatlich 100 ME abgesetzt werden können. Der Höchstpreis für das Produkt liegt erfahrungsgemäß bei 60 GE/ME.

- Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Preisfunktion der Nachfrage.

Der Unternehmer plant, den Preis von 20 GE/ME auf 18 GE/ME zu senken.

- Berechnen Sie, um welchen Betrag sich der Erlös durch die Preissenkung verändert.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

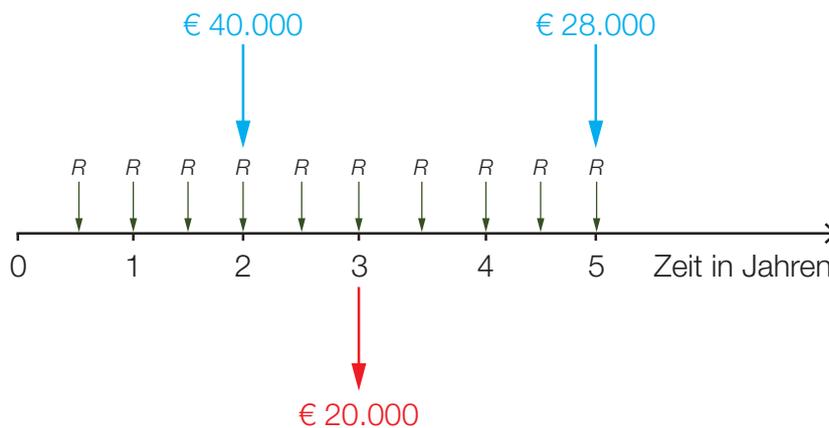
Möglicher Lösungsweg

a)

[...]	
[...]	
[...]	
Der interne Zinssatz von Maschine A ist höher als jener von Maschine B.	<input checked="" type="checkbox"/>
[...]	

Bei einem kalkulatorischen Zinssatz von 4 % haben beide Maschinen einen gleich hohen Kapitalwert (in Höhe von rund € 8.700).

b)



Jahreszinssatz $i = 2,5 \%$ p. a.

$$q_2 = \sqrt{1,025} = 1,01242\dots$$

Der äquivalente Halbjahreszinssatz beträgt rund 1,24 % p. s.

$$\text{Endwert der Rente} = 208\,732,46 - 40\,000 \cdot 1,025^3 + 20\,000 \cdot 1,025^2 - 28\,000 = 158\,669,335$$

$$158\,669,335 = R \cdot \frac{q_2^{10} - 1}{q_2 - 1}$$

$$R = 15\,000,000\dots$$

Die Höhe der halbjährlichen Raten beträgt € 15.000.

$$\text{c) } p_N(x) = a \cdot x + b$$

x ... Anzahl der nachgefragten ME

$p_N(x)$... Preis bei x nachgefragten ME in GE/ME

Aus $p_N(0) = 60$ folgt $b = 60$.

$$p_N(100) = 20 \Rightarrow 20 = 100 \cdot a + 60$$

$$a = -0,4$$

$$p_N(x) = -0,4 \cdot x + 60$$

$$18 = -0,4 \cdot x + 60$$

$$x = 105$$

Bei einem Preis von 18 GE/ME können 105 ME abgesetzt werden.

Bei 20 GE/ME werden 100 ME verkauft. Erlös = $20 \cdot 100 = 2000$.

Bei 18 GE/ME werden 105 ME verkauft. Erlös = $18 \cdot 105 = 1890$.

Durch die Preissenkung sinkt der Erlös um 110 GE.

Klassifikation

- Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) 3 Funktionale Zusammenhänge
- c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) C Interpretieren und Dokumentieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

- a) —
- b) A Modellieren und Transferieren, C Interpretieren und Dokumentieren
- c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

- a) leicht
- b) mittel
- c) mittel

Punkteanzahl:

- a) 2
- b) 4
- c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Gerätekauf

Aufgabennummer: B_211

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Familie Kurz benötigt für ihre neue Wohnung Küchengeräte.

- a) In den Preisverhandlungen mit einem Händler werden die nachstehend angeführten Teilzahlungsvarianten diskutiert. Bei allen Teilzahlungsvarianten wird mit dem gleichen konstanten Zinssatz gerechnet.

Die Familie möchte sich für die Teilzahlungsvariante mit dem niedrigsten Barwert entscheiden.

– Kreuzen Sie diese Teilzahlungsvariante an. [1 aus 5]

eine Anzahlung Z und 60 nachschüssige Monatsraten R	<input type="checkbox"/>
eine Anzahlung Z und 60 vorschüssige Monatsraten R	<input type="checkbox"/>
60 nachschüssige Monatsraten $R + \frac{Z}{60}$	<input type="checkbox"/>
60 nachschüssige Monatsraten R und gleichzeitig mit der letzten Monatsrate eine Restzahlung Z	<input type="checkbox"/>
eine Anzahlung $\frac{Z}{2}$, 60 vorschüssige Monatsraten R und eine Restzahlung $\frac{Z}{2}$ am Ende der Laufzeit	<input type="checkbox"/>

- b) Die Geräte können durch einen Bankkredit finanziert werden. Familie Kurz erhält folgendes Angebot:

Kreditbetrag: € 10.000

Bearbeitungsgebühr: 2 % des Kreditbetrags (bei Kreditabschluss fällig)

60 nachschüssige Monatsraten zu je € 185

– Berechnen Sie den zugrunde liegenden jährlichen Effektivzinssatz dieses Angebots.

c) Familie Kurz vereinbart mit ihrer Bank einen Kredit in Höhe von € 10.000. Dieser ist durch nachschüssige Monatsraten innerhalb von 5 Jahren zu begleichen. Die Bank bietet einen Zinssatz von 0,25 % p. m. an.

Nach Zahlung von 12 Raten werden ein halbes Jahr keine Rückzahlungen geleistet. Anschließend werden die vereinbarten Raten weiterbezahlt. Die versäumten Zahlungen werden durch eine Sonderzahlung 3 Jahre nach Kreditaufnahme abgegolten.

- Stellen Sie den Verlauf der Kreditrückzahlung auf einer Zeitachse dar.
- Berechnen Sie die Höhe der vereinbarten Raten.
- Berechnen Sie, wie hoch die Sonderzahlung sein muss, um die versäumten Zahlungen nachzuholen.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)

[...]	
[...]	
[...]	
60 nachschüssige Monatsraten R und gleichzeitig mit der letzten Monatsrate eine Restzahlung Z	<input checked="" type="checkbox"/>
[...]	

b) $10000 = 200 + 185 \cdot \frac{q_{12}^{60} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{60}}$

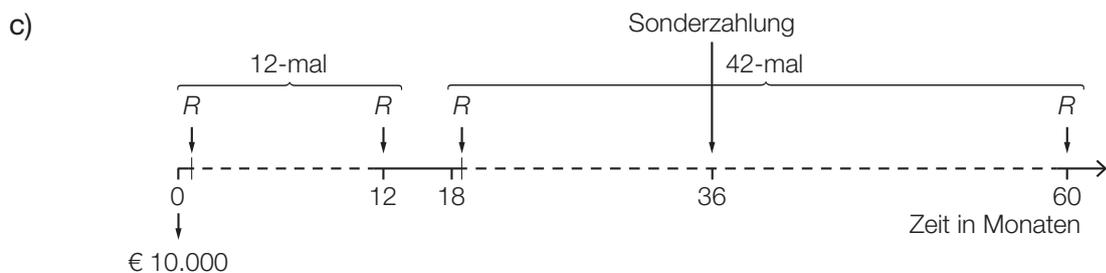
Lösung mittels Technologieeinsatz:

$$q_{12} = 1,00417\dots$$

$$q = (q_{12})^{12} = 1,05130\dots$$

effektiver Jahreszinssatz:

$$i \approx 5,13 \%$$



vereinbarte Ratenhöhe R :

$$10000 = R \cdot \frac{1,0025^{60} - 1}{0,0025} \cdot \frac{1}{1,0025^{60}} \Rightarrow R \approx \text{€ } 179,69$$

Wert der 6 versäumten Monatsraten zum Zeitpunkt 18: $179,69 \cdot \frac{1,0025^6 - 1}{0,0025} = 1\,084,90$
 aufgezinst zum Zeitpunkt 36: $1\,084,90 \cdot 1,0025^{18} \approx 1\,134,77$

Die Sonderzahlung muss € 1.134,77 betragen.

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) 3 Funktionale Zusammenhänge
- c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) C Interpretieren und Dokumentieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

- a) —
- b) —
- c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) leicht
- c) mittel

Punkteanzahl:

- a) 1
- b) 1
- c) 4

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Jungunternehmerin*

Aufgabennummer: B_207

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Eine Jungunternehmerin übernimmt einen Betrieb. Daher informiert sie sich über die Preis- und Kostensituation der Produkte.

a) Die Preisfunktionen für das Angebot p_A und für die Nachfrage p_N eines Produktes sind gegeben:

$$p_A(x) = \frac{x^2}{10} + 1$$

$$p_N(x) = -3 \cdot x + 8$$

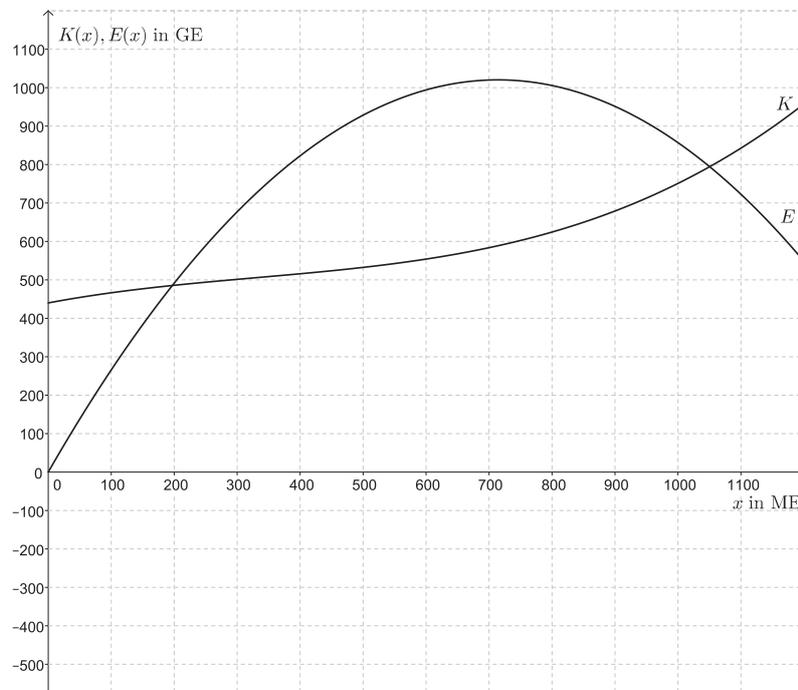
x ... angebotene bzw. nachgefragte Menge in Mengeneinheiten (ME)

$p_A(x)$... Angebotspreis bei x ME in Geldeinheiten pro Mengeneinheit (GE/ME)

$p_N(x)$... Nachfragepreis bei x ME in GE/ME

- Zeichnen Sie die Graphen beider Funktionen im Intervall $[0; 5]$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.
- Markieren Sie in der Grafik die Menge, bei der der Markt gesättigt ist.
- Interpretieren Sie die Bedeutung des y -Achsenabschnitts der Preisfunktion des Angebots im Sachzusammenhang.
- Bestimmen Sie den Marktgleichgewichtspreis.

- b) In der nachstehenden Grafik sind Funktionsgraphen der Kostenfunktion K und der Erlösfunktion E eines Produktes dargestellt:



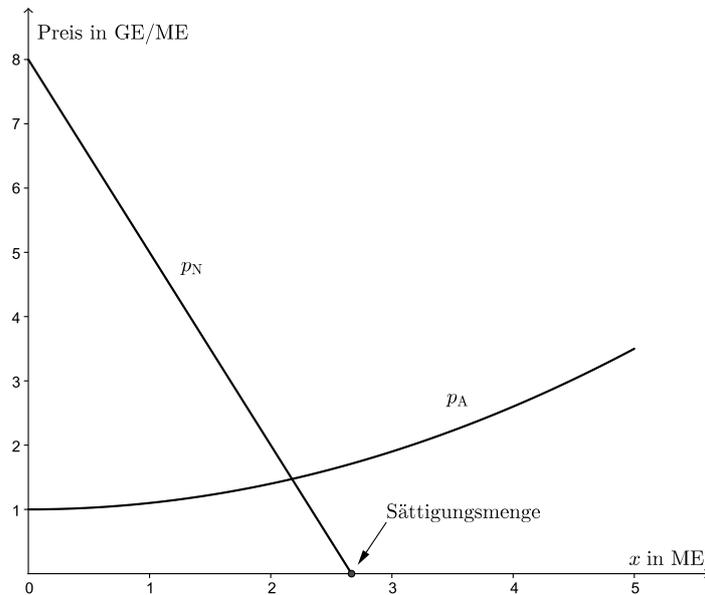
- Lesen Sie aus der Grafik den Gewinnbereich ab.
 - Zeichnen Sie den Graphen der Gewinnfunktion in die vorgegebene Grafik ein.
- c) Die Grenzkostenfunktion eines weiteren Produktes ist gegeben: $K'(x) = 6 \cdot x^2 - 38 \cdot x + 64$. Die Kosten für die Produktion von 2 ME betragen 72 GE.
- Stellen Sie die Funktionsgleichung der Gesamtkostenfunktion K auf.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Der y-Achsenabschnitt der Preisfunktion des Angebots liegt bei 1 GE/ME. Dies ist derjenige Preis, zu dem kein Produzent bereit ist, das Produkt anzubieten.

Marktgleichgewicht:

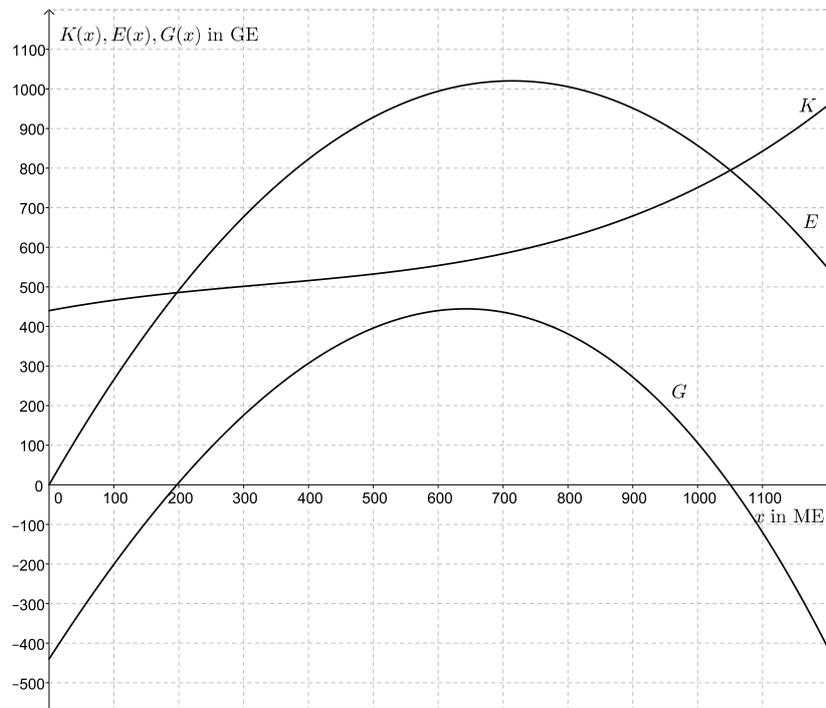
$$-3 \cdot x + 8 = \frac{x^2}{10} + 1$$

$$x = 2,175\dots$$

$$p_N(2,175\dots) = 1,473\dots \approx 1,47$$

Der Marktgleichgewichtspreis beträgt 1,47 GE/ME.

- b) Der Gewinnbereich liegt ca. zwischen 200 ME und 1 050 ME.
Ableseungenauigkeiten ± 50 ME sind zu tolerieren.



- c) $K(x) = \int K'(x) dx = 2 \cdot x^3 - 19 \cdot x^2 + 64 \cdot x + c$
 $K(2) = 72 \rightarrow 2 \cdot 2^3 - 19 \cdot 2^2 + 64 \cdot 2 + c = 72$
 $c = 4$
 $K(x) = 2 \cdot x^3 - 19 \cdot x^2 + 64 \cdot x + 4$

Lösungsschlüssel

- a) 1 × B1: für das richtige Zeichnen der beiden Funktionsgraphen
 1 × C1: für das richtige Markieren der Sättigungsmenge
 1 × C2: für die richtige Interpretation des y-Achsenabschnitts
 1 × B2: für die richtige Bestimmung des Marktgleichgewichtspreises
- b) 1 × C: für das richtige Ablesen des Gewinnbereichs mit Ableseungenauigkeiten von ± 50 ME
 1 × A: für das richtige Einzeichnen des Funktionsgraphen der Gewinnfunktion (Achsenabschnitt, Nullstellen)
- c) 1 × A: für den richtigen Ansatz zum Aufstellen der Funktionsgleichung der Gesamtkostenfunktion
 1 × B: für die richtige Berechnung der Integrationskonstanten

Papierproduzent*

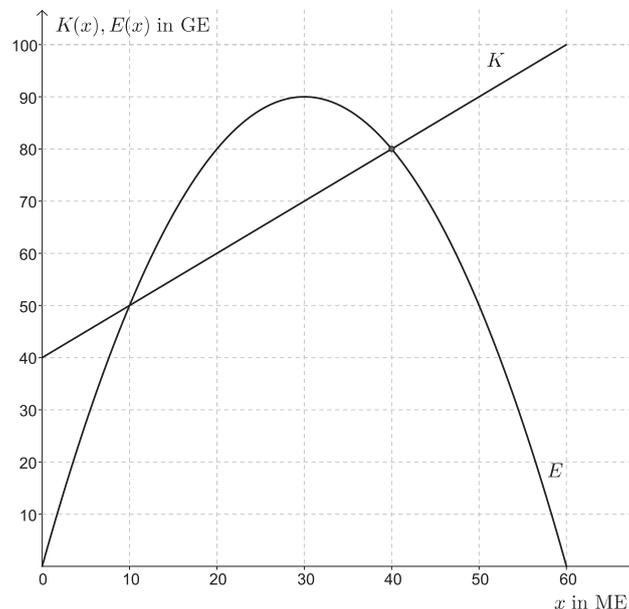
Aufgabennummer: B_281

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Ein Papierproduzent stellt als Monopolist hochwertiges Urkundenpapier her. Die Kostenfunktion K für die Herstellung und die Erlösfunktion E für den Absatz dieses Produkts sind in der nachstehenden Grafik dargestellt.



- a) – Stellen Sie die Funktionsgleichung dieser Kostenfunktion K auf.
 – Argumentieren Sie, welches Vorzeichen der Koeffizient a dieser Erlösfunktion E mit $E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$ haben muss.
- b) Das Verhalten der Erlösfunktion soll für die nachgefragte Menge 40 ME untersucht werden.
 – Zeichnen Sie in der obigen Grafik die Tangente an den Graphen der Erlösfunktion E an der Stelle $x = 40$ ein.
 – Lesen Sie die Steigung dieser Tangente ab.
 – Interpretieren Sie die Steigung dieser Tangente im Sachzusammenhang.
- c) Für die Stelle des Gewinnmaximums gilt, dass die Grenzkosten gleich dem Grenzerlös sind.
 – Begründen Sie diese Aussage.

Hinweis zur Aufgabe:

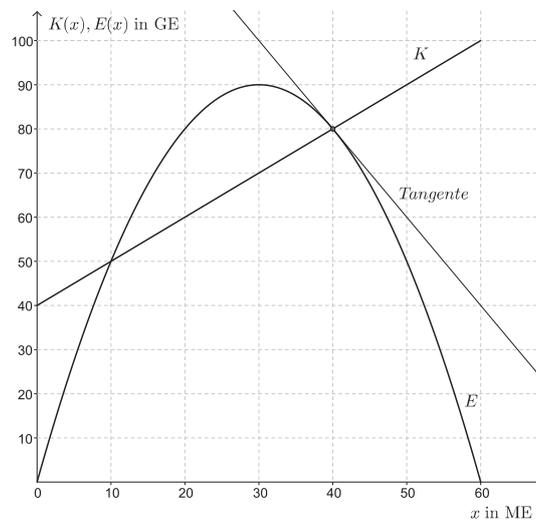
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Kostenfunktion: $K(x) = x + 40$

Erlösfunktion: Der Koeffizient a muss negativ sein, weil der Funktionsgraph der Erlösfunktion eine nach unten geöffnete Parabel ist.

b)



Steigung der Tangente: $k = -2$

Toleranzbereich: $[-2,5; -1,5]$

Wird die Absatzmenge um 1 ME erhöht, sinkt der Erlös näherungsweise um 2 GE.

c) $G(x) = E(x) - K(x)$

An der Stelle des Gewinnmaximums gilt: $G'(x) = 0$.

$G'(x) = 0 = E'(x) - K'(x)$

Also: $E'(x) = K'(x)$.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung
1 × D: für die richtige Argumentation zum Vorzeichen des Koeffizienten a
- b) 1 × A: für das richtige Einzeichnen der Tangente
1 × C1: für das richtige Ablesen der Steigung der Tangente im Toleranzbereich $[-2,5; -1,5]$
1 × C2: für die richtige Interpretation der Steigung der Tangente im Sachzusammenhang
- c) 1 × D: für die richtige Begründung

LED-Lampen (2)*

Aufgabennummer: B_315

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Traditionelle Glühlampen wurden wegen ihrer geringen Energieeffizienz in der EU schrittweise verboten. Als Alternative zu den Glühlampen bieten Hersteller LED-Lampen an.

- a) LED-Lampen sind derzeit wesentlich teurer als Glühlampen, zeichnen sich aber durch eine höhere Lebensdauer und durch eine höhere Energieeffizienz aus.

Für eine Lampe, die 1 000 Stunden pro Jahr in Betrieb ist, kann als Leuchtmittel eine Glühlampe oder eine LED-Lampe verwendet werden. Um die dabei anfallenden Kosten zu vergleichen, werden die folgenden Daten benötigt:

	Glühlampe	LED-Lampe
Preis pro Stück	€ 0,75	€ 15,00
Lebensdauer	1 Jahr	25 Jahre
Energiekosten pro Jahr	€ 5	€ 0,60

– Vervollständigen Sie die nachstehende Tabelle für diesen Kostenvergleich.

Verwendungsdauer in Jahren	insgesamt angefallene Kosten bei der Verwendung ...	
	von Glühlampen	einer LED-Lampe
1		
2		
3		
4		
5		

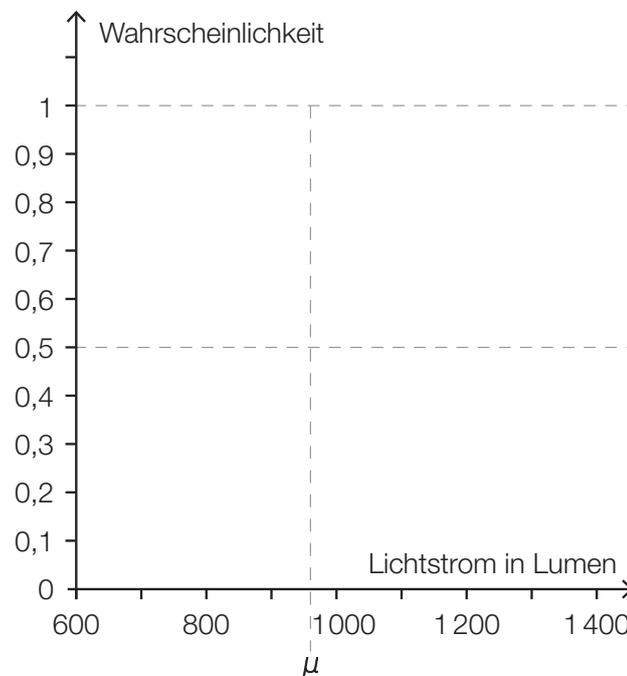
– Lesen Sie aus dieser Tabelle ab, nach wie vielen ganzen Jahren die insgesamt angefallenen Kosten bei der Verwendung einer LED-Lampe erstmals geringer sind als bei der Verwendung von Glühlampen.

* ehemalige Klausuraufgabe

- b) Die Helligkeit einer LED-Lampe kann mithilfe des Lichtstroms beschrieben werden. In der nachstehenden Tabelle ist für LED-Lampen mit verschiedenem Lichtstrom der jeweilige Preis angegeben.

Lichtstrom in Lumen	136	300	400	600	800
Preis in Euro/Stück	6,00	9,90	9,99	16,50	23,40

- Ermitteln Sie die Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. (Der Preis soll in Abhängigkeit vom Lichtstrom beschrieben werden.)
 - Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser linearen Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.
 - Berechnen Sie mithilfe dieser Regressionsfunktion denjenigen Preis, der für eine LED-Lampe mit einem Lichtstrom von 500 Lumen zu erwarten ist.
- c) Laut einem Ratgeber für LED-Lampen kann der Lichtstrom von 12-Watt-LED-Lampen als annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ angenommen werden. Dabei liegen 95 % der Lichtstromwerte in dem um μ symmetrischen Intervall von 780 Lumen bis 1 140 Lumen.
- Berechnen Sie den Erwartungswert μ des Lichtstroms für 12-Watt-LED-Lampen.
 - Berechnen Sie die Standardabweichung σ des Lichtstroms für 12-Watt-LED-Lampen.
 - Skizzieren Sie den Graphen der zugehörigen Verteilungsfunktion in der nachstehenden Abbildung.



- Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte 12-Watt-LED-Lampe einen Lichtstrom von bis zu 900 Lumen hat.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)

Verwendungsdauer in Jahren	insgesamt angefallene Kosten bei der Verwendung ...	
	von Glühlampen	einer LED-Lampe
1	€ 5,75	€ 15,60
2	€ 11,50	€ 16,20
3	€ 17,25	€ 16,80
4	€ 23,00	€ 17,40
5	€ 28,75	€ 18,00

Nach 3 Jahren sind die insgesamt angefallenen Kosten bei der Verwendung einer LED-Lampe erstmals geringer als bei der Verwendung von Glühlampen.

b) Ermitteln der Gleichung der linearen Regressionsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$$f(x) = 0,026 \cdot x + 1,534$$

x ... Lichtstrom in Lumen

$f(x)$... Preis bei einem Lichtstrom x in Euro/Stück

Die Steigung 0,026 besagt, dass pro zusätzlichem Lumen Lichtstrom der Preis um € 0,026 steigt.

$$f(500) \approx 14,53$$

Für eine LED-Lampe mit 500 Lumen ist ein Preis von € 14,53 pro Stück zu erwarten.

$$c) \mu = \frac{780 + 1140}{2} = 960$$

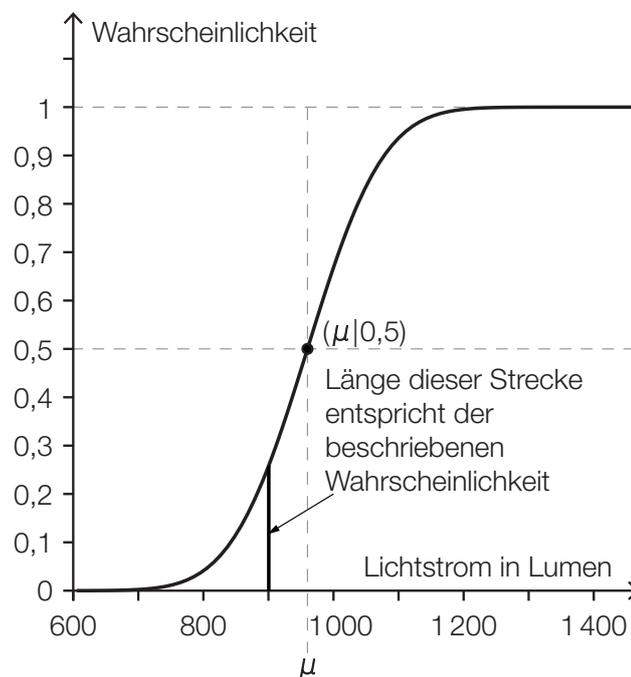
Der Erwartungswert beträgt 960 Lumen.

Aufgrund der Symmetrie gilt: $P(X \leq 1140) = 0,975$

$$\Phi(z) = 0,975 \Rightarrow z = 1,959\dots$$

$$\sigma = \frac{1140 - 960}{1,959\dots} = 91,8\dots$$

Die Standardabweichung beträgt rund 92 Lumen.



Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für das richtige Vervollständigen der Tabelle
1 × C: für das richtige Ablesen aus der Tabelle
- b) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der linearen Regressionsfunktion
1 × C: für die richtige Interpretation des Werts der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang
1 × B2: für die richtige Berechnung des Preises pro Stück
- c) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Erwartungswerts
1 × B2: für die richtige Berechnung der Standardabweichung
1 × A1: für das richtige Skizzieren des Graphen der Verteilungsfunktion (charakteristischer Funktionsverlauf und Funktionswert an der Stelle μ richtig eingezeichnet)
1 × A2: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit in der Abbildung

Grenzkosten*

Aufgabennummer: B_316

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Ein Betrieb erhebt die Grenzkosten für unterschiedliche Produkte.

- a) Für eine quadratische Grenzkostenfunktion K' mit $K'(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ergeben sich folgende Zusammenhänge:

Anzahl der produzierten Mengeneinheiten (ME)	20	50	60
Grenzkosten in Geldeinheiten/Mengeneinheit (GE/ME)	1 060	7 120	10 340

- Interpretieren Sie den Grenzkostenwert 1 060 im gegebenen Sachzusammenhang.
- Stellen Sie die Funktionsgleichung dieser Grenzkostenfunktion auf.

- b) Für die Grenzkostenfunktion K' eines anderen Produkts gilt:

$$K'(x) = 0,3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 15$$

x ... Anzahl der produzierten ME

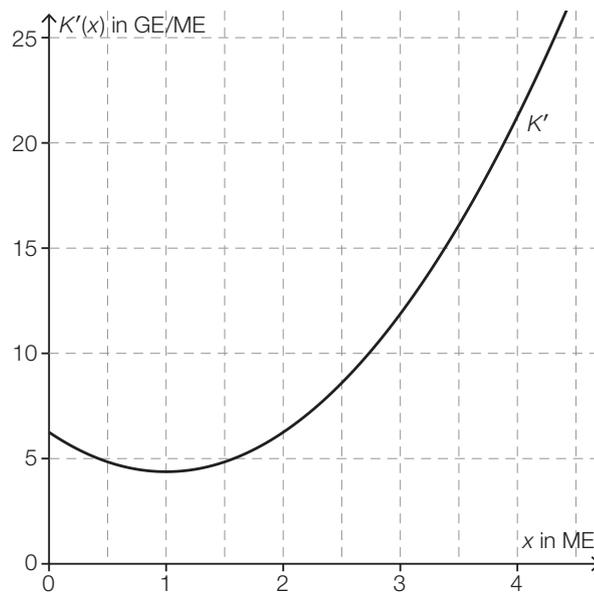
$K'(x)$... Grenzkosten bei x ME in GE/ME

- Berechnen Sie die Kostenkehre.

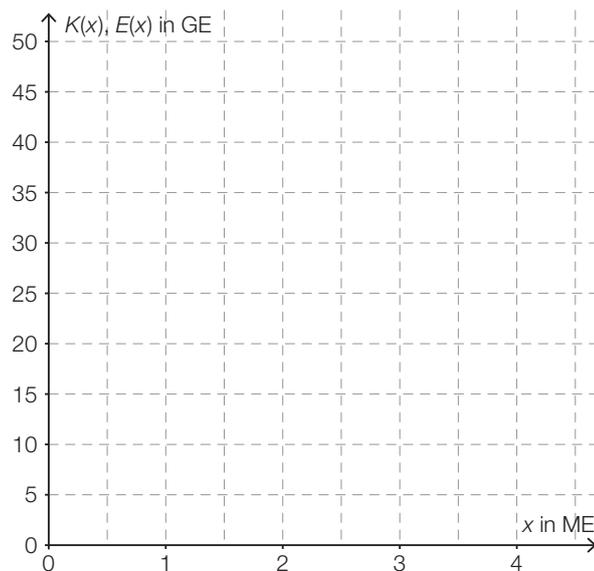
Bei einer Produktionsmenge von 35 ME betragen die Gesamtkosten 2 372,50 GE.

- Berechnen Sie die zugehörige Kostenfunktion K .

- c) Ein Produkt wird zu einem konstanten Preis von 10 GE/ME abgesetzt. Die Fixkosten betragen 5 GE. Die obere Gewinngrenze beträgt 4 ME. Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der quadratischen Grenzkostenfunktion K' dieses Produkts.



- Zeichnen Sie den Funktionsgraphen der zugehörigen Erlösfunktion E im Intervall $[0; 4]$ in der unten stehenden Abbildung ein.
- Zeichnen Sie den Funktionsgraphen der zugehörigen Kostenfunktion K im Intervall $[0; 4]$ in der unten stehenden Abbildung ein.



Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

- a) Der Grenzkostenwert 1 060 GE/ME bedeutet, dass bei einer Produktionsmenge von 20 ME eine Steigerung der Produktion um 1 ME zu einer Kostensteigerung von näherungsweise 1 060 GE führen wird.

$$K'(20) = 1\,060$$

$$K'(50) = 7\,120$$

$$K'(60) = 10\,340$$

Lösen dieses Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:

$$K'(x) = 3 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 20$$

- b) $K''(x) = 0,6 \cdot x - 4$

$$0 = 0,6 \cdot x - 4 \Rightarrow x = \frac{20}{3} \approx 6,7$$

Die Kostenkehre liegt bei rund 6,7 ME.

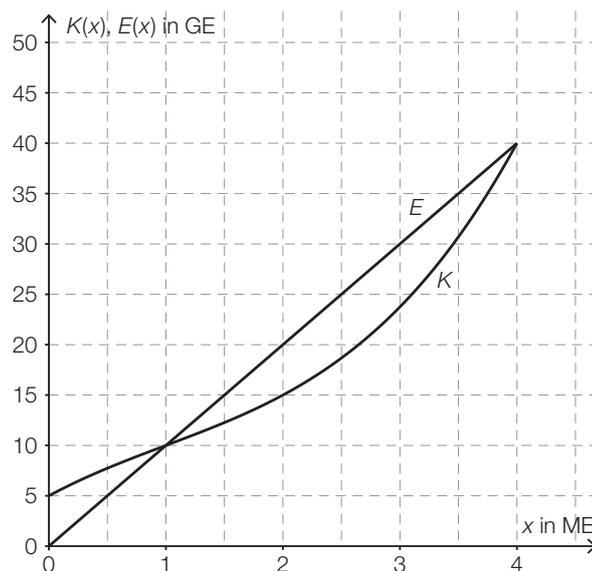
$$\int (0,3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 15) dx = 0,1 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 15 \cdot x + C$$

$$K(35) = 2\,372,50:$$

$$0,1 \cdot 35^3 - 2 \cdot 35^2 + 15 \cdot 35 + C = 2\,372,50 \Rightarrow C = 10$$

$$K(x) = 0,1 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 15 \cdot x + 10$$

- c)



Lösungsschlüssel

- a) 1 x C: für die richtige Interpretation der Grenzkosten im gegebenen Sachzusammenhang
1 x A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung
- b) 1 x B1: für die richtige Berechnung der Kostenkehre
1 x A: für den richtigen Ansatz zum Aufstellen der Funktionsgleichung der Kostenfunktion K
1 x B2: für die richtige Berechnung der Integrationskonstanten
- c) 1 x A1: für das richtige Einzeichnen des Graphen von E im Intervall $[0; 4]$
1 x A2: für das richtige Einzeichnen des Graphen von K im Intervall $[0; 4]$ als ertragsgesetzliche Kostenfunktion mit Fixkosten 5 GE und oberer Gewinngrenze 4 ME
1 x A3: für die richtige Darstellung der Extremstelle der Grenzkostenfunktion als Wendepunkt des Graphen der Kostenfunktion an der Stelle $x = 1$

Kosten*

Aufgabennummer: B_319

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

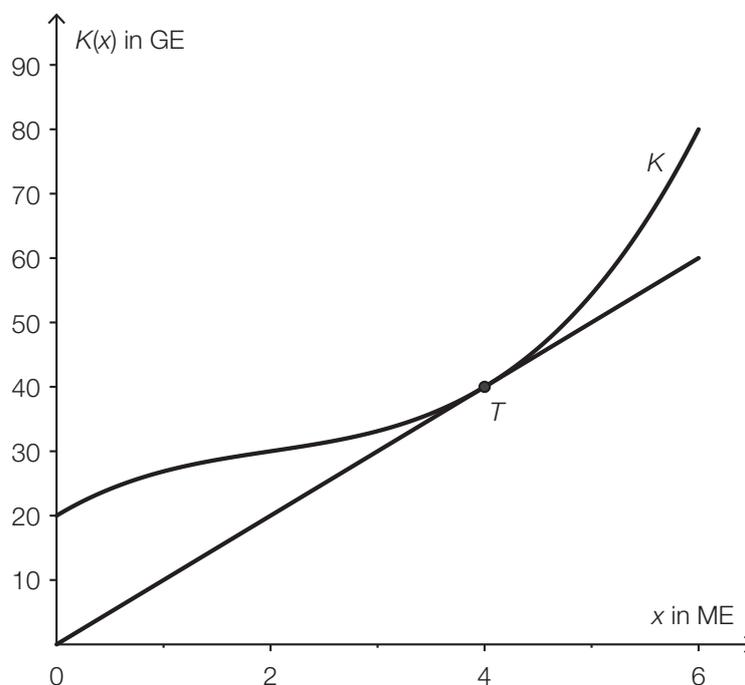
Kostenfunktionen geben den Zusammenhang zwischen der produzierten Menge und den dazugehörigen Gesamtproduktionskosten an.

a) Von einer kubischen Kostenfunktion K mit $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ kennt man folgende Eigenschaften:

- (1) Die Fixkosten betragen 4 GE.
- (2) Bei einer Produktionsmenge von 10 ME betragen die Gesamtkosten 2 124 GE.
- (3) Das Betriebsoptimum liegt bei 2 ME.
- (4) Die langfristige Preisuntergrenze beträgt 14 GE/ME.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Ermittlung dieser Kostenfunktion auf.

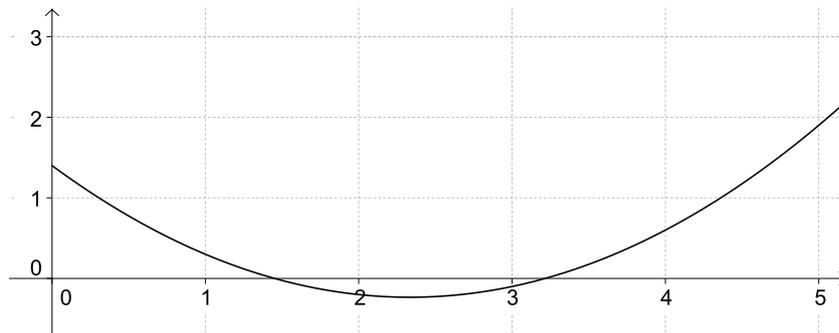
b) Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer anderen Kostenfunktion und die Tangente an diesen Graphen durch den Koordinatenursprung.



– Interpretieren Sie die Bedeutung der x -Koordinate des Berührungspunktes T und der Steigung dieser Tangente im Sachzusammenhang.

- c) Gegeben ist die Kostenfunktion K mit $K(x) = 0,1x^3 - 0,6x^2 + 5x + 10$ für eine produzierte Menge von $0 \leq x \leq 6$ ME.
- Berechnen Sie die Kostenkehre.
 - Geben Sie diejenigen Bereiche an, in denen der Kostenverlauf degressiv bzw. progressiv ist.

- d) – Begründen Sie, warum der Funktionsgraph in der nachstehenden Abbildung keine Grenzkostenfunktion einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion beschreiben kann.



Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Stückkostenfunktion: $\bar{K}(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c + \frac{d}{x}$

(1) $K(0) = 4$: $d = 4$

(2) $K(10) = 2124$: $2124 = 1000a + 100b + 10c + d$

(3) $\bar{K}'(2) = 0$: $0 = 4a + b - \frac{d}{4}$

(4) $\bar{K}(2) = 14$: $14 = 4a + 2b + c + \frac{d}{2}$

b) Die x -Koordinate des Berührungspunktes T ist das Betriebsoptimum.
Die Steigung dieser Tangente ist die langfristige Preisuntergrenze.

c) $K''(x) = 0$: $0,6x - 1,2 = 0 \Rightarrow x = 2$
Die Kostenkehre liegt bei 2 ME.

Der Kostenverlauf ist für $x < 2$ ME degressiv.

Der Kostenverlauf ist für $x > 2$ ME progressiv.

d) Der gegebene Funktionsgraph kann keine Grenzkostenfunktion einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion beschreiben, weil eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion streng monoton wachsend ist und daher die Grenzkostenfunktion keine negativen Funktionswerte hat.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Aufstellen von Gleichung (1) und (2)

1 × A2: für das richtige Aufstellen von Gleichung (3)

1 × A3: für das richtige Aufstellen von Gleichung (4)

b) 1 × C: für die richtige Interpretation der x -Koordinate und der Steigung im Sachzusammenhang

c) 1 × B: für die richtige Berechnung der Kostenkehre

1 × C: für die Angabe der richtigen degressiven und progressiven Bereiche

d) 1 × D: für die richtige Begründung

Schwangerschaft*

Aufgabennummer: B_322

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Nach der Ausbildung der inneren Organe verwendet man für das ungeborene Kind den Begriff *Fötus*.

- a) Bei Ultraschalluntersuchungen wird die Scheitel-Steiß-Länge (SSL) von Föten bestimmt. In der nachstehenden Tabelle sind die durchschnittlichen Längen in Zentimetern (cm) in der jeweiligen Schwangerschaftswoche angegeben:

Schwanger- schaftswoche	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
SSL in cm	4,1	5,4	7,4	8,7	10,1	11,9	13,3	14,1	14,8	16,2

- Ermitteln Sie die Gleichung der zugehörigen Regressionsgeraden. (Die Länge soll in Abhängigkeit von der Schwangerschaftswoche beschrieben werden.)
- Interpretieren Sie den Wert der Steigung der Regressionsgeraden im gegebenen Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

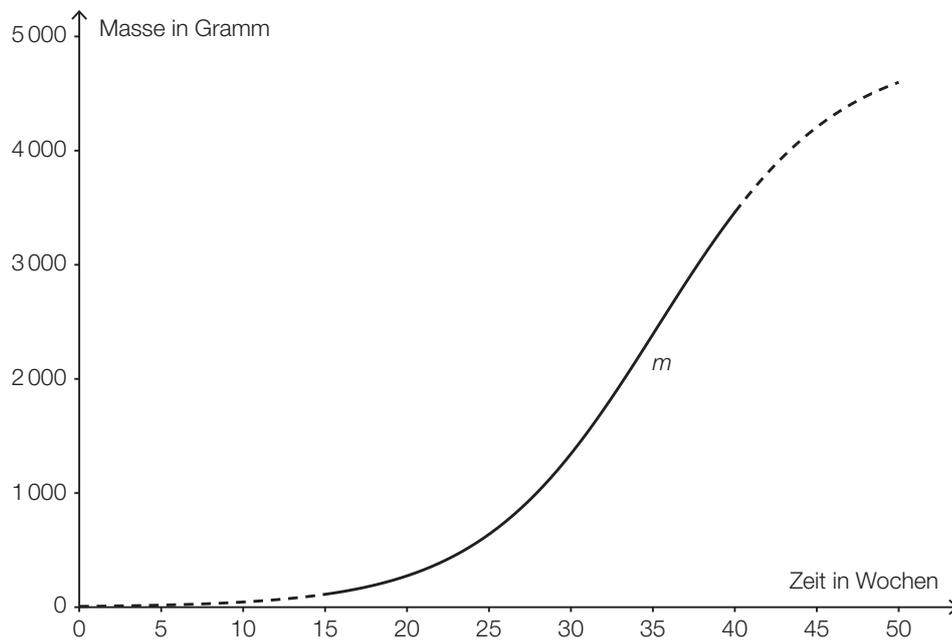
- b) Die zunehmende Masse eines Fötus kann näherungsweise durch die Funktion m beschrieben werden:

$$m(t) = \frac{4900}{1 + 681 \cdot e^{-0,185 \cdot t}} \quad \text{mit } 15 \leq t \leq 40$$

t ... Zeit seit Beginn der Schwangerschaft in Wochen

$m(t)$... Masse des Fötus zur Zeit t in Gramm (g)

Der Graph dieser Funktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt:



- Berechnen Sie die Masse des Fötus zum Zeitpunkt $t = 25$.
- Bestimmen Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem die Massezunahme des Fötus am größten ist.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

- a) Ermittlung der Gleichung der Regressionsgeraden mittels Technologieeinsatz:

$$y = 1,36 \cdot x - 10,42$$

Gemäß dem Modell nimmt die Scheitel-Steiß-Länge durchschnittlich rund 1,36 cm pro Woche zu.

- b) $m(25) = 638,3\dots \approx 638$

Die Masse des Fötus zum Zeitpunkt $t = 25$ beträgt rund 638 g.

Die stärkste Massezunahme erfolgt an der Wendestelle $m''(t) = 0$.

Lösung dieser Gleichung mittels Technologieeinsatz: $t = 35,26\dots \approx 35,3$

Nach etwa 35,3 Wochen ist die Massezunahme am größten.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × B: für die richtige Ermittlung der Gleichung der Regressionsgeraden
1 × C: für die richtige Interpretation der Steigung der Regressionsgeraden im gegebenen Sachzusammenhang
- b) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Masse des Fötus
1 × B2: für das richtige Bestimmen des Zeitpunktes, zu dem die Massezunahme am größten ist (In der Grafik ist klar zu erkennen, dass an der Wendestelle die größte Massezunahme vorliegt. Eine rechnerische Überprüfung des Steigungsverhaltens der Funktion an der berechneten Stelle sowie eine Überprüfung der Randstellen sind daher nicht erforderlich.)

Produktionserweiterung*

Aufgabennummer: B_337

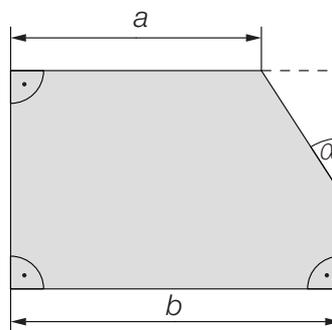
Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Ein Industriebetrieb erwägt die Erweiterung seiner Produktpalette.

- a) Die Produktion des neuen Produktes erfordert Umbauarbeiten. Wegen einer neuen Zufahrtsstraße wird von der unten dargestellten Fläche ein dreieckiger Abschnitt abgetrennt.



Die Größen a , b und α sind bekannt.

- Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Inhalts A dieser dreieckigen Fläche aus den gegebenen Größen.

$A =$ _____

- b) Für eine neue Produktionshalle wird ein Kredit benötigt. Die ersten 5 Jahre garantiert die Bank einen fixen Jahreszinssatz i , für die restliche Laufzeit wird ein Jahreszinssatz i' angenommen.

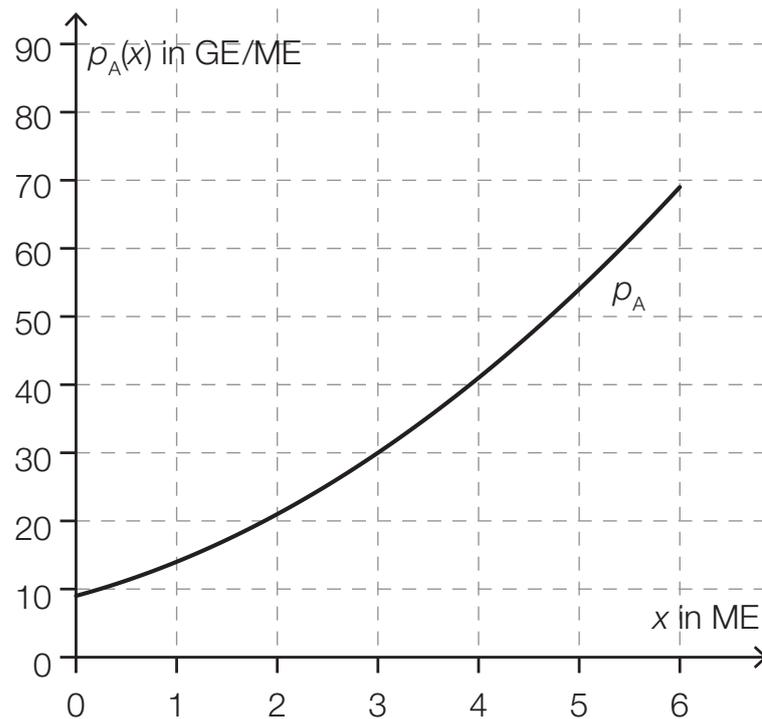
Die nachstehende Tabelle zeigt einen Auszug aus dem Tilgungsplan der Annuitätenschuld.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
5	€ 2.121,44	€ 7.878,56	€ 10.000,00	
6	€ 2.513,44	€ 7.486,56	€ 10.000,00	
...				
12	€ 527,12	€ 9.472,88	€ 10.000,00	€ 3.705,01
13				

- Beschreiben Sie, wie man aus dem Tilgungsplan ablesen kann, dass der Zinssatz i' größer als i ist.
- Berechnen Sie die Zeile für das Jahr 13 des Tilgungsplans, wenn man davon ausgeht, dass die Schuld am Ende dieses Jahres vollständig getilgt wird.

* ehemalige Klausuraufgabe (adaptiert)

- c) Für den Verkauf des neuen Produktes ist der Graph der Preisfunktion des Angebots p_A in der nachstehenden Abbildung dargestellt.
Man hofft, das Produkt zu einem Marktgleichgewichtspreis von 30 GE/ME verkaufen zu können.
Es wird angenommen, dass die Preisfunktion der Nachfrage p_N linear ist und nicht mehr als 5 ME abgesetzt werden können.



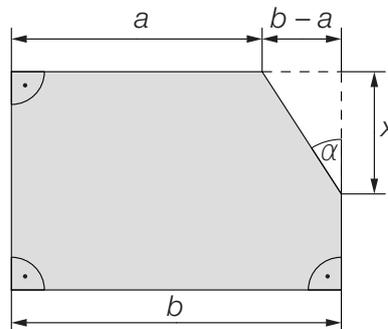
- Zeichnen Sie den Graphen der Preisfunktion der Nachfrage p_N für dieses Produkt in die gegebene Abbildung ein.
- Stellen Sie die Funktionsgleichung von p_N auf.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



$$\tan(\alpha) = \frac{b-a}{x}$$

$$\text{Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks: } A = \frac{(b-a) \cdot x}{2} = \frac{(b-a) \cdot (b-a)}{2 \cdot \tan(\alpha)} = \frac{(b-a)^2}{2 \cdot \tan(\alpha)}$$

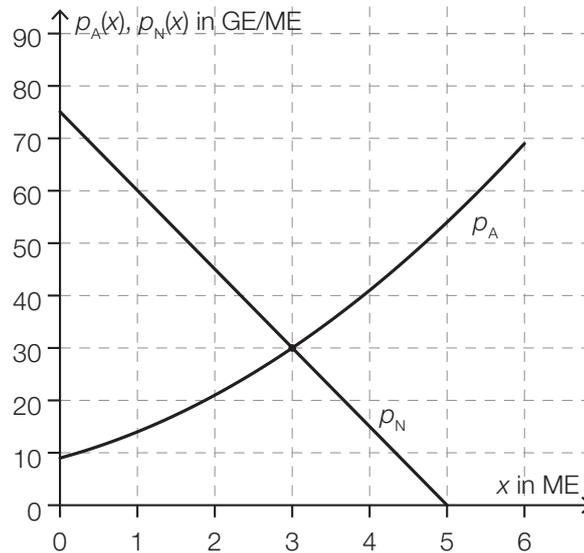
- b) Der Zinsanteil eines Jahres berechnet sich stets basierend auf der verbleibenden Restschuld des Vorjahres. Im 5. Jahr erfolgt eine positive Tilgung. Damit ist die Restschuld am Ende des Jahres 5 geringer als am Ende Jahres 4. Trotzdem ist der Zinsanteil im Jahr 5 geringer als jener im Jahr 6. Der Zinssatz i' muss daher größer als der Zinssatz i sein.

$$\text{Restschuld im Jahr 11: } 3705,01 + 9472,88 = 13177,89$$

$$\text{Zinssatz } i': 527,12 = 13177,89 \cdot i' \Rightarrow i' = 0,0400\dots \approx 4,0\%$$

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
13	$3705,01 \cdot i'$ € 148,20	€ 3.705,01	$148,20 + 3705,01$ € 3.853,21	€ 0

c)



Modellierung der Preisfunktion der Nachfrage p_N mithilfe der gegebenen Punkte oder durch Ablesen aus dem Funktionsgraphen: $p_N(x) = -15 \cdot x + 75$

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
- b) 1 × C: für die richtige Beschreibung
1 × B1: für die richtige Berechnung des Zinssatzes i'
1 × B2: für das richtige Berechnen der letzten Zeile des Tilgungsplans
- c) 1 × A1: für das richtige Einzeichnen des Funktionsgraphen der Preisfunktion der Nachfrage
1 × A2: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung

Leihwagen*

Aufgabennummer: B_318

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Ein Leihwagen-Unternehmen hat in seinem Fuhrpark 2 Modelle. Modell 1 ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,62 verliehen, Modell 2 mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,4. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Modelle gleichzeitig verliehen sind, beträgt 0,35.

A bezeichnet das Ereignis, dass Modell 1 verliehen ist, und B bezeichnet das Ereignis, dass Modell 2 verliehen ist.

- a) – Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 1 Modell nicht verliehen ist.
- b) – Übertragen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Angabe in die entsprechenden Felder der unten stehenden Vierfeldertafel.
 – Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten in den restlichen Feldern und tragen Sie diese ein.

	A	nicht A	Summe
B			
nicht B			
Summe			

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau einer der beiden Leihwagen verliehen ist.
- c) – Zeigen Sie, dass die beiden Ereignisse A und B nicht unabhängig voneinander sind.
 – Beschreiben Sie in Worten, welches Ereignis durch die Wahrscheinlichkeit

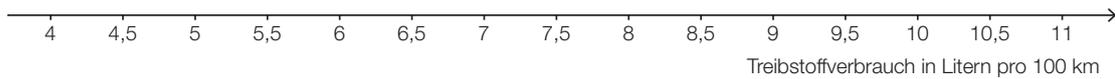
$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,35}{0,4} = 0,875$$

bestimmt wird.

* ehemalige Klausuraufgabe

d) Der Treibstoffverbrauch von Modell 1 ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 6,9$ Liter pro 100 km. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % liegt dieser Treibstoffverbrauch im Intervall $[5,6; 8,2]$.

- Ermitteln Sie die Standardabweichung dieser Normalverteilung.
- Zeichnen Sie den Graphen der Dichtefunktion dieser Normalverteilung in die unten stehende Abbildung ein. Berücksichtigen Sie dabei den Erwartungswert und die Standardabweichung.



- Beschreiben Sie, wie sich eine kleinere Standardabweichung auf den Graphen der Dichtefunktion auswirken würde.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $1 - P(A \cap B) = 1 - 0,35 = 0,65$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Modell nicht verliehen ist, beträgt 0,65.

b)

	A	nicht A	Summe
B	0,35	0,05	0,40
nicht B	0,27	0,33	0,60
Summe	0,62	0,38	

Die hervorgehobenen Werte in der oben stehenden Tabelle sind diejenigen, die aus der Angabe übertragen wurden.

Die Wahrscheinlichkeit, dass genau einer der beiden Leihwagen verliehen ist, beträgt $0,27 + 0,05 = 0,32$.

c) Sind zwei Ereignisse voneinander unabhängig, so gilt: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$$P(A) \cdot P(B) = 0,62 \cdot 0,4 = 0,248$$

$$P(A \cap B) = 0,35$$

Die beiden Ereignisse sind also nicht voneinander unabhängig: $0,35 \neq 0,248$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass Modell 1 verliehen ist, wenn man weiß, dass Modell 2 verliehen ist, beträgt 0,875.

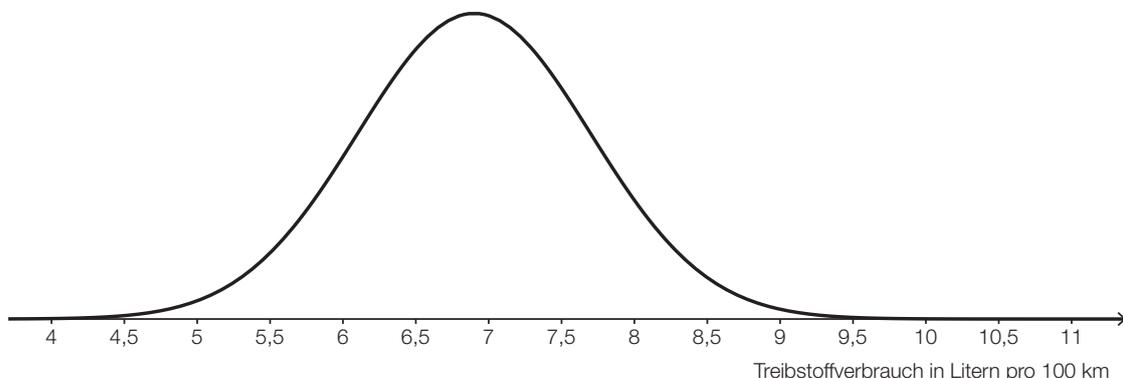
d) $P(5,6 \leq X \leq 8,2) = 0,90$

Aufgrund der Symmetrie gilt: $P(X \leq 8,2) = 0,95$.

$$\Phi(z) = 0,95 \Rightarrow z = 1,644\dots$$

$$\sigma = \frac{8,2 - 6,9}{z} = 0,79\dots \approx 0,8$$

Die Standardabweichung beträgt rund 0,8 Liter pro 100 km.



Bei einer kleineren Standardabweichung wäre die Gauß'sche Glockenkurve schmaler und höher.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
- b) 1 × A: für das richtige Übertragen der Werte in die Vierfeldertafel
1 × B1: für das richtige Ermitteln der fehlenden Werte
1 × B2: für das richtige Bestimmen der Wahrscheinlichkeit
- c) 1 × D: für den richtigen Nachweis der Unabhängigkeit der Ereignisse
1 × C: für die richtige Beschreibung
- d) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Standardabweichung
1 × A: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Dichtefunktion (Glockenkurve mit Maximum an der Stelle μ und Wendepunkten an den Stellen $\mu \pm \sigma$ erkennbar)
1 × C: für die richtige Beschreibung

Sportartikel*

Aufgabennummer: B_348

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

- a) Für einen Sportartikel lassen sich die Produktionskosten mithilfe der linearen Funktion K beschreiben:

$$K(x) = 25 \cdot x + 300$$

x ... Anzahl der produzierten Mengeneinheiten (ME)

$K(x)$... Kosten für x ME in Geldeinheiten (GE)

Die Kapazitätsgrenze liegt dabei bei 50 ME.

Das Produkt kann zu einem Preis von 40 GE/ME verkauft werden.

- Erklären Sie, warum der maximale Gewinn hier nicht mithilfe der Differenzialrechnung ermittelt werden kann.
- Berechnen Sie den maximalen Gewinn.

- b) Die Fixkosten für die Erzeugung eines bestimmten Sportartikels betragen 2900 GE. Die Kostenkehre liegt bei 5 ME. Die Gesamtkosten bei einer Produktionsmenge von 5 ME betragen 3100 GE. Bei einer Produktionsmenge von 9 ME betragen die Gesamtkosten 3252,80 GE.

Der Kostenverlauf soll mithilfe einer Kostenfunktion K mit $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschrieben werden.

- Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten dieser Kostenfunktion.
- Berechnen Sie die Koeffizienten dieser Kostenfunktion.

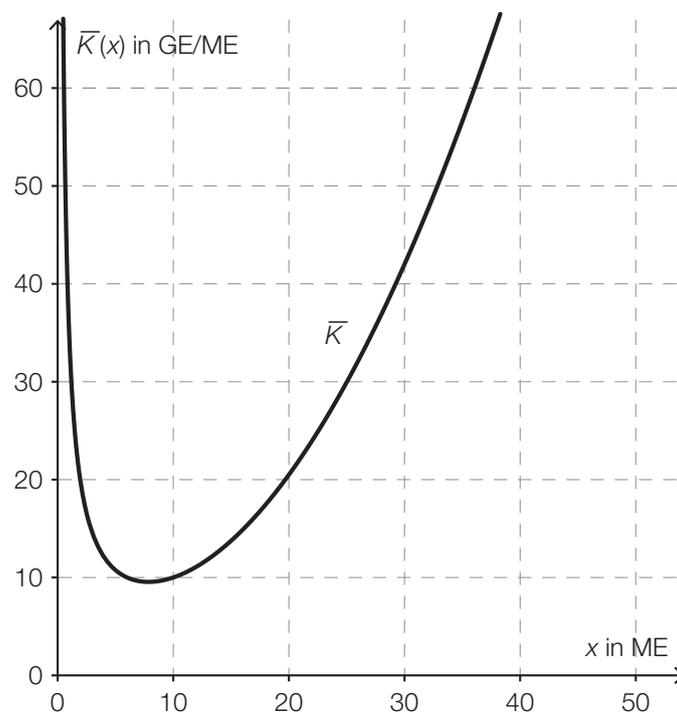
c) Für die Grenzkostenfunktion K' eines anderen Sportartikels gilt:

$$K'(x) = 0,15 \cdot x^2 - 0,6 \cdot x + 5$$

Die Fixkosten betragen 30 GE.

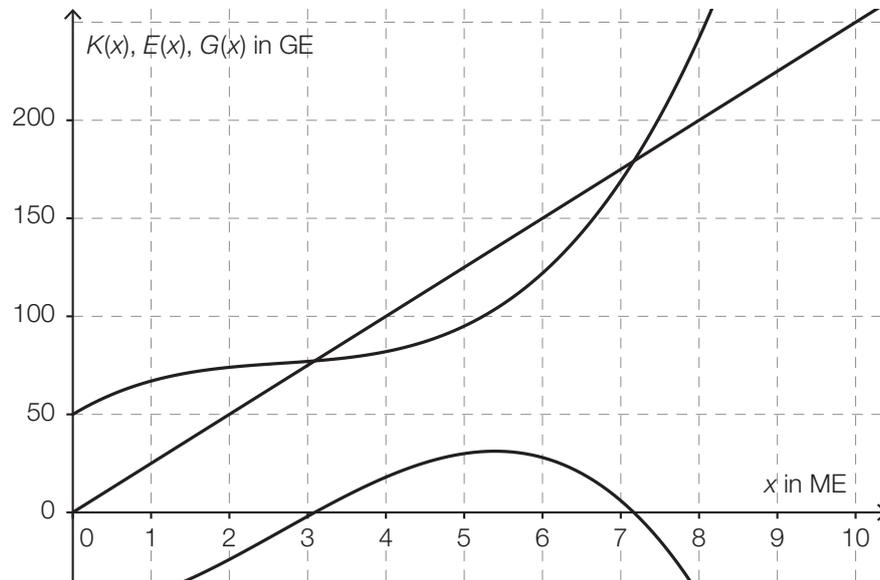
– Ermitteln Sie die zugehörige Kostenfunktion K .

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Stückkostenfunktion \bar{K} dargestellt.



– Lesen Sie das Betriebsoptimum ab.

d) Die Graphen einer Kostenfunktion K , einer Erlösfunktion E und der zugehörigen Gewinnfunktion G sind im nachstehenden Diagramm dargestellt.



- Beschriften Sie im obigen Diagramm diese 3 dargestellten Graphen.
- Stellen Sie die Gleichung der Erlösfunktion E mithilfe des Diagramms auf.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

- a) Die Gewinnfunktion ist im gegebenen Fall eine lineare Funktion mit positiver Steigung. Sie nimmt ihren maximalen Funktionswert am rechten Rand des Definitionsbereichs (Kapazitätsgrenze) an.

$$G(x) = 40 \cdot x - (25 \cdot x + 300)$$

$$G(50) = 450$$

Der maximale Gewinn beträgt 450 GE.

- b) I. $K(0) = 2900$
 II. $K''(5) = 0$
 III. $K(5) = 3100$
 IV. $K(9) = 3252,80$

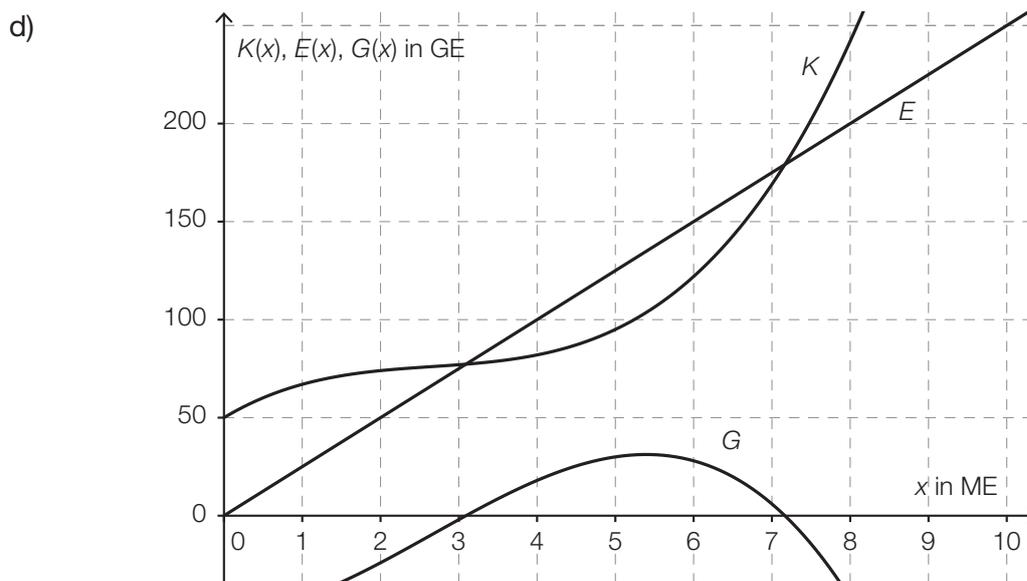
Lösen dieses Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:

$$a = 0,2; b = -3; c = 50; d = 2900$$

- c) $K(x) = \int K'(x) dx = 0,05 \cdot x^3 - 0,3 \cdot x^2 + 5 \cdot x + C$
 $K(0) = 30 \Rightarrow C = 30$
 $K(x) = 0,05 \cdot x^3 - 0,3 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 30$

Betriebsoptimum: rund 8 ME

Toleranzbereich: [7 ME; 9 ME]



$$E(x) = 25 \cdot x$$

Lösungsschlüssel

- a) 1 × D: für die richtige Erklärung
(Auch eine Argumentation, dass die Gewinnfunktion keine lokalen Extremstellen hat, an denen die Tangentensteigung null ist, ist zulässig.)
1 × B: für die richtige Berechnung des maximalen Gewinns
- b) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Gleichung mithilfe der Information zur Kostenkehre
1 × A2: für das richtige Aufstellen der 3 Gleichungen mithilfe der Informationen zu den Kosten
1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten
- c) 1 × A: für das richtige Ermitteln der Kostenfunktion
1 × C: für das richtige Ablesen des Betriebsoptimums im Toleranzbereich [7 ME; 9 ME]
- d) 1 × C: für die richtige Beschriftung der 3 dargestellten Funktionsgraphen
1 × A: für das richtige Aufstellen der Gleichung der Erlösfunktion

Renovierungskredit*

Aufgabennummer: B_349

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Frau Eberharter muss für die Renovierung ihrer Wohnung einen Kredit in Höhe von € 30.000 aufnehmen. Dazu holt sie verschiedene Angebote von Privatpersonen und von Banken ein. (Spesen und Gebühren werden nicht berücksichtigt.)

- a) Eine Bekannte bietet Frau Eberharter privat einen Kredit in Höhe von € 30.000 zu einem Zinssatz von 2 % p. a. an.

Frau Eberharter soll diesen Kredit folgendermaßen zurückzahlen:

€ 8.000 nach einem Jahr und 2 gleich hohe Raten, eine davon nach 3 Jahren und die andere nach 4 Jahren.

- Stellen Sie diese Zahlungen auf einer Zeitachse dar.
- Berechnen Sie die Ratenhöhe.
- Erklären Sie, warum sich diese Ratenhöhe verringert, wenn beide Raten früher bezahlt werden.

- b) Frau Eberharter recherchiert im Internet Angebote von Banken für Kredite in Höhe von € 30.000 mit einer Laufzeit von 60 Monaten.

Eine Bank bietet einen Kredit mit einer monatlichen Rate in Höhe von € 559,11 bei einem Zinssatz von 4,58 % p. a.

- Ermitteln Sie den zugehörigen äquivalenten Monatszinssatz.
- Überprüfen Sie nachweislich, ob es sich um eine vorschüssige oder eine nachschüssige Ratenzahlung handelt.

* ehemalige Klausuraufgabe

- c) Eine Bank bietet Frau Eberharter einen Kredit in Höhe von € 30.000 an, den sie in 10 nachschüssigen Halbjahresraten in Höhe von je € 3.480 zurückzahlen muss.

Für diesen Kredit kann Frau Eberharter einen Annuitätenzuschuss bei der Landesregierung beantragen, d. h., 10 % jeder Halbjahresrate werden vom Land übernommen.

- Berechnen Sie die Höhe der Halbjahresraten, die Frau Eberharter unter Berücksichtigung des Annuitätenzuschusses bezahlen muss.
- Ermitteln Sie den effektiven Jahreszinssatz, der sich für Frau Eberharter unter Berücksichtigung des Annuitätenzuschusses ergibt.
- Ermitteln Sie die Höhe desjenigen Annuitätenzuschusses in Euro, bei dem sich für Frau Eberharter ein effektiver Jahreszinssatz von null Prozent ergeben würde.

- d) Frau Eberharter vereinbart für einen Kredit mit einer Bank Sonderkonditionen. Die Bank erstellt dazu einen Tilgungsplan. Ein Auszug dieses Tilgungsplans ist in der nachstehenden Tabelle dargestellt.

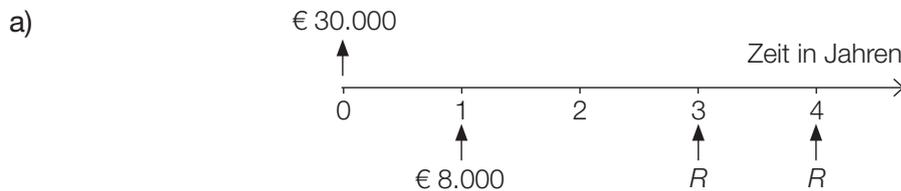
Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 30.000,00
1	€ 660,00	€ -660,00	€ 0,00	€ 30.660,00
2	€ 674,52	€ 0,00	€ 674,52	€ 30.660,00
3	€ 674,52	€ 5.325,48	€ 6.000,00	€ 25.334,52

- Interpretieren Sie die Bedeutung der beiden auftretenden Beträge in Höhe von € 0,00 im gegebenen Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg



$$30000 = 8000 \cdot 1,02^{-1} + R \cdot 1,02^{-3} + R \cdot 1,02^{-4}$$

$$R = 11872,921\dots$$

Die Ratenhöhe beträgt € 11.872,92.

Wenn die Raten früher bezahlt werden, wird die ausstehende Kreditsumme über eine kürzere Zeitspanne verzinst. Daher sind die Raten niedriger.

b) $i_{12} = \sqrt[12]{1 + 0,0458} - 1 = 0,0037388\dots$

Der Monatszinssatz beträgt rund 0,3739 %.

$$q_{12} = 1 + i_{12}$$

$$B_{\text{nach}} = 559,11 \cdot \frac{q_{12}^{60} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{60}} = 30000,132\dots$$

$$B_{\text{vor}} = B_{\text{nach}} \cdot q_{12} = 30112,297\dots$$

Es handelt sich um eine nachschüssige Ratenzahlung, da der Barwert der Raten in diesem Fall der Kreditsumme entspricht.

c) $3480 \cdot 0,9 = 3132$

Unter Berücksichtigung des Annuitätenzuschusses muss Frau Eberharter Halbjahresraten in Höhe von € 3.132 bezahlen.

$$30000 = 3132 \cdot \frac{q_2^{10} - 1}{q_2 - 1} \cdot \frac{1}{q_2^{10}}$$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $q_2 = 1,007906\dots$

$$i = (q_2)^2 - 1 = 0,01587\dots \approx 1,59 \%$$

Der effektive Jahreszinssatz beträgt rund 1,59 %.

Die Verzinsung beträgt 0 %, wenn die Halbjahresraten $\frac{€ 30.000}{10} = € 3.000$ betragen.

Dafür muss zur vereinbarten Halbjahresrate von € 3.480 ein Zuschuss in Höhe von € 480 gewährt werden.

d) Im Semester 1 erfolgt keine Rückzahlung. Im Semester 2 werden nur die anfallenden Zinsen zurückbezahlt.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für das richtige Darstellen auf einer Zeitachse
1 × B: für die richtige Berechnung der Ratenhöhe
1 × D: für die richtige Erklärung
- b) 1 × B: für das richtige Ermitteln des zugehörigen monatlichen Zinssatzes
1 × D: für die richtige Überprüfung
- c) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Höhe der Halbjahresraten unter Berücksichtigung des Annuitätenzuschusses
1 × B2: für das richtige Ermitteln des effektiven Jahreszinssatzes
1 × B3: für das richtige Ermitteln der Höhe des Annuitätenzuschusses
- d) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang

Höhenwachstum von Fichten*

Aufgabennummer: B_350

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Der Zusammenhang zwischen dem Alter und der durchschnittlichen Höhe von Fichten kann näherungsweise mithilfe einer Funktion h beschrieben werden:

$$h(t) = a \cdot e^{-\frac{b}{t}}$$

t ... Alter in Jahren

$h(t)$... durchschnittliche Höhe im Alter t in Metern (m)

$a > 0$... Parameter in m

$b > 0$... Parameter in Jahren

- a) – Begründen Sie mathematisch, warum $e^{-\frac{b}{t}}$ für $t = 0$ nicht definiert ist.
– Begründen Sie mathematisch, warum die durchschnittliche Höhe in diesem Modell a nicht überschreiten kann.

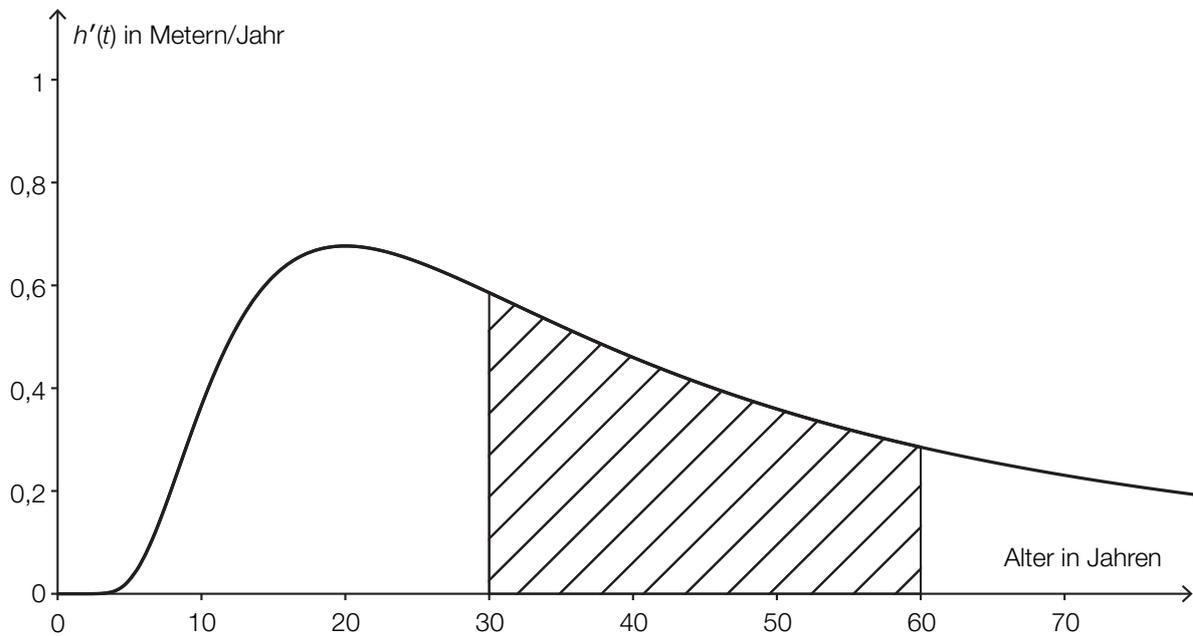
Für einen 80-jährigen Fichtenbestand beträgt die durchschnittliche Höhe der Fichten 19,24 m. Der Parameter a ist gleich 28 m.

- Berechnen Sie den Parameter b .
– Berechnen Sie anhand dieses Modells, um wie viel Prozent die durchschnittliche Höhe in den nächsten 20 Jahren zunehmen wird.

- b) Für einen Fichtenbestand gilt: $a = 60$ m, $b = 50$ Jahre.

- Zeichnen Sie den Graphen der Funktion h im Intervall $[10; 70]$.
– Berechnen Sie die momentane Änderungsrate der durchschnittlichen Höhe für 40-jährige Fichten.

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der momentanen Änderungsrate der durchschnittlichen Höhe eines Fichtenbestandes $h'(t)$ dargestellt.



– Interpretieren Sie die Bedeutung des Inhalts der schraffierten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Durch 0 kann nicht dividiert werden.

Für $b > 0$ und $t > 0$ ist $-\frac{b}{t}$ kleiner als 0 und daher $e^{-\frac{b}{t}}$ kleiner als 1. Daher gilt: $a \cdot e^{-\frac{b}{t}} < a$.

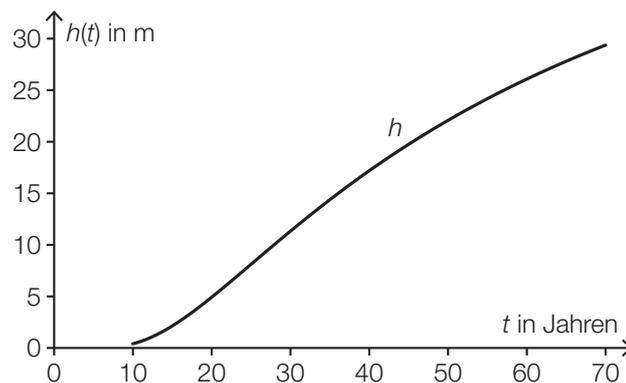
$$19,24 = 28 \cdot e^{-\frac{b}{80}}$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz: $b = 30,0\dots \approx 30$

$$\frac{h(100) - h(80)}{h(80)} = 0,0779\dots \approx 7,8 \%$$

Gemäß diesem Modell rechnet man in den nächsten 20 Jahren mit einer Zunahme der durchschnittlichen Höhe um rund 7,8 %.

b)



$$h'(t) = \frac{3000}{t^2} \cdot e^{-\frac{50}{t}}$$

$$h'(40) = 0,537\dots \approx 0,54$$

Die momentane Änderungsrate der durchschnittlichen Höhe für 40-jährige Fichten beträgt rund 0,54 m pro Jahr.

c) Der Inhalt der schraffierten Fläche entspricht der Zunahme der durchschnittlichen Höhe dieses Fichtenbestands zwischen $t = 30$ Jahre und $t = 60$ Jahre.

Lösungsschlüssel

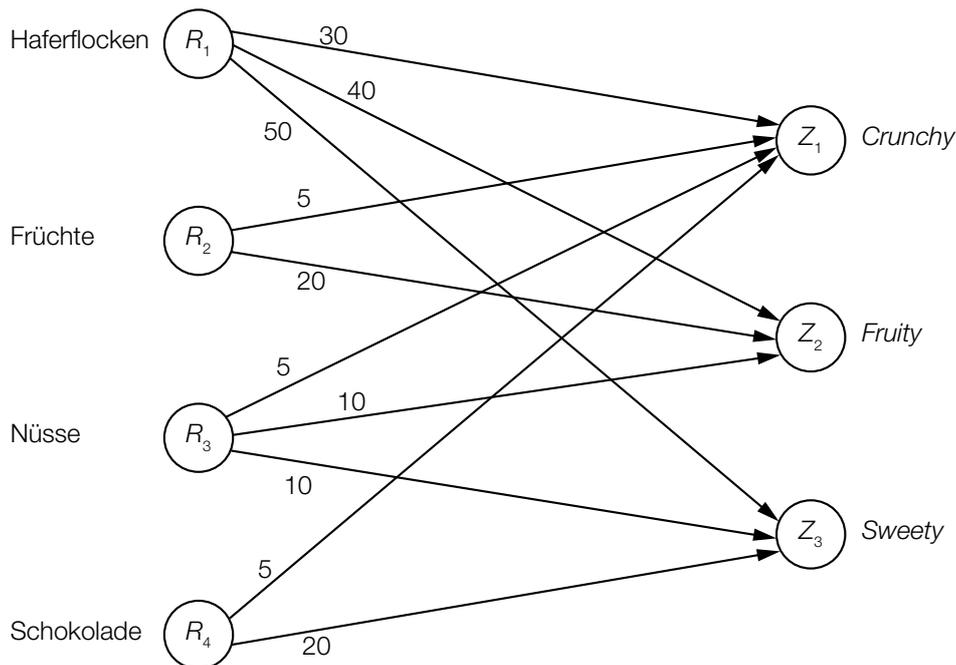
- a) 1 × D1: für die richtige mathematische Begründung, warum die Funktion an der Stelle $t = 0$ nicht definiert ist
1 × D2: für die richtige mathematische Begründung, warum die durchschnittliche Höhe a nicht überschreiten kann
1 × B1: für die richtige Berechnung des Parameters b
1 × B2: für die richtige Berechnung des Prozentsatzes
- b) 1 × B1: für das richtige Zeichnen des Funktionsgraphen im Intervall $[10; 70]$
1 × B2: für die richtige Berechnung der momentanen Änderungsrate der durchschnittlichen Höhe von 40-jährigen Fichten
- c) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang

Müsliriegel

Ein Start-up-Unternehmen bringt verschiedene Müsliriegel-Sorten auf den Markt.

Aus den 4 Rohstoffen Haferflocken (R_1), Früchte (R_2), Nüsse (R_3) und Schokolade (R_4) werden mit Öl und Honig Müsliriegel der Sorten *Crunchy* (Z_1), *Fruity* (Z_2) und *Sweety* (Z_3) als Zwischenprodukte hergestellt.

Im nachstehenden Gozinto-Graphen ist der Mengenbedarf an diesen 4 Rohstoffen in Gramm für die Herstellung jeweils eines Müsliriegels dargestellt.



Das Start-up-Unternehmen bringt die Müsliriegel als Endprodukte in 6er-Probiertpackungen (E_1), in 12er-Packungen (E_2) und in 18er-Mix-Boxen (E_3) auf den Markt.

Die jeweiligen Stückzahlen der Müsliriegel in den Packungen sind in der nachstehenden Tabelle angegeben, die der Matrix \mathbf{P} entspricht.

	6er-Probiertpackung E_1	12er-Packung E_2	18er-Mix-Box E_3
<i>Crunchy</i> Z_1	2	2	10
<i>Fruity</i> Z_2	2	4	4
<i>Sweety</i> Z_3	2	6	4

- a) Der im obigen Gozinto-Graphen dargestellte Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der Müsliriegel soll durch die Matrix \mathbf{R} beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie die Matrix \mathbf{R} . [0/1 P.]

Der Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der Müsliriegel-Packungen soll durch die Matrix \mathbf{V} beschrieben werden.

2) Ermitteln Sie die Matrix \mathbf{V} . [0/1 P.]

3) Interpretieren Sie das Element v_{32} der Matrix \mathbf{V} im gegebenen Sachzusammenhang. [0/1 P.]

Es werden 50 der 6er-Probierpackungen, 30 der 12er-Packungen und 20 der 18er-Mix-Boxen nachgefragt.

Es stehen 40 kg Haferflocken zur Verfügung.

4) Überprüfen Sie nachweislich, ob mit dieser Menge der Mengenbedarf an Haferflocken für die Herstellung der Müsliriegel gedeckt ist. [0/1 P.]

- b) Die Gesamtmasse der Müsliriegel beträgt in der 6er-Probierpackung 540 g, in der 12er-Packung 1 220 g und in der 18er-Mix-Box 1 380 g.

Aus diesen Werten kann mithilfe der Matrix \mathbf{P} die Masse x_1 eines Müsliriegels *Crunchy*, die Masse x_2 eines Müsliriegels *Fruity* und die Masse x_3 eines Müsliriegels *Sweety* berechnet werden.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Massen x_1 , x_2 und x_3 . [0/1 P.]

Die Massen x_1 , x_2 und x_3 können auch zu einem Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ zusammengefasst und mithilfe des Vektors $\vec{m} = \begin{pmatrix} 540 \\ 1\,220 \\ 1\,380 \end{pmatrix}$ und der Matrix $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ ermittelt werden.

2) Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, mit dem der Vektor \vec{x} berechnet werden kann.

[1 aus 5]

[0/1 P.]

$\vec{x} = \mathbf{P} \cdot \vec{m}$	<input type="checkbox"/>
$\vec{x} = \mathbf{P}^T \cdot \vec{m}$	<input type="checkbox"/>
$\vec{x} = (\mathbf{P} \cdot \vec{m})^T$	<input type="checkbox"/>
$\vec{x} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \vec{m}$	<input type="checkbox"/>
$\vec{x} = (\mathbf{P}^T)^{-1} \cdot \vec{m}$	<input type="checkbox"/>

c) In einer Marktstudie wird die Nachfrage nach der 18er-Mix-Box untersucht.

Die Sättigungsmenge liegt bei 180 Stück.

Bei einem Preis von 10 Euro pro Stück beträgt die Nachfrage 80 Stück.

Für die Preisfunktion der Nachfrage p_N gilt:

$$p_N(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + 30$$

x ... nachgefragte Menge in Stück

$p_N(x)$... Preis bei der nachgefragten Menge x in Euro pro Stück

1) Berechnen Sie die Koeffizienten a und b .

[0/1 P.]

2) Berechnen Sie die Nachfrage bei einem Preis von 24 Euro pro Stück.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$$\text{a1) } \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 30 & 40 & 50 \\ 5 & 20 & 0 \\ 5 & 10 & 10 \\ 5 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\text{a2) } \mathbf{V} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 240 & 520 & 660 \\ 50 & 90 & 130 \\ 50 & 110 & 130 \\ 50 & 130 & 130 \end{pmatrix}$$

a3) Man benötigt 110 g Nüsse (R_3) für die Herstellung einer 12er-Packung (E_2).

$$\text{a4) } 240 \cdot 50 + 520 \cdot 30 + 660 \cdot 20 = 40\,800$$

Es werden 40,8 kg Haferflocken benötigt. Der Mengenbedarf an Haferflocken für die Herstellung der Müsliriegel ist somit nicht gedeckt.

- a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Matrix \mathbf{R} .
a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Matrix \mathbf{V} .
a3) Ein Punkt für das richtige Interpretieren des Elements v_{32} im gegebenen Sachzusammenhang.
a4) Ein Punkt für das richtige nachweisliche Überprüfen.

$$\begin{aligned} \text{b1) } 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 &= 540 \\ 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 &= 1\,220 \\ 10 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 &= 1\,380 \end{aligned}$$

b2)

$\vec{x} = (\mathbf{P}^T)^{-1} \cdot \vec{m}$	<input checked="" type="checkbox"/>

- b1) Ein Punkt für das richtige Erstellen des Gleichungssystems.
b2) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

c1) $p_N(180) = 0$
 $p_N(80) = 10$

oder:

$$a \cdot 180^2 + b \cdot 180 + 30 = 0$$

$$a \cdot 80^2 + b \cdot 80 + 30 = 10$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$a = \frac{1}{1200} = 0,0008\dot{3}$$

$$b = -\frac{19}{60} = -0,31\dot{6}$$

c2) $p_N(x) = 24$ oder $\frac{1}{1200} \cdot x^2 - \frac{19}{60} \cdot x + 30 = 24$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$x_1 = 20 \quad (x_2 = 360)$$

Bei einem Preis von 24 Euro pro Stück werden 20 Stück nachgefragt.

c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Koeffizienten a und b .

c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der nachgefragten Menge.

Staatseinnahmen und -ausgaben*

Aufgabennummer: B_352

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Die Statistik Austria gibt u. a. Auskunft über die Einnahmen und Ausgaben des Staates Österreich (vgl. Statistik Austria: Struktur der Einnahmen und Ausgaben des Staates, konsolidiert, Jahresdaten – erstellt am 30.09.2013).

- a) Die folgende Tabelle gibt die Ausgaben des Staates Österreich für den Zeitraum von 2006 bis 2012 in Milliarden Euro an:

Jahr	Ausgaben in Mrd. Euro
2006	127,293
2007	133,180
2008	139,494
2009	145,333
2010	150,593
2011	151,881
2012	158,735

- Ermitteln Sie mit diesem Datensatz die Gleichung der Regressionsgeraden, die die Ausgaben in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren annähert. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2006.
- Beurteilen Sie mithilfe des Korrelationskoeffizienten, ob die Regressionsgerade ein geeignetes Modell darstellt, um die Entwicklung der Ausgaben zu beschreiben.
- Berechnen Sie anhand dieses Modells näherungsweise die Ausgaben im Jahr 2015.

- b) Bei den Einnahmen aus Einkommen- und Vermögensteuern gab es besonders in den Jahren 2006 bis 2009 große Schwankungen.

Die folgende Tabelle gibt die prozentuelle Veränderung der Einnahmen aus Einkommen- und Vermögensteuern gegenüber dem jeweiligen Vorjahr an:

Jahr	2006	2007	2008	2009
Änderung	+6,0 %	+10,0 %	+8,1 %	–11,1 %

- Berechnen Sie die mittlere prozentuelle Änderung der Einnahmen aus Einkommen- und Vermögensteuern pro Jahr für den angegebenen Zeitraum.

c) Die Vermögenseinkommen auf der Einnahmenseite für die Jahre 1976 bis 2012 können näherungsweise durch die folgende quadratische Funktion V beschrieben werden:

$$V(t) = -0,0027 \cdot t^2 + 0,1732 \cdot t + 0,8381$$

t ... Anzahl der Jahre ab 1976, d. h., für das Jahr 1976 gilt: $t = 0$

$V(t)$... Vermögenseinkommen im Jahr t in Milliarden Euro

- Argumentieren Sie anhand der Funktionsgleichung, dass der Graph dieser Funktion einen Hochpunkt hat.
- Ermitteln Sie die Stelle dieses Maximums.
- Berechnen Sie das Integral $\int_0^{36} V(t) dt$.
- Interpretieren Sie den Wert dieses Integrals im gegebenen Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

- a) Ermitteln der Gleichung der Regressionsgeraden mittels Technologieeinsatz:

$$f(t) = 5,1 \cdot t + 128,5$$

Ermitteln des Korrelationskoeffizienten mittels Technologieeinsatz: $r \approx 0,992$

Da der Korrelationskoeffizient sehr nahe bei 1 liegt, kann ein starker linearer Zusammenhang vermutet werden.

$$f(9) = 174,39... \approx 174,4$$

Gemäß diesem Modell betragen die Staatsausgaben im Jahr 2015 rund € 174,4 Milliarden.

- b) $\sqrt[4]{1,06 \cdot 1,1 \cdot 1,081 \cdot 0,889} - 1 = 0,02886... \approx 2,89 \%$

Die mittlere prozentuelle Änderung der Einnahmen aus Einkommen- und Vermögensteuern pro Jahr beträgt im angegebenen Zeitraum rund +2,89 %.

- c) Da der Koeffizient $a = -0,0027$ negativ ist, ist der Graph dieser quadratischen Funktion eine nach unten geöffnete Parabel. Der Scheitel dieser Parabel ist daher ein Hochpunkt.

$$V'(t) = -0,0054 \cdot t + 0,1732$$

$$V'(t) = 0 \Rightarrow t = 32,07... \approx 32,1$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz: $\int_0^{36} V(t) dt = 100,4148$

Dieses Integral beschreibt näherungsweise die Summe der Vermögenseinkommen der Jahre 1976 bis 2012.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der Regressionsgeraden
 1 × D: für die richtige Beurteilung mithilfe des Korrelationskoeffizienten
 1 × B2: für die richtige Berechnung der Ausgaben im Jahr 2015
- b) 1 × B: für die richtige Berechnung der mittleren prozentuellen Änderung pro Jahr
- c) 1 × D: für die richtige Argumentation anhand der Funktionsgleichung
 1 × B1: für die richtige Berechnung der Stelle des Maximums
 1 × B2: für die richtige Berechnung des Integrals
 1 × C: für die richtige Interpretation des Integrals im gegebenen Sachzusammenhang

Größe von Mädchen*

Aufgabennummer: B_353

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

In der nachstehenden Tabelle ist angegeben, wie groß Mädchen eines bestimmten Alters durchschnittlich sind.

Alter (in Jahren)	durchschnittliche Körpergröße (in Zentimetern)
0	51,5
1	74,0
2	85,4
3	95,4
4	102,8
5	109,5
6	115,3

a) – Stellen Sie die durchschnittliche Körpergröße in Abhängigkeit vom Alter in einem Koordinatensystem dar. Verwenden Sie dazu die Angaben aus der obigen Tabelle.

b) – Bestimmen Sie den absoluten Größenzuwachs im 3. Lebensjahr anhand der gegebenen Daten.

– Beschreiben Sie, was mit der folgenden Rechnung im gegebenen Sachzusammenhang ermittelt wird:

$$\frac{102,8 - 95,4}{95,4}$$

c) In der nachstehenden Tabelle sehen Sie, wie schwer Mädchen eines bestimmten Alters durchschnittlich sind.

Alter (in Jahren)	durchschnittliche Masse (in Kilogramm)
1	9,3
2	12,2
3	14,5
4	16,6
5	19,0
6	21,0

Aufgrund der gegebenen Daten kann man vermuten, dass die Abhängigkeit der durchschnittlichen Masse von der durchschnittlichen Körpergröße annähernd durch eine lineare Funktion beschrieben werden kann. Die Werte für die durchschnittliche Körpergröße entnehmen Sie der im Einleitungstext gegebenen Tabelle.

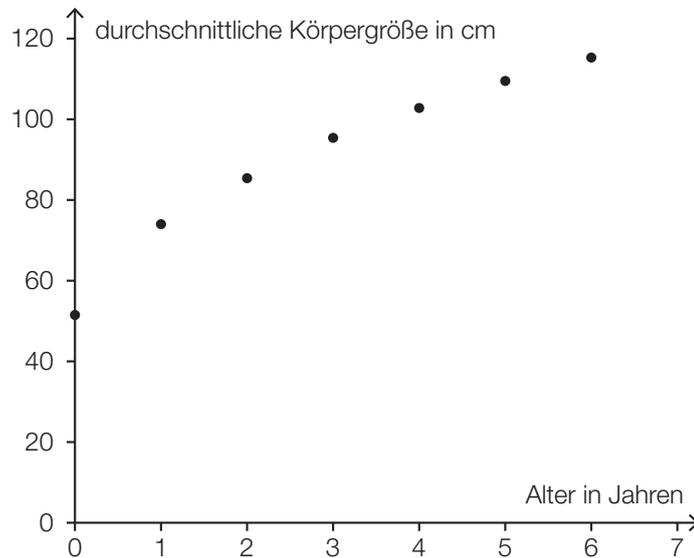
- Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten für den linearen Zusammenhang zwischen durchschnittlicher Körpergröße und durchschnittlicher Masse.
- Interpretieren Sie diesen Korrelationskoeffizienten.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)

b) $95,4 - 85,4 = 10$

Der absolute Größenwuchs im 3. Lebensjahr beträgt 10 cm.

Es wird der relative Zuwachs der durchschnittlichen Körpergröße im 4. Lebensjahr ermittelt.

c) Berechnung des Korrelationskoeffizienten mittels Technologieinsatz: $r \approx 0,9961$

Der Korrelationskoeffizient liegt nahe bei 1 und lässt daher einen starken positiven linearen Zusammenhang vermuten.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für die richtige grafische Darstellung

b) 1 × B: für das richtige Bestimmen des absoluten Größenwachses

1 × C: für die richtige Beschreibung im Sachzusammenhang

c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Korrelationskoeffizienten

1 × C: für die richtige Interpretation des Korrelationskoeffizienten

Medikamentenherstellung

Aufgabennummer: B_368

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Ein Pharmaunternehmen stellt aus den Rohstoffen R_1 , R_2 und R_3 die Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 und daraus das Medikament E her.

Die Produktionsverflechtung ist im nebenstehenden Gozinto-Graphen dargestellt (alle Angaben in ME).

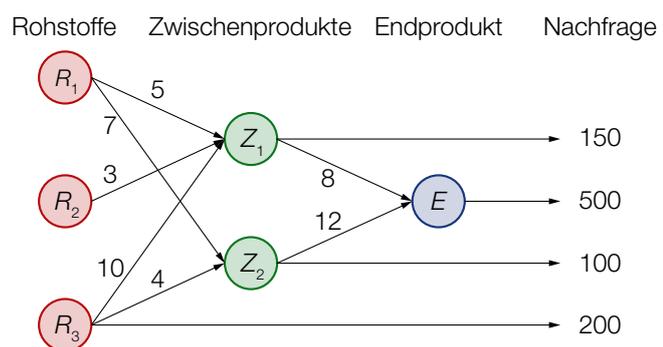


Abbildung 1

- a) – Lesen Sie aus dem Gozinto-Graphen ab, aus welchen Rohstoffmengen 1 ME des Zwischenprodukts Z_2 hergestellt wird.
- Geben Sie an, welche Rohstoffe und Zwischenprodukte direkt nachgefragt werden.
 - Beschreiben Sie, wie man mithilfe des Gozinto-Graphen die benötigten Rohstoffmengen für die Herstellung von 1 ME des Endprodukts berechnen kann.
 - Berechnen Sie den Rohstoffbedarf für 1 ME des Medikaments E .
- b) Die quadratische Matrix \mathbf{A} beschreibt die Produktionsverflechtung zwischen Rohstoffen, den Zwischenprodukten und dem Medikament.

– Erstellen Sie die Matrix \mathbf{A} .

Der Vektor \vec{n} beschreibt die in der obigen Abbildung dargestellte Nachfrage nach R_1 , R_2 , R_3 , Z_1 , Z_2 und E .

– Erstellen Sie den Vektor \vec{n} .

Der Vektor \vec{x} beschreibt die benötigten Mengen an R_1 , R_2 , R_3 , Z_1 , Z_2 und E .

– Berechnen Sie den Vektor \vec{x} .

c) Der Materialbestand im Lager beträgt 80 000 ME von R_1 , 20 000 ME von R_2 und 76 800 ME von R_3 .

Aus diesem Materialbestand sollen 600 ME des Medikaments E hergestellt und keine Rohstoffe oder Zwischenprodukte an den Markt direkt abgegeben werden.

Die Matrix \mathbf{A} beschreibt den Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der Zwischenprodukte. Die Matrix \mathbf{B} beschreibt den Mengenbedarf an Zwischenprodukten für die Herstellung des Medikaments.

- Erstellen Sie die beiden Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} .
- Beschreiben Sie, was mit dem Ausdruck $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot 600$ im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird.
- Berechnen Sie, wie viel von den Rohstoffen R_1 , R_2 und R_3 im Lager übrig bleiben.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) 1 ME von Z_2 wird aus 7 ME R_1 und aus 4 ME R_3 hergestellt.

Der Rohstoff R_3 und die Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 werden direkt nachgefragt.

Für die benötigte Menge von R_1 werden zunächst alle Pfade ausgewählt, die von R_1 zu E führen. Die Zahlen längs eines Pfades werden miteinander multipliziert. Die Produkte aller relevanten Pfade werden abschließend summiert. Für die anderen Rohstoffe wird dieser Vorgang wiederholt.

$$R_1: 5 \cdot 8 + 7 \cdot 12 = 124$$

$$R_2: 3 \cdot 8 = 24$$

$$R_3: 10 \cdot 8 + 4 \cdot 12 = 128$$

Für 1 ME von E werden 124 ME von R_1 , 24 ME von R_2 und 128 ME von R_3 benötigt.

$$\text{b) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \\ 150 \\ 100 \\ 500 \end{pmatrix}$$

Der Rechenweg für \vec{x} ohne Matrizen kann mithilfe der angegebenen Gleichung über das folgende lineare Gleichungssystem erfolgen:

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 \cdot x_4 + 7 \cdot x_5 \\ x_2 &= 3 \cdot x_4 \\ x_3 &= 10 \cdot x_4 + 4 \cdot x_5 + 200 \\ x_4 &= 8 \cdot x_6 + 150 \\ x_5 &= 12 \cdot x_6 + 100 \\ x_6 &= 500 \end{aligned} \quad \text{Dabei gilt: } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

Die Lösung des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz liefert den Vektor \vec{x} :

$$x_1 = 63450; x_2 = 12450; x_3 = 66100; x_4 = 4150; x_5 = 6100; x_6 = 500$$

Alternativer Rechenweg mit der inversen Matrix:

$$\mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 7 & 124 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 4 & 128 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vektor } \vec{x} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 63450 \\ 12450 \\ 66100 \\ 4150 \\ 6100 \\ 500 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Es wird der Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung von 600 ME des Medikaments E berechnet.

$$\text{benötigte Rohstoffmengen: } \left[\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} \right] \cdot 600 = \begin{pmatrix} 74400 \\ 14400 \\ 76800 \end{pmatrix}$$

Von R_1 und R_2 bleiben jeweils 5600 ME übrig, R_3 wird zur Gänze verbraucht.

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 2 Algebra und Geometrie
- b) 2 Algebra und Geometrie
- c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) C Interpretieren und Dokumentieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) A Modellieren und Transferieren
- c) C Interpretieren und Dokumentieren, B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

- a) leicht
- b) mittel
- c) mittel

Punkteanzahl:

- a) 4
- b) 3
- c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Zweistufige Produktion

Aufgabennummer: B_163

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

In einem Unternehmen werden aus den Rohstoffen R_1 und R_2 die Zwischenprodukte Z_1 , Z_2 und Z_3 und daraus die Endprodukte E_1 , E_2 und E_3 hergestellt. Die Mengenangaben erfolgen jeweils in ME.

a) Die Produktionsverflechtung wird durch die beiden nachstehenden Tabellen beschrieben.

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	2,1	1,2	4,3
R_2	3,4	2,5	1,6

	E_1	E_2	E_3
Z_1	2,0	1,3	0
Z_2	3,1	2,4	0
Z_3	0	4,5	2,8

- Veranschaulichen Sie die Produktionsverflechtung von den Rohstoffen bis zu den Endprodukten als Gozinto-Graph.
- Berechnen Sie den Bedarf an Rohstoffen, wenn von jedem der Endprodukte 1 ME hergestellt wird.

b) Die 2×3 -Matrix \mathbf{C} beschreibt den Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der Endprodukte. Der Spaltenvektor \vec{n} beschreibt die Nachfrage nach den Endprodukten. Es soll der Mengenbedarf an Rohstoffen berechnet werden.

- Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils den geeigneten Ansatz aus A bis D zu. [2 zu 4]

Die benötigten Rohstoffe erhält man als Elemente eines Zeilenvektors.

Die benötigten Rohstoffe erhält man als Elemente eines Spaltenvektors.

A $\mathbf{C} \cdot \vec{n}^T$

B $\vec{n} \cdot \mathbf{C}$

C $\mathbf{C} \cdot \vec{n}$

D $\vec{n}^T \cdot \mathbf{C}^T$

Der Vektor $\vec{p} = (20 \ 50)$ beschreibt die Preise der Rohstoffe in €/ME.

– Berechnen Sie die Gesamtkosten für die Rohstoffe für $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 8 & 25 & 12 \\ 15 & 18 & 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 100 \\ 160 \\ 140 \end{pmatrix}$.

c) Im Lager sind Rohstoffmengen vorhanden, die bei der Produktion restlos verbraucht werden sollen. Die Nachfrage nach dem Endprodukt E_3 ist doppelt so hoch wie die Nachfrage nach dem Endprodukt E_1 .

Für die Produktion kann die folgende Matrixgleichung aufgestellt werden:

$$\begin{pmatrix} 570 \\ 430 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 25 & 12 \\ 15 & 18 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 2 \cdot n_1 \end{pmatrix}$$

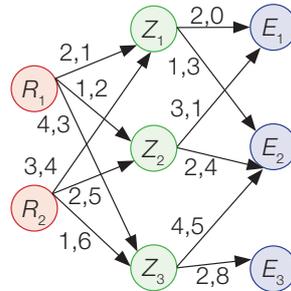
- Erklären Sie die Aussage der einzelnen Matrizen in dieser Gleichung.
- Berechnen Sie die Mengen der Endprodukte, die mit den vorhandenen Rohstoffen hergestellt werden können.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



$$\begin{pmatrix} 2,1 & 1,2 & 4,3 \\ 3,4 & 2,5 & 1,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2,0 & 1,3 & 0 \\ 3,1 & 2,4 & 0 \\ 0 & 4,5 & 2,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44,92 \\ 36,65 \end{pmatrix}$$

Vom Rohstoff R_1 benötigt man 44,92 ME, vom Rohstoff R_2 benötigt man 36,65 ME.

b)

Die benötigten Rohstoffe erhält man als Elemente eines Zeilenvektors.	\mathcal{D}
Die benötigten Rohstoffe erhält man als Elemente eines Spaltenvektors.	\mathcal{C}

A	$\mathbf{C} \cdot \vec{n}^T$
B	$\vec{n} \cdot \mathbf{C}$
C	$\mathbf{C} \cdot \vec{n}$
D	$\vec{n}^T \cdot \mathbf{C}^T$

$$\vec{p} \cdot (\mathbf{C} \cdot \vec{n}) = (20 \ 50) \cdot \begin{pmatrix} 6480 \\ 5080 \end{pmatrix} = 383600$$

Die Gesamtkosten betragen € 383.600.

c) $\begin{pmatrix} 570 \\ 430 \end{pmatrix}$ gibt die vorhandenen Rohstoffmengen an

$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 2 \cdot n_1 \end{pmatrix}$ gibt die Nachfrage nach den Endprodukten an

$\begin{pmatrix} 8 & 25 & 12 \\ 15 & 18 & 5 \end{pmatrix}$ gibt den Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der Endprodukte an

$$\text{I: } 570 = 8 \cdot n_1 + 25 \cdot n_2 + 24 \cdot n_1$$

$$\text{II: } 430 = 15 \cdot n_1 + 18 \cdot n_2 + 10 \cdot n_1$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$n_1 = 10; n_2 = 10$$

Von E_1 können 10 ME hergestellt werden, von E_2 10 ME und von E_3 20 ME.

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 2 Algebra und Geometrie
- b) 2 Algebra und Geometrie
- c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren
- b) C Interpretieren und Dokumentieren
- c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) mittel
- c) mittel

Punkteanzahl:

- a) 3
- b) 3
- c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Elektronische Geräte

Aufgabennummer: B_367

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Für die Herstellung eines bestimmten elektronischen Geräts benötigt man die Bausteine B_1 , B_2 und B_3 . Daraus werden eine Platine Z als Zwischenprodukt und 2 Geräte E_1 und E_2 als Endprodukte hergestellt. Zusätzlich erfüllt das Unternehmen die direkte Nachfrage nach Bausteinen B_2 und B_3 sowie dem Zwischenprodukt Z .

Die Matrix \mathbf{A} beschreibt die Produktionsverflechtung zwischen den Bausteinen, dem Zwischenprodukt und den Endprodukten. Der Produktionsvektor \vec{x} beschreibt die benötigten Mengen an Bausteinen, Zwischenprodukten und Endprodukten. (Alle Angaben in Stück.)

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & B_1 & B_2 & B_3 & Z & E_1 & E_2 \\ \begin{matrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ Z \\ E_1 \\ E_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}; \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 32000 \\ 51000 \\ 23000 \\ 1600 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

- a) – Erklären Sie, was die Zahlen in der 2. Zeile der Matrix \mathbf{A} im gegebenen Sachzusammenhang bedeuten.
- Veranschaulichen Sie die in Matrix \mathbf{A} beschriebene Produktionsverflechtung durch einen Gozinto-Graphen.
- b) – Berechnen Sie, welche Mengen an Bausteinen, Zwischenprodukten und Endprodukten direkt nachgefragt werden.

Die direkte Nachfrage nach B_2 und jene nach Z ändern sich: Der Absatz von B_2 wird halbiert, jener von Z vervierfacht, die Matrix \mathbf{A} bleibt gleich.

- Berechnen Sie den neuen Produktionsvektor \vec{x}_2 .
 - Beschreiben Sie die Veränderung der Produktionsmengen, die sich durch die geänderte Nachfrage ergibt.
- c) B_1 kostet 0,90 €/Stück, B_2 0,70 €/Stück und B_3 0,80 €/Stück.
- Erstellen Sie den Vektor \vec{r} , der den Bedarf an den Bausteinen B_1 , B_2 und B_3 für die Herstellung einer Platine Z beschreibt.
 - Berechnen Sie die gesamten Kosten für die Bausteine, die bei der Herstellung einer Platine anfallen.

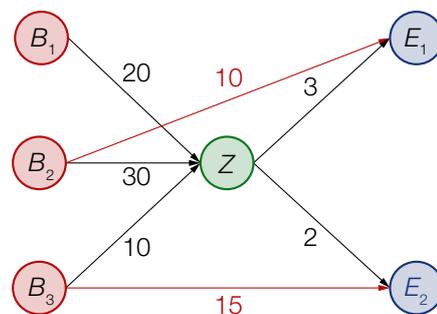
Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

- a) Die Nullen in den ersten 3 Spalten der 2. Zeile der Matrix \mathbf{A} beschreiben, dass der Baustein B_2 mit sich selbst und mit den anderen Bausteinen nicht in Beziehung steht. In der 4. Spalte der 2. Zeile findet man die Menge der Bausteine B_2 , die für die Herstellung einer Platine Z benötigt werden. In der 5. Spalte findet man die Anzahl der Bausteine B_2 , die für die Herstellung eines Geräts E_1 benötigt wird. Die 6. Spalte sagt aus, dass B_2 nicht im Gerät E_2 eingesetzt wird.

Gozinto-Graph:



b) $\vec{n} = \vec{x} - \mathbf{A} \cdot \vec{x}$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 32000 \\ 51000 \\ 23000 \\ 1600 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 32000 \\ 51000 \\ 23000 \\ 1600 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \\ 2500 \\ 400 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Es werden 1 000 Stück der Bausteine B_2 , 2 500 Stück von B_3 , 400 Stück Platinen Z und 200 Geräte E_1 sowie 300 Geräte E_2 von dieser Produktion direkt nachgefragt.

Die Änderung des Nachfragevektors ergibt mit $\vec{x} = \mathbf{A} \cdot \vec{x} - \vec{n}$ das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 &= 20 \cdot x_4 \\ x_2 &= 30 \cdot x_4 + 10 \cdot x_5 + 500 \\ x_3 &= 10 \cdot x_4 + 15 \cdot x_6 + 2500 \\ x_4 &= 3 \cdot x_5 + 2 \cdot x_6 + 1600 \\ x_5 &= 200 \\ x_6 &= 300 \end{aligned}$$

Die Lösung des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz ergibt die Komponenten des neuen Produktionsvektors:

$$x_1 = 56000; \quad x_2 = 86500; \quad x_3 = 35000; \quad x_4 = 2800; \quad x_5 = 200; \quad x_6 = 300$$

Alternativer Lösungsweg mit der inversen Matrix:

$$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 500 \\ 2500 \\ 1600 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 500 \\ 2500 \\ 1600 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56000 \\ 86500 \\ 35000 \\ 2800 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

- c) Nur die Anzahl der beiden Geräte E_1 und E_2 ändert sich nicht, alle übrigen Produktionsmengen müssen erhöht werden: B_1 um 24 000 Stück, B_2 um 35 500 Stück, B_3 um 12 000 Stück und Z um 1 200 Stück.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\text{gesamte Kosten: } (0,9 \quad 0,7 \quad 0,8) \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix} = 47$$

Die Bausteine für die Herstellung einer Platine kosten insgesamt € 47.

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 2 Algebra und Geometrie
- b) 2 Algebra und Geometrie
- c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) D Argumentieren und Kommunizieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren
- b) A Modellieren und Transferieren, C Interpretieren und Dokumentieren
- c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) schwer
- c) leicht

Punkteanzahl:

- a) 2
- b) 4
- c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Modell-Kuh*

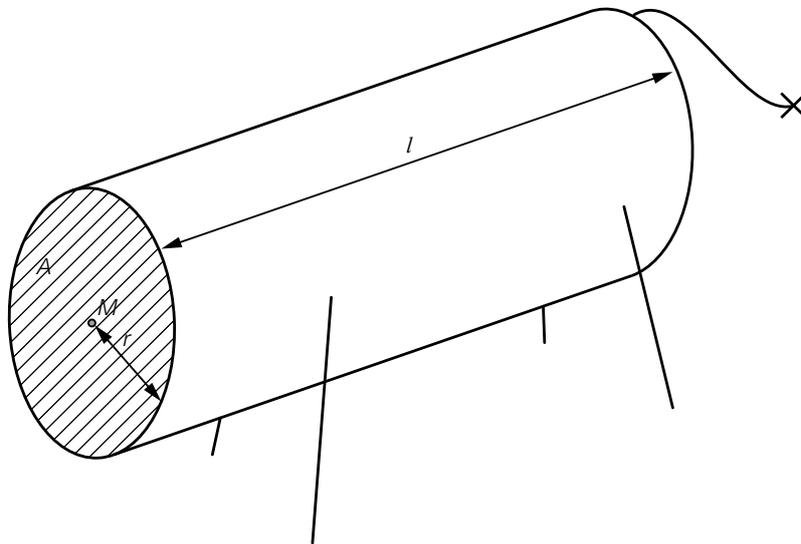
Aufgabennummer: B_385

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

- a) Um in einer Faustformel einen Zusammenhang zwischen Brustumfang und Volumen einer Kuh herzustellen, wird die Kuh modellhaft als Zylinder mit einer kreisförmigen Querschnittsfläche und der Länge l angenommen.



Dazu muss der Flächeninhalt A der Kreisfläche durch den Umfang u des Kreises ausgedrückt werden.

- Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A in Abhängigkeit vom Umfang u auf.

$$A = \underline{\hspace{10cm}}$$

In diesem Modell wird die Länge l des Zylinders als das 9-Fache des Radius r angenommen.

- Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Volumens V in Abhängigkeit vom Umfang u auf.

$$V = \underline{\hspace{10cm}}$$

Der Brustumfang einer Kuh ist um 10 % größer als jener einer anderen Kuh.

- Bestimmen Sie, um wie viel Prozent das Volumen dieser Kuh größer ist als das Volumen der anderen Kuh.

* ehemalige Klausuraufgabe

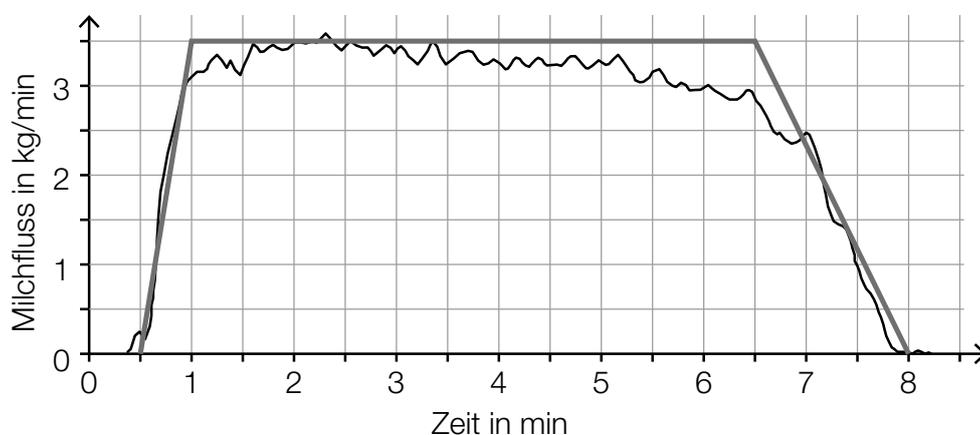
b) Die nachstehende Tabelle gibt den Brustumfang und die Lebendmasse von 8 Kühen an.

Brustumfang in cm	Lebendmasse in kg
153	240
155	303
161	285
163	320
165	373
167	318
169	387
170	358

In einem vereinfachten Modell kann für Brustumfänge von 150 cm bis 170 cm ein linearer Zusammenhang zwischen den beiden angegebenen Größen angenommen werden.

- Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. (Die Lebendmasse soll in Abhängigkeit vom Brustumfang beschrieben werden.)
- Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.
- Berechnen Sie mithilfe dieses Modells die Lebendmasse, die man bei einem Brustumfang von 160 cm erwarten kann.

c) Die nachstehende Grafik zeigt den Milchfluss während eines Melkvorgangs in Kilogramm pro Minute (kg/min) in Abhängigkeit von der Zeit in Minuten (min). Für weitere Berechnungen wird der Milchfluss durch einen Streckenzug in Form eines Trapezes modelliert. Dieser Streckenzug ist ebenfalls eingezeichnet.



- Veranschaulichen Sie in der obigen Grafik die während dieses Melkvorgangs insgesamt gemolkene Milchmenge.
- Bestimmen Sie näherungsweise die während dieses Melkvorgangs insgesamt gemolkene Milchmenge.

Möglicher Lösungsweg

$$\text{a) } u = 2 \cdot r \cdot \pi \Rightarrow r = \frac{u}{2 \cdot \pi}$$

$$A = r^2 \cdot \pi$$

$$\Rightarrow A = \frac{u^2}{4 \cdot \pi}$$

$$l = 9 \cdot r$$

$$V = A \cdot 9 \cdot r$$

$$V = \frac{u^2}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{9 \cdot u}{2 \cdot \pi} = \frac{9 \cdot u^3}{8 \cdot \pi^2}$$

$$V_{\text{neu}} = \frac{9 \cdot (1,1 \cdot u)^3}{8 \cdot \pi^2} = \frac{9 \cdot 1,1^3 \cdot u^3}{8 \cdot \pi^2} = 1,1^3 \cdot V = 1,331 \cdot V$$

Wenn der Umfang um 10 % steigt, nimmt gemäß diesem Modell das Volumen um 33,1 % zu.

b) Ermitteln der Gleichung der Regressionsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$$y = 6,50 \cdot x - 736 \quad (\text{Koeffizienten gerundet})$$

x ... Brustumfang in cm

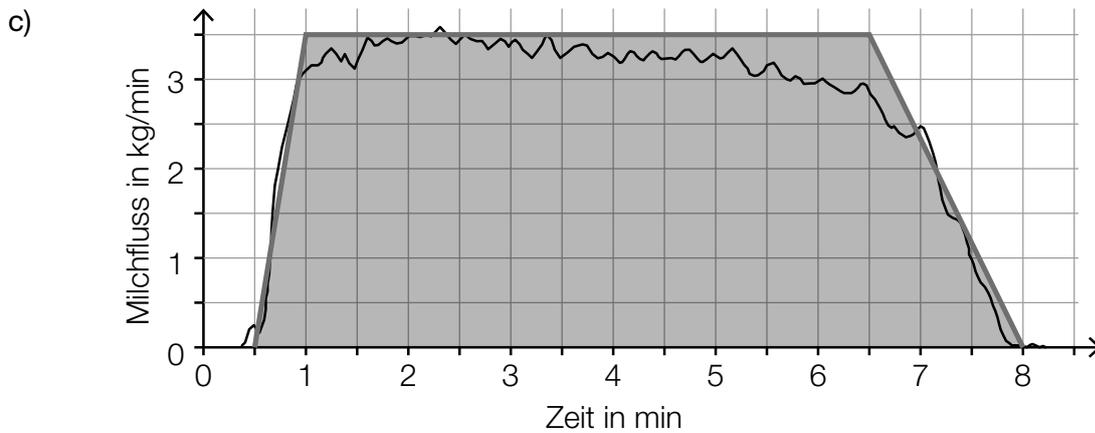
y ... Lebendmasse in kg

Gemäß dem Modell steigt die Lebendmasse pro Zentimeter Brustumfang um rund 6,50 kg.

$x = 160$ cm:

$$6,50 \dots \cdot 160 - 736, \dots = 304,2 \dots \approx 304$$

Gemäß dem Modell kann man bei einem Brustumfang von 160 cm eine Lebendmasse von rund 304 kg erwarten.



Auch das Veranschaulichen der Milchmenge als Fläche zwischen dem Graphen der Funktion und der horizontalen Achse ist als richtig zu werten.

Die gemolkene Milchmenge entspricht dem Flächeninhalt A des Trapezes:

$$A = \frac{(7,5 + 5,5) \cdot 3,5}{2} = 22,75$$

Es wurden 22,75 kg Milch gemolken.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Formel für A in Abhängigkeit von u
 1 × A2: für das richtige Aufstellen der Formel für V in Abhängigkeit von u
 1 × A3: für das richtige Bestimmen des prozentuellen Unterschieds
- b) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der Regressionsfunktion
 1 × C: für eine richtige Interpretation des Werts der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang
 1 × B2: für die richtige Berechnung der Lebendmasse bei 160 cm Brustumfang
- c) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Milchmenge als Fläche zwischen dem Streckenzug bzw. dem Graphen der Funktion und der horizontalen Achse
 1 × B: für das richtige Bestimmen der insgesamt gemolkene Milchmenge

Taxi*

Aufgabennummer: B_386

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Ein Taxiunternehmen möchte seinen PKW-Park um einen Kleinbus erweitern.

- a) Der Anschaffungswert des Kleinbusses beträgt € 90.000. In den ersten 3 Jahren erhält das Taxiunternehmen jährlich eine Förderung von 10 % des Anschaffungswerts. Diese Förderung muss nicht zurückgezahlt werden.

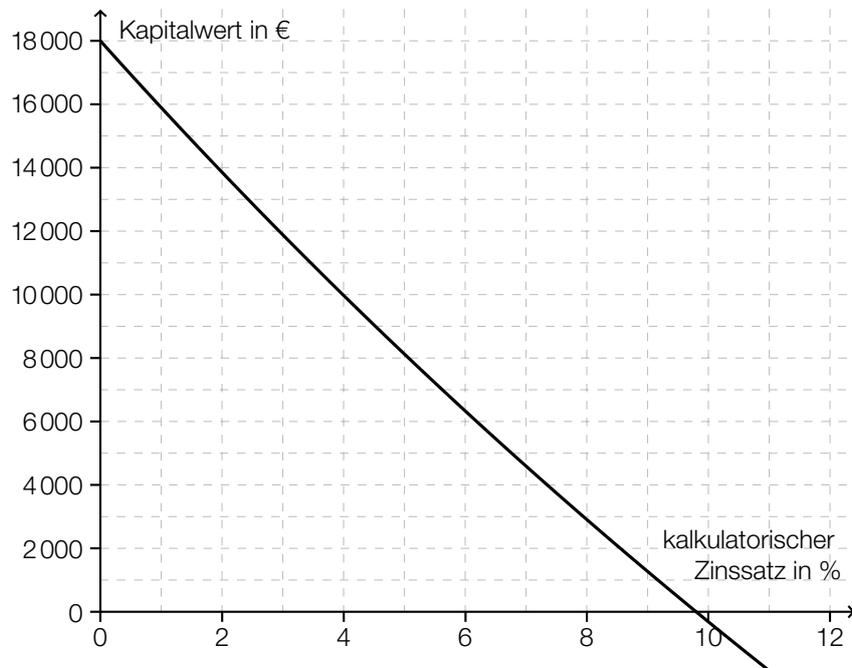
Das Taxiunternehmen rechnet mit folgenden Ausgaben und Einnahmen (die Förderung ist bei den Angaben in der Tabelle nicht berücksichtigt):

Jahr	Ausgaben	Einnahmen
1	€ 2.000	€ 30.000
2	€ 5.000	€ 32.000
3	€ 7.000	€ 33.000

Das Taxiunternehmen rechnet mit einem kalkulatorischen Zinssatz von 4 % p. a.

– Berechnen Sie den Kapitalwert der Investition unter Berücksichtigung der Förderung.

b) In der nachstehenden Abbildung ist der Kapitalwert einer Investition in Abhängigkeit vom kalkulatorischen Zinssatz dargestellt.



- Lesen Sie aus der obigen Abbildung den internen Zinssatz ab.
- Beschreiben Sie in Worten, wie sich der interne Zinssatz ändert, wenn der Anschaffungswert der Investition sinkt.

Möglicher Lösungsweg

- a) Höhe der jährlichen Förderung: $\text{€ } 90.000 \cdot 0,1 = \text{€ } 9.000$

Rückflüsse unter Berücksichtigung der Förderung:

Jahr	Rückflüsse
1	€ 37.000
2	€ 36.000
3	€ 35.000

$$C_0 = -90000 + 37000 \cdot 1,04^{-1} + 36000 \cdot 1,04^{-2} + 35000 \cdot 1,04^{-3} = +9975,819\dots \\ \approx +9975,82$$

Der Kapitalwert dieser Investition unter Berücksichtigung der Förderung beträgt € 9.975,82.

- b) interner Zinssatz: 9,8 %
Toleranzbereich: [9,6 %; 10,0 %]

Wenn der Anschaffungswert der Investition sinkt, wird die Kapitalwertkurve nach oben verschoben, der interne Zinssatz wird größer.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für einen richtigen Ansatz zur Berechnung des Kapitalwerts
1 × B: für die richtige Berechnung des Kapitalwerts der Investition unter Berücksichtigung der Förderung
- b) 1 × C1: für das richtige Ablesen des internen Zinssatzes im Toleranzbereich [9,6 %; 10,0 %]
1 × C2: für eine richtige Beschreibung

Ansparpläne*

Aufgabennummer: B_382

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Für die Finanzierung größerer Anschaffungen ist es oft nötig, einen Geldbetrag anzusparen. Im Folgenden wird die Kapitalertragsteuer nicht berücksichtigt.

a) Andrea möchte einen Geldbetrag E ansparen.

Dazu legt sie einen Geldbetrag B , der mit dem jährlichen Zinssatz i verzinst wird, für n Jahre auf einem Sparkonto an.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung von E , wenn B , n und i bekannt sind.

$E =$ _____

– Formen Sie diese Formel nach dem Zinssatz i um.

b) Bernhard möchte auf einem Konto in 4 Jahren € 4.000 angespart haben. Dazu will er sofort € 1.000 auf das Konto legen, nach 1 Jahr € 1.500 und nach 3 Jahren den nötigen Restbetrag R . Der Zinssatz beträgt 3 % p. a.

– Veranschaulichen Sie diesen Zahlungsstrom auf einer Zeitachse.

– Erklären Sie in Worten (ohne Rechnung), warum der Restbetrag R kleiner als € 1.500 sein muss.

– Berechnen Sie den Restbetrag R .

c) Cornelia führt für ihren Ansparplan folgende Rechnung durch:

$$5000 \cdot 1,035^5 + 1000 \cdot 1,035^2 \approx 7009,66$$

– Beschreiben Sie diesen Ansparplan hinsichtlich der Zahlungen, des Zinssatzes, der Verzinsungsdauer und des angesparten Geldbetrags in Worten.

d) Daniel möchte in 2 Jahren insgesamt € 10.000 angespart haben. Seine Ersparnisse betragen derzeit € 4.000. Den Restbetrag will er ansparen, indem er jeweils am Ende jedes Monats einen gleichbleibenden Betrag anspart.

– Ermitteln Sie die Höhe dieses gleichbleibenden Betrags, wenn die Beträge nicht verzinst werden.

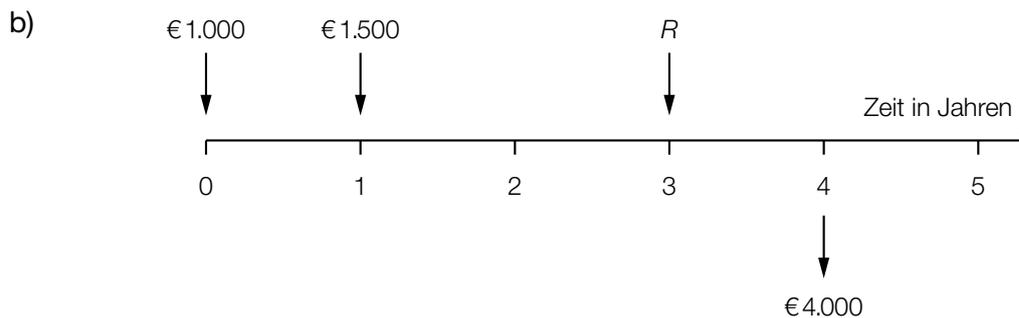
– Ermitteln Sie die Höhe dieses gleichbleibenden Betrags, wenn alle Beträge zu einem Zinssatz von 0,25 % p. m. veranlagt werden.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) $E = B \cdot (1 + i)^n$

$$i = \sqrt[n]{\frac{E}{B}} - 1$$



Der Punkt ist auch zu vergeben, wenn der angesparte Betrag (€ 4.000) auf der Zeitachse nicht angegeben ist.

Der Restbetrag muss kleiner als € 1.500 sein, da die Einzahlungen verzinst werden.

Eine Begründung nur durch die nachstehende Rechnung ist nicht ausreichend.

$$1000 \cdot 1,03^4 + 1500 \cdot 1,03^3 + R \cdot 1,03 = 4000$$

$$R = \frac{4000 - 1000 \cdot 1,03^4 - 1500 \cdot 1,03^3}{1,03} = 1199,418\dots$$

Als Restbetrag müssen € 1.199,42 eingezahlt werden.

- c) € 5.000 werden 5 Perioden lang mit einem Zinssatz von 3,5 % pro Periode veranlagt. Nach 3 Perioden kommen noch € 1.000 dazu. Nach 5 Perioden beträgt der angesparte Geldbetrag € 7.009,66.

Wurden konkrete Perioden (z. B. Jahre) bei der Beschreibung verwendet, ist der Punkt zu vergeben.

- d) ohne Verzinsung:

$$\frac{6000}{24} = 250$$

Ohne Verzinsung beträgt die Ratenhöhe € 250.

mit Verzinsung:

$$4000 \cdot 1,0025^{24} + R \cdot \frac{1,0025^{24} - 1}{0,0025} = 10000$$

$$R = (10000 - 4000 \cdot 1,0025^{24}) \cdot \frac{0,0025}{1,0025^{24} - 1} = 232,887\dots$$

Mit Verzinsung beträgt die Ratenhöhe € 232,89.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel
1 × B: für das richtige Umformen der Formel nach der Variablen i
- b) 1 × A: für das richtige Darstellen auf einer Zeitachse (Der Punkt ist auch zu vergeben, wenn der angesparte Betrag (€ 4.000) auf der Zeitachse nicht angegeben ist.)
1 × D: für eine richtige Erklärung zur Höhe des Restbetrags
1 × B: für die richtige Berechnung des Restbetrags
- c) 1 × C: für eine richtige Beschreibung (Wurden konkrete Perioden (z. B. Jahre) bei der Beschreibung verwendet, ist der Punkt zu vergeben.)
- d) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Ratenhöhe ohne Verzinsung
1 × B2: für das richtige Ermitteln der Ratenhöhe mit Verzinsung

Konten*

Aufgabennummer: B_387

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Von den Kunden einer Bankfiliale besitzen 80 % ein Gehaltskonto und 40 % ein Sparkonto.
25 % der Kunden der Bankfiliale besitzen sowohl ein Gehalts- als auch ein Sparkonto.
G bezeichnet das Ereignis, dass ein Kunde ein Gehaltskonto besitzt.
S bezeichnet das Ereignis, dass ein Kunde ein Sparkonto besitzt.

- a) – Übertragen Sie die Werte der Angabe in die entsprechenden Felder der unten stehenden Vierfeldertafel.
– Ermitteln Sie die Werte in den restlichen Feldern und tragen Sie diese ein.

	besitzt Gehaltskonto	besitzt kein Gehaltskonto	Summe
besitzt Sparkonto			
besitzt kein Sparkonto			
Summe			

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 10 zufällig ausgewählten Kunden mindestens 2 Kunden weder ein Gehalts- noch ein Sparkonto besitzen.

- b) – Überprüfen Sie nachweislich, ob die Ereignisse G und S voneinander unabhängig sind.

Möglicher Lösungsweg

a)	besitzt Gehaltskonto	besitzt kein Gehaltskonto	Summe
besitzt Sparkonto	25 %	15 %	40 %
besitzt kein Sparkonto	55 %	5 %	60 %
Summe	80 %	20 %	

Die hervorgehobenen Werte in der oben stehenden Tabelle sind diejenigen, die aus der Angabe übertragen wurden.

X ... Anzahl der Kundinnen und Kunden, die weder ein Gehalts- noch ein Sparkonto besitzen

Binomialverteilung: $n = 10$, $p = 0,05$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 0,08613... \approx 8,61 \%$$

b) Sind zwei Ereignisse unabhängig, so gilt: $P(G \cap S) = P(G) \cdot P(S)$.

$$P(G \cap S) = 0,25$$

$$P(G) \cdot P(S) = 0,8 \cdot 0,4 = 0,32 \neq 0,25$$

Da $P(G) \cdot P(S) \neq P(G \cap S)$, sind die beiden Ereignisse abhängig.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Übertragen der Werte in die Vierfeldertafel

1 × B1: für das richtige Ermitteln der fehlenden Werte

1 × B2: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

b) 1 × D: für die richtige Überprüfung zur Unabhängigkeit

Kreativ-Workshop*

Aufgabennummer: B_383

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

- a) In den kommenden Sommerferien möchte der Kulturverband einer Großstadt eine Kombination aus Ausstellungsbesuch, Malkurs und Mittagessen für Kinder anbieten.

Laut einer Umfrage würde dieses Angebot bei einem Preis von € 23 pro Kind für 1 050 Kinder gebucht werden. Bei einem Preis von € 27 pro Kind würde dieses Angebot für 990 Kinder gebucht werden.

– Stellen Sie eine Funktionsgleichung der zugehörigen linearen Preisfunktion der Nachfrage auf.

- b) Die Preisfunktion der Nachfrage p für einen 2-tägigen Kreativ-Workshop ist erhoben worden:

$$p(x) = -0,5 \cdot x + 220$$

x ... Anzahl der teilnehmenden Personen

$p(x)$... Preis bei x Personen in € pro Person

- Berechnen Sie denjenigen Preis pro Person, bei dem 200 Personen zu erwarten sind.
- Geben Sie den Höchstpreis an.
- Berechnen Sie die Sättigungsmenge.

- c) Bei einem Kreativ-Workshop fallen für den Veranstalter Kosten an, die sich näherungsweise durch die folgende Kostenfunktion K beschreiben lassen:

$$K(x) = 0,01 \cdot x^2 + 35 \cdot x + 4800$$

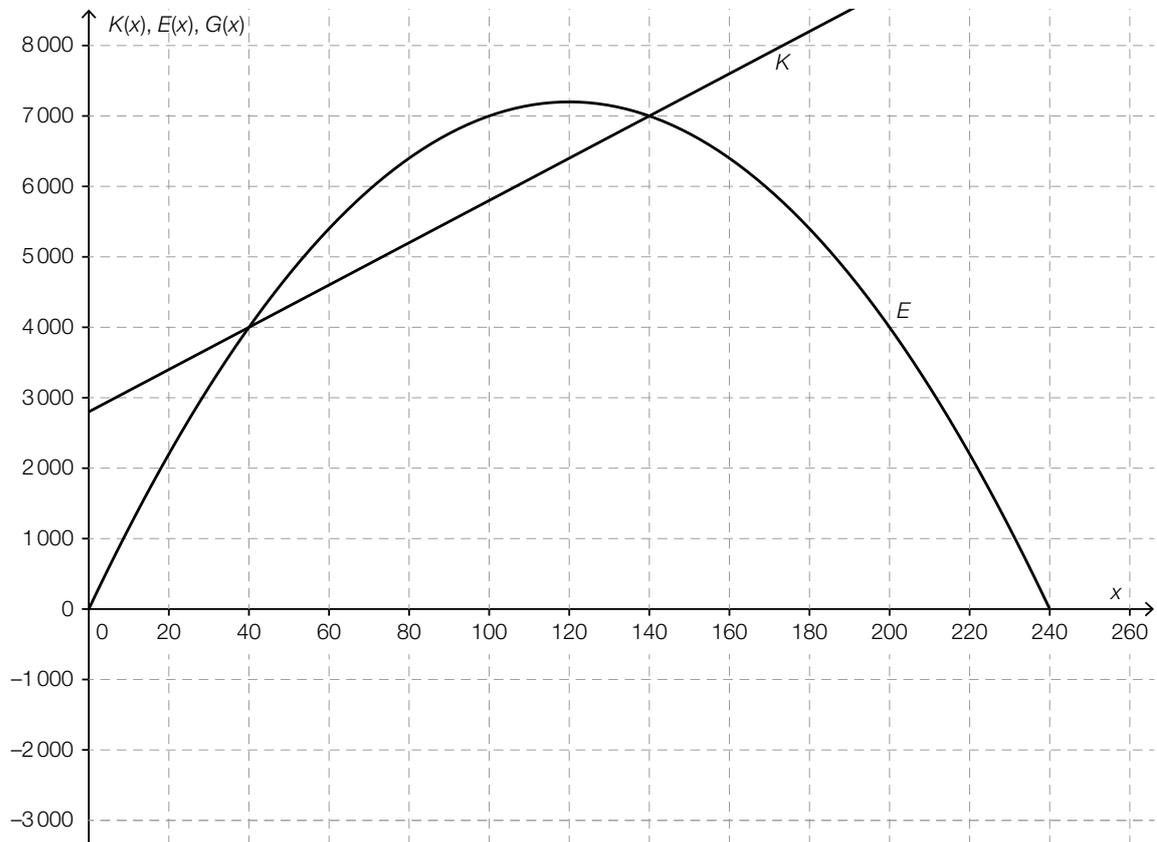
x ... Anzahl der teilnehmenden Personen

$K(x)$... Gesamtkosten bei x Personen in €

Der Preis für den Kreativ-Workshop beträgt € 129 pro Person.

- Stellen Sie eine Funktionsgleichung der zugehörigen Gewinnfunktion G auf.
- Berechnen Sie, bei welcher Anzahl an teilnehmenden Personen für diesen Workshop der Break-even-Point erreicht wird.

d) Die nachstehende Abbildung zeigt die Graphen einer quadratischen Erlösfunktion E und einer linearen Kostenfunktion K .



- Erklären Sie mathematisch, warum die zugehörige Gewinnfunktion eine quadratische Funktion sein muss.
- Zeichnen Sie den Graphen der zugehörigen Gewinnfunktion G im Intervall von 0 bis zur oberen Gewinngrenze in der obigen Abbildung ein.
- Beschreiben Sie, wie sich die beiden Gewinngrenzen verändern, wenn die Fixkosten steigen.

Möglicher Lösungsweg

a) $p(x) = k \cdot x + d$

x ... Nachfragemenge

$p(x)$... Preis bei der Nachfrage x in € pro Kind

$$23 = k \cdot 1050 + d$$

$$27 = k \cdot 990 + d$$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$$k = -\frac{1}{15}, \quad d = 93$$

$$p(x) = -\frac{1}{15} \cdot x + 93$$

b) $p(200) = -0,5 \cdot 200 + 220 = 120$

Der Preis, bei dem 200 teilnehmende Personen zu erwarten sind, beträgt € 120 pro Person.

Der Höchstpreis beträgt € 220 pro Person.

$$p(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{220}{0,5} = 440$$

Die Sättigungsmenge liegt bei 440 Personen.

c) $G(x) = E(x) - K(x) = 129 \cdot x - (0,01 \cdot x^2 + 35 \cdot x + 4800) = -0,01 \cdot x^2 + 94 \cdot x - 4800$

x ... Anzahl der teilnehmenden Personen

$G(x)$... Gewinn bei x Personen in €

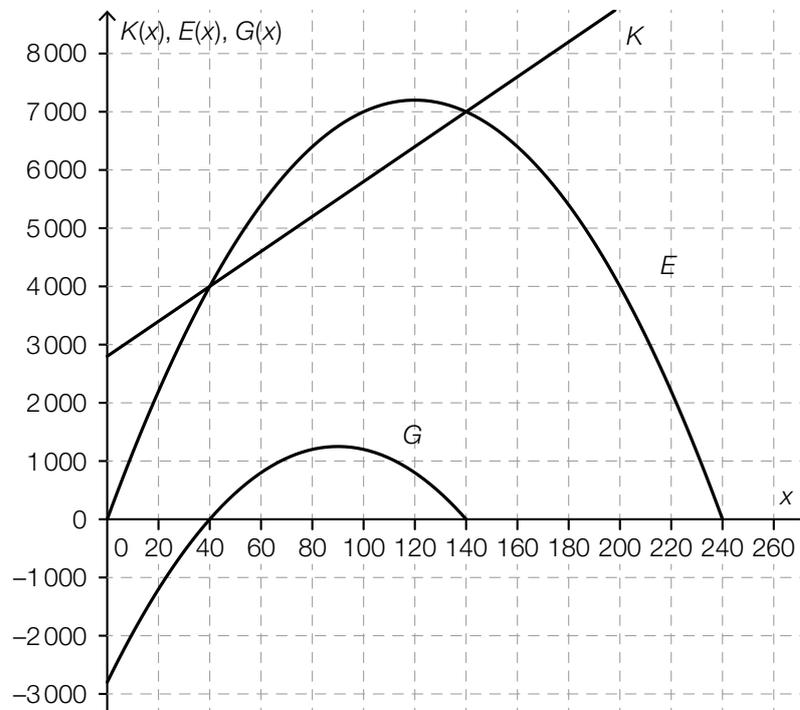
$$G(x) = 0$$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$$x = 51,3...$$

Ab 52 teilnehmenden Personen wird Gewinn erzielt.

- d) Wird von einem quadratischen Term ein linearer Term abgezogen, so ist das Ergebnis wieder ein quadratischer Term.



Die untere Gewinngrenze wird höher und die obere Gewinngrenze niedriger.

oder:

Der Gewinnbereich wird schmaler.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung der Preisfunktion der Nachfrage
- b) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Preises pro Person, bei dem 200 teilnehmende Personen zu erwarten sind
 1 × C: für das richtige Angeben des Höchstpreises
 1 × B2: für die richtige Berechnung der Sättigungsmenge
- c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Gewinnfunktion
 1 × B: für die richtige Berechnung der Teilnehmerzahl, bei der der Break-even-Point erreicht wird
- d) 1 × D: für die richtige mathematische Erklärung
 1 × A: für das richtige Einzeichnen des Funktionsgraphen (Graph einer quadratischen Funktion mit richtigem Ordinatenabschnitt und richtigen Nullstellen)
 1 × C: für die richtige Beschreibung

Kleinwald

Aufgabennummer: B_273

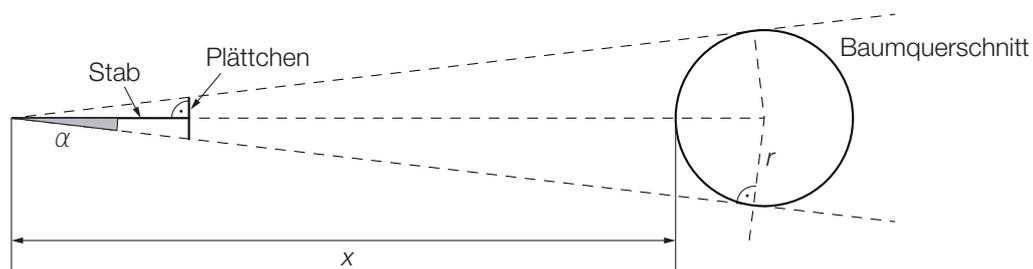
Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Um ein zusätzliches Einkommen zu erwirtschaften, kauft ein Landwirt eine kleine Waldfläche.

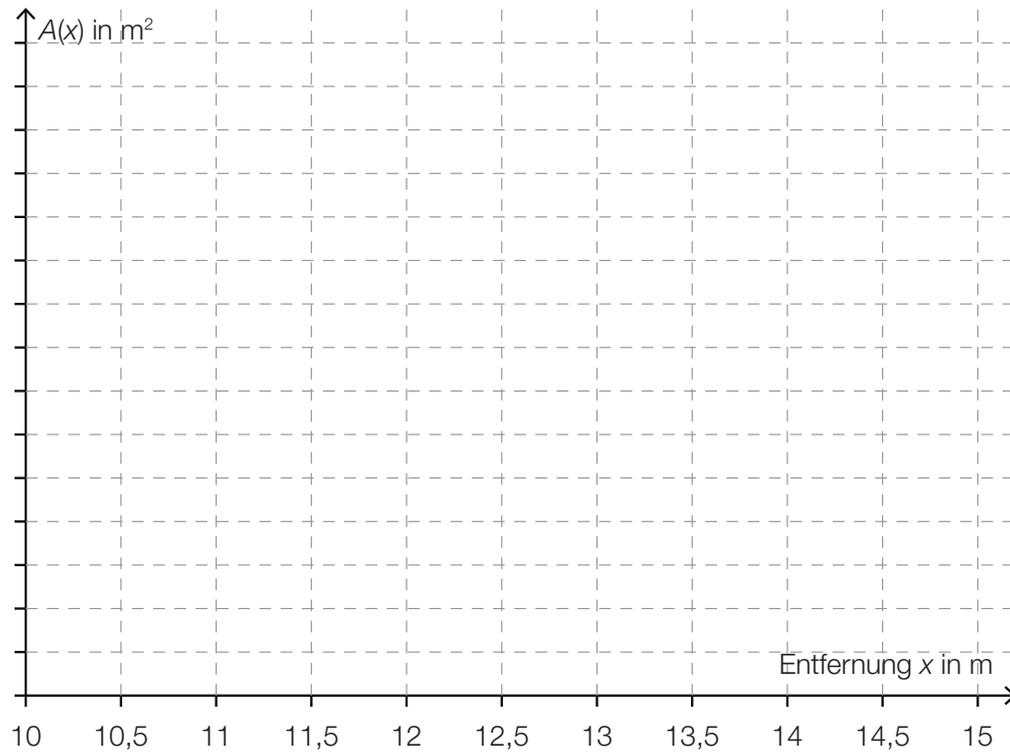
- a) Er erwirbt eine Waldfläche mit einem Flächeninhalt von 18,6 Hektar (ha). Der Preis liegt bei € 0,95 pro Quadratmeter; der durchschnittliche Erlös pro Jahr soll € 300 pro Hektar betragen. Der Landwirt legt den Erlös an jedem Jahresende auf ein Sparbuch mit einem Jahreszinssatz i .
- Berechnen Sie den Kaufpreis.
 - Erstellen Sie eine Gleichung, mit deren Hilfe man die Zeitdauer in Jahren, bis der Landwirt Gewinn erzielt, berechnen kann.
 - Berechnen Sie den Gewinn 40 Jahre nach dem Kauf des Waldes bei einem Zinssatz von 0,8 % p. a.
- b) Für eine Abschätzung des Holzvolumens eines Baumes kann man die sogenannte „Winkelzählprobe“ verwenden. Dafür wird ein 1 m langer Stab verwendet, an dessen Ende ein 4 cm breites Plättchen symmetrisch im rechten Winkel zum Stab montiert ist. Man hält dieses Gerät waagrecht und bewegt sich damit in die richtige Position, bei der die Breite des Baums durch das Plättchen verdeckt wird (siehe nachstehende Skizze – Sicht von oben).



- Berechnen Sie den Winkel α .
- Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Baumradius r in Abhängigkeit von x und α auf.

$r =$ _____

- Zeichnen Sie die Funktion A des Flächeninhalts des Baumquerschnitts in Abhängigkeit von der Entfernung x mit entsprechender Skalierung der vertikalen Achse in das nachstehende Koordinatensystem ein.



- c) Der Landwirt hat ermittelt, dass er die Höhe der Bäume annähernd mithilfe der folgenden Funktion beschreiben kann:

$$h(d) = 194,85 + 221,89 \cdot \ln(d)$$

d ... Durchmesser eines Baums auf Brusthöhe in Zentimetern (cm) mit $d \in [3; 14]$

$h(d)$... Baumhöhe in cm bei einem Durchmesser d

Bei einem Baum wird ein Durchmesser von 5 cm gemessen. Nach einiger Zeit weist der Baum einen Durchmesser d_0 auf.

- Stellen Sie eine Formel auf, mit der man die mittlere Änderungsrate der Baumhöhe bei dieser Durchmesseränderung berechnen kann.

$$k = \underline{\hspace{10cm}}$$

- Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, mit dem die lokale Änderungsrate der Baumhöhe berechnet werden kann. [1 aus 5]

$194,85 + 221,89 \cdot e^d$	<input type="checkbox"/>
$\frac{221,89}{d}$	<input type="checkbox"/>
$221,89 \cdot \ln(d)$	<input type="checkbox"/>
$194,85 + \frac{221,89}{d}$	<input type="checkbox"/>
$221,89 \cdot d$	<input type="checkbox"/>

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) K ... Kaufpreis

$$K = 18,6 \cdot 100^2 \cdot 0,95 = 176\,700$$

Der Kaufpreis beträgt € 176.700.

$$q = 1 + i$$

n ... Zeit in Jahren

$$176\,700 = 5\,580 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^n}$$

Berechnung des Gewinns nach 40 Jahren:

$$5\,580 \cdot \frac{1,008^{40} - 1}{0,008} - 176\,700 \cdot 1,008^{40} = 18\,795,561\dots$$

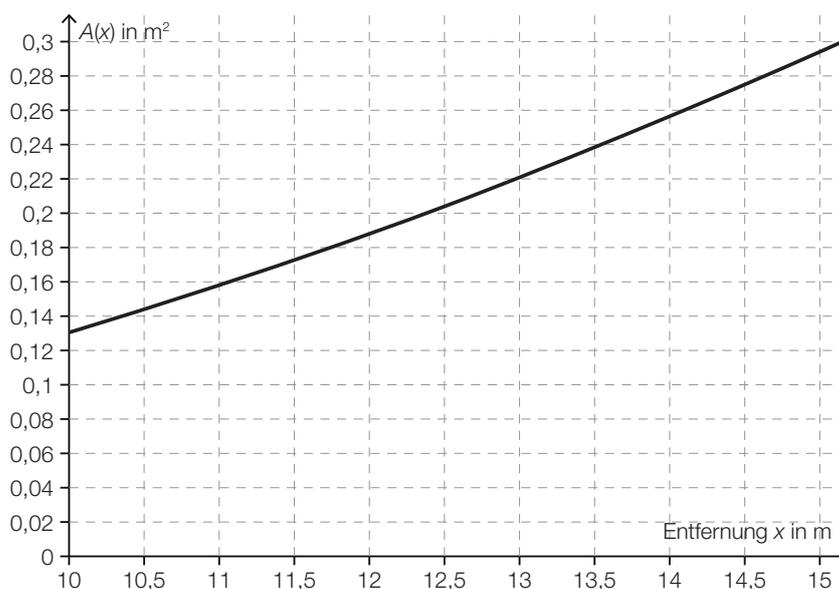
Der Gewinn beträgt € 18.795,56.

b) $\tan(\alpha) = \frac{2}{100} \Rightarrow \alpha = 1,1457\dots^\circ$

Der Winkel beträgt rund $1,146^\circ$.

$$\sin(\alpha) = \frac{r}{x + r} \Rightarrow r = \frac{x \cdot \sin(\alpha)}{1 - \sin(\alpha)}$$

$$A(x) = \left(\frac{x \cdot \sin(\alpha)}{1 - \sin(\alpha)} \right)^2 \cdot \pi \quad \text{mit } \sin(\alpha) \approx 0,019996$$



c) k ... mittlere Änderungsrate der Baumhöhe

$$h(5) = 194,85 + 221,89 \cdot \ln(5) = 551,9\dots \Rightarrow k = \frac{194,85 + 221,89 \cdot \ln(d_0) - 551,9\dots}{d_0 - 5}$$

oder:

$$k = \frac{h(d_0) - h(5)}{d_0 - 5}$$

[...]	
$\frac{221,89}{d}$	<input checked="" type="checkbox"/>
[...]	
[...]	
[...]	

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 2 Algebra und Geometrie
- b) 2 Algebra und Geometrie
- c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) 3 Funktionale Zusammenhänge
- c) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) A Modellieren und Transferieren
- c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) schwer
- c) mittel

Punkteanzahl:

- a) 2
- b) 3
- c) 2

Thema: Forstwirtschaft

Quellen: <https://de.wikipedia.org/wiki/Kleinwald> (Stand vom 28. Juni 2015 um 18:41 Uhr)
<http://www.lagerhaus.at/wie-viel-holz-steht-in-meinem-wald+2500+1066813>

Werbung*

Aufgabennummer: B_440

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Der Campus einer Universität beherbergt 1 200 Studierende. Eine Fast-Food-Kette möchte eine Filiale mit neuen, spezifisch auf Studierende abgestimmten Produkten am Campusgelände eröffnen. Es kursiert ein Gerücht, dass ein berühmter Hollywoodstar bei der Eröffnung der Filiale anwesend sein wird.

Die Funktion N_G beschreibt näherungsweise die Anzahl der Studierenden, die von dem Gerücht erfahren haben:

$$N_G(t) = \frac{1200}{1 + 1199 \cdot e^{-0,99 \cdot t}}$$

t ... Zeit nach Aufkommen des Gerüchts in Tagen

$N_G(t)$... Anzahl der Studierenden, die vom Gerücht bis zum Zeitpunkt t erfahren haben

a) 1) Berechnen Sie, wie viele Studierende nach 8 Tagen von dem Gerücht erfahren haben.

b) Auf einem anderen vergleichbaren Campus wird gleichzeitig eine Werbekampagne mit Plakaten gestartet.

Die Funktion N_W beschreibt näherungsweise die Anzahl der Studierenden, die durch die Werbekampagne erreicht werden:

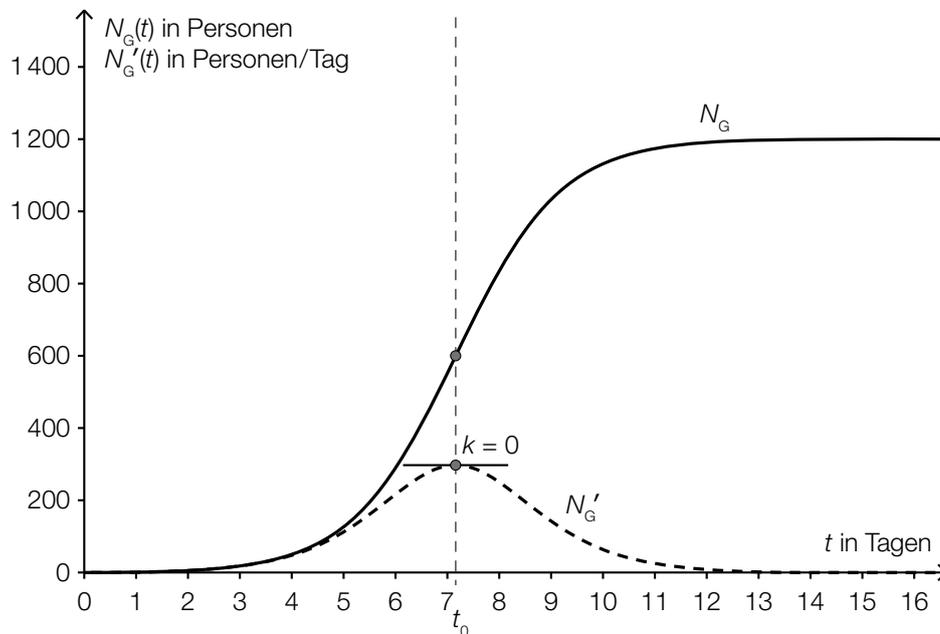
$$N_W(t) = 1200 \cdot (1 - e^{-0,077 \cdot t})$$

t ... Zeit nach Beginn der Werbekampagne in Tagen ($t \geq 1$)

$N_W(t)$... Anzahl der Studierenden, die durch die Werbekampagne bis zum Zeitpunkt t erreicht wurden

1) Bestimmen Sie denjenigen Zeitpunkt t ($t \geq 1$), zu dem gleich viele Studierende vom Gerücht erfahren haben, wie von der Werbekampagne erreicht wurden.

c) In der nachstehenden Grafik sind der Graph der Funktion N_G und der Graph ihrer Ableitung N_G' dargestellt.



- 1) Beschreiben Sie, welche Eigenschaft die Ableitungsfunktion N_G' und welche Eigenschaft die Funktion N_G an der dargestellten Stelle t_0 hat.
- 2) Interpretieren Sie die Bedeutung der Stelle t_0 im gegebenen Sachzusammenhang.

Eine Studierende behauptet, dass die 2. Ableitung der Funktion N_G für alle $t \geq 0$ positiv ist.

- 3) Argumentieren Sie, warum diese Behauptung falsch ist.

Möglicher Lösungsweg

a1) $N_G(8) = 835,8\dots$

Nach 8 Tagen kennen rund 835 Studierende das Gerücht.

b1) $N_W(t) = N_G(t)$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $t = 6,779\dots \approx 6,78$

Nach etwa 6,78 Tagen haben gleich viele Studierende vom Gerücht erfahren, wie von der Werbekampagne erreicht wurden.

c1) Die Ableitung N_G' hat an der Stelle t_0 eine Maximumstelle.
Die Funktion N_G hat an der Stelle t_0 eine Wendestelle.

c2) Zur Zeit t_0 ist der Zuwachs der Studierenden, die von dem Gerücht erfahren haben, am größten.

c3) Die Funktion N_G ist zwar für $0 \leq t < t_0$ positiv gekrümmt, für $t > t_0$ jedoch negativ gekrümmt. Somit gilt hier für $t > t_0$: $N_G''(t) < 0$.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für die richtige Berechnung der Anzahl der Studierenden, die nach 8 Tagen von dem Gerücht erfahren haben (Auch ein Runden des Ergebnisses auf 836 Studierende ist als richtig zu werten.)

b1) 1 × A: für den richtigen Ansatz
1 × B: für die richtige Bestimmung des Zeitpunkts

c1) 1 × C1: für die richtige Beschreibung zur Ableitung N_G'
1 × C2: für die richtige Beschreibung zur Funktion N_G

c2) 1 × C3: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang

c3) 1 × D: für eine richtige Argumentation

Fairtrade*

Aufgabennummer: B_399

Technologieeinsatz:

möglich

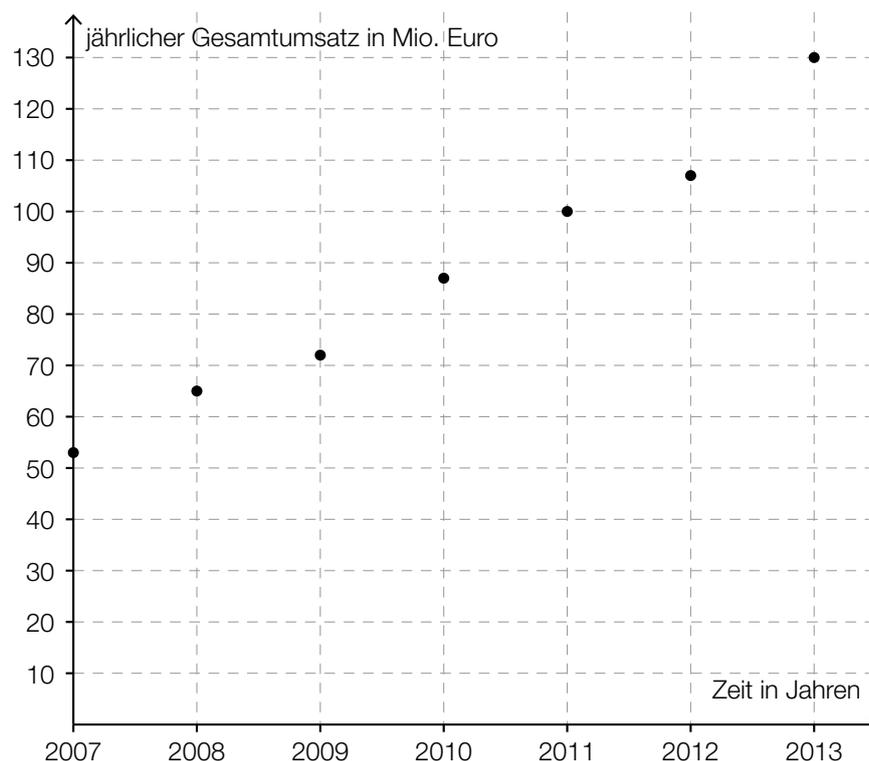
erforderlich

Der Gesamtumsatz von Fairtrade-Produkten in Österreich ist in den letzten Jahren deutlich gestiegen:

Jahr	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
jährlicher Gesamtumsatz in Millionen (Mio.) Euro	53	65	72	87	100	107	130

Quelle: http://www.fairtrade.at/fileadmin/AT/Materialien/2013_FAIRTRADE_Inside_Zahlen_Fakten.pdf [05.09.2016].

a) Die nachstehende Abbildung zeigt diese Gesamtumsatzentwicklung.



Der jährliche Gesamtumsatz soll in Abhängigkeit von der Zeit beschrieben werden.

- Ermitteln Sie mithilfe der gegebenen Daten eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2007.
- Zeichnen Sie den Graphen der Regressionsfunktion im obigen Koordinatensystem ein.
- Beurteilen Sie mithilfe des Korrelationskoeffizienten, ob die lineare Regressionsfunktion ein geeignetes Modell zur Beschreibung der Gesamtumsatzentwicklung ist.
- Berechnen Sie anhand dieses Modells den zu erwartenden jährlichen Gesamtumsatz im Jahr 2020.

* ehemalige Klausuraufgabe

- b) Betrachtet man nur den Zeitraum von 2009 bis 2013, so kann die Entwicklung des Gesamtumsatzes näherungsweise durch die Funktion f beschrieben werden:

$$f(t) = 13,6 \cdot t + 72$$

t ... Zeit in Jahren ab 2009 ($t = 0$ entspricht dem Jahr 2009)

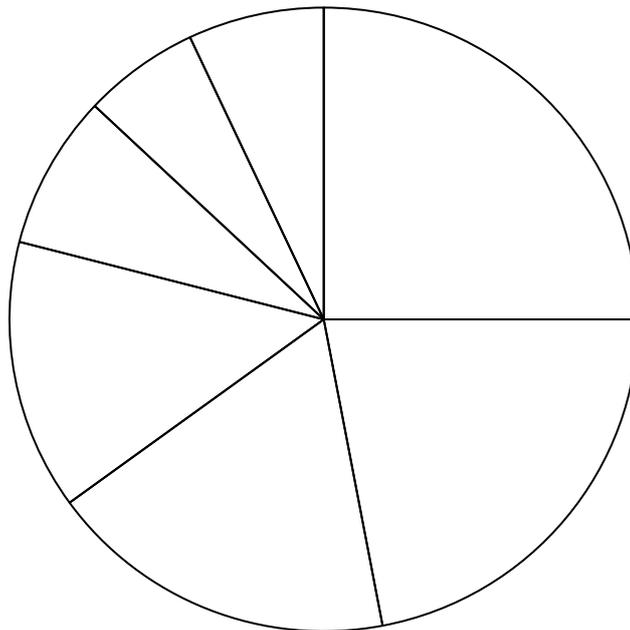
$f(t)$... jährlicher Gesamtumsatz zur Zeit t in Mio. Euro

- Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Funktion im gegebenen Sachzusammenhang.

- c) Im Jahr 2012 teilte sich der Gesamtumsatz auf folgende 7 Bereiche auf:
Baumwolle, frische Früchte, Fruchtsäfte, Kaffee, Rosen, Süßwaren und Rest.

Der Umsatz an Kaffee betrug in diesem Jahr 18 % des Gesamtumsatzes.

- Kennzeichnen Sie im nachstehenden Diagramm denjenigen Sektor, der dem Umsatz an Kaffee entspricht.



Der Umsatz an Süßwaren betrug 2012 etwa 24 Mio. Euro.

- Berechnen Sie, wie viel Prozent der Umsatz an Süßwaren in Bezug auf den Gesamtumsatz im Jahr 2012 (siehe Tabelle) betrug.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

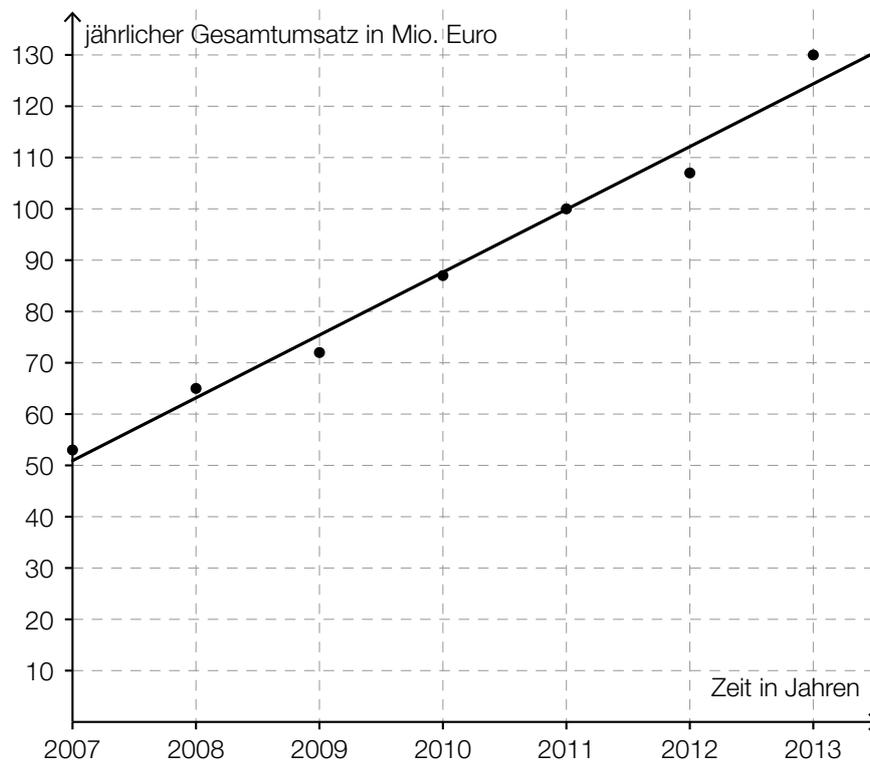
Möglicher Lösungsweg

a) Ermitteln der Regressionsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$$f(t) = 12,25 \cdot t + 50,96 \quad (\text{Koeffizienten gerundet})$$

t ... Zeit in Jahren ($t = 0$ entspricht dem Jahr 2007)

$f(t)$... jährlicher Gesamtumsatz zur Zeit t in Mio. Euro



Ermitteln des Korrelationskoeffizienten mittels Technologieeinsatz: $r \approx 0,991$

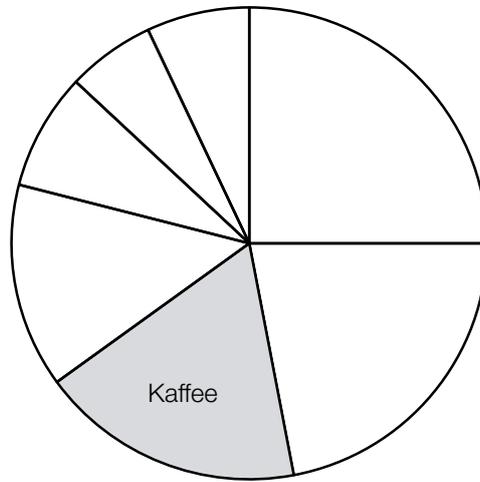
Da der Korrelationskoeffizient sehr nahe bei 1 liegt, kann ein starker linearer Zusammenhang vermutet werden.

$$f(13) = 210,2\dots$$

Gemäß diesem Modell wird der jährliche Gesamtumsatz im Jahr 2020 rund 210 Millionen Euro betragen.

b) Gemäß diesem Modell steigt der jährliche Gesamtumsatz pro Jahr um 13,6 Millionen Euro.

c)



$$\frac{24}{107} = 0,2242... \approx 22,4 \%$$

Der Umsatz an Süßwaren betrug im Jahr 2012 rund 22,4 Prozent des Gesamtumsatzes.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der Regressionsfunktion
1 × B2: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Regressionsfunktion
1 × D: für die richtige Beurteilung mithilfe des Korrelationskoeffizienten
1 × B3: für die richtige Berechnung des jährlichen Gesamtumsatzes im Jahr 2020
- b) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
- c) 1 × C: für das richtige Kennzeichnen des Sektors, der den Umsatz an Kaffee darstellt
1 × B: für die richtige Berechnung des Prozentsatzes

Druckmaschine*

Aufgabennummer: B_402

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Die Geschäftsführung einer Druckerei überlegt die Anschaffung einer neuen Druckmaschine.

- a) Eine Druckmaschine A mit Anschaffungskosten in Höhe von € 1.200.000 hat eine Nutzungsdauer von 4 Jahren. Mit dieser Maschine können jährlich 20 000 Bücher hergestellt werden, die zu einem Stückpreis von € 18 verkauft werden. Die Herstellungskosten betragen € 4 pro Buch. Jährlich fallen Kosten für Wartungsarbeiten in Höhe von € 8.000 an.

- Übertragen Sie für den Zeitraum der Nutzungsdauer die Einnahmen, Ausgaben und Rückflüsse in die nachstehende Tabelle.

Jahr	Einnahmen in €	Ausgaben in €	Rückflüsse in €
0			
1			
2			
3			
4			

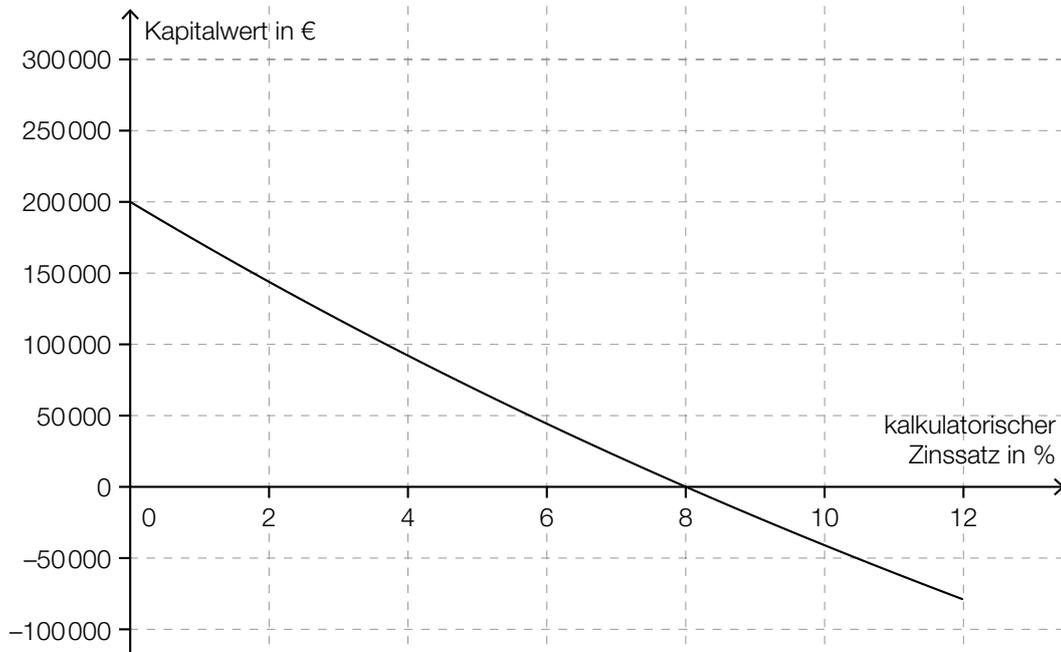
- Erklären Sie anhand dieser Tabelle, warum diese Investition sogar bei einem kalkulatorischen Zinssatz von 0 % nicht vorteilhaft ist.

- b) Für die Anschaffung einer Druckmaschine B wurde der Kapitalwert C_0 dieser Investition durch folgende Rechnung ermittelt:

$$C_0 = -900\,000 + \frac{260\,000}{1,075} + \frac{260\,000}{1,075^2} + \frac{260\,000}{1,075^3} + \frac{350\,000}{1,075^4} \approx 38\,217$$

- Lesen Sie aus der obigen Rechnung den kalkulatorischen Zinssatz ab.
 – Stellen Sie den Zahlungsstrom dieser Investition auf einer Zeitachse dar.
 – Interpretieren Sie den Kapitalwert im Hinblick auf die Vorteilhaftigkeit der Investition.

- c) Für die Beurteilung der Vorteilhaftigkeit der Anschaffung einer Druckmaschine C ist der Kapitalwert dieser Investition in Abhängigkeit vom kalkulatorischen Zinssatz in der nachstehenden Abbildung dargestellt (Kapitalwertkurve).



Ein Mitarbeiter behauptet: „Wenn die Anschaffungskosten um € 50.000 niedriger wären, hätten wir einen internen Zinssatz von über 10 %.“

- Skizzieren Sie in der oben stehenden Abbildung diejenige Kapitalwertkurve, für die die Anschaffungskosten um € 50.000 niedriger sind.
 - Markieren Sie in der von Ihnen skizzierten Kapitalwertkurve den internen Zinssatz.
- d) Für eine Druckmaschine D mit Anschaffungskosten in Höhe von € 800.000 und einer Nutzungsdauer von 4 Jahren wurden folgende Rückflüsse ermittelt: je € 220.000 im ersten, zweiten und dritten Jahr, € 280.000 im vierten Jahr. Die Druckerei kann die Rückflüsse zu einem Zinssatz von 3,5 % p. a. wiederveranlagen.
- Berechnen Sie den modifizierten internen Zinssatz dieser Investition.
 - Interpretieren Sie den modifizierten internen Zinssatz im Hinblick auf die Vorteilhaftigkeit dieser Investition.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

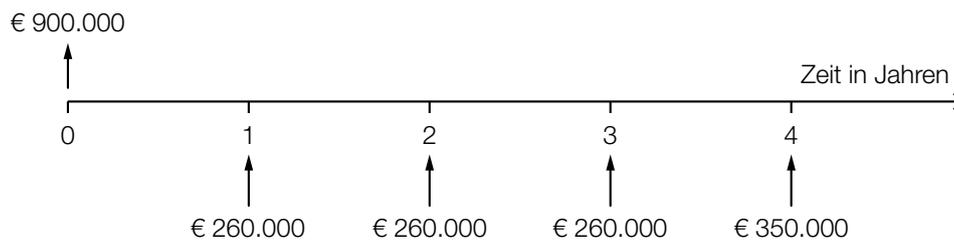
Möglicher Lösungsweg

a)

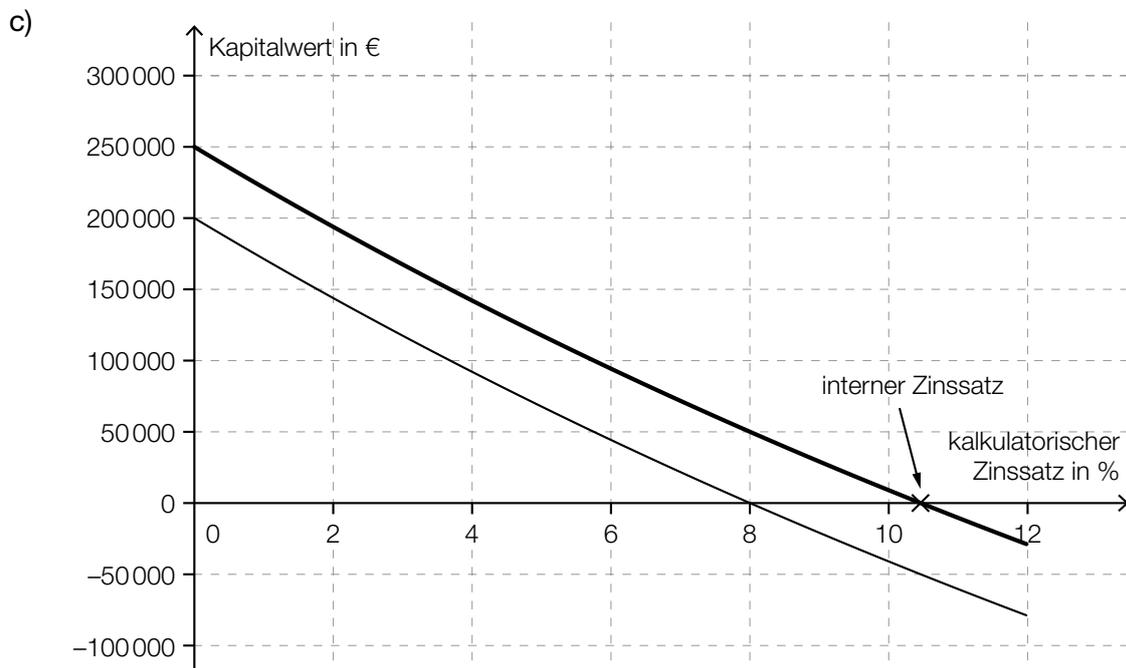
Jahr	Einnahmen in €	Ausgaben in €	Rückflüsse in €
0		1 200 000	-1 200 000
1	360 000	88 000	272 000
2	360 000	88 000	272 000
3	360 000	88 000	272 000
4	360 000	88 000	272 000

Da die Summe der positiven Rückflüsse (€ 1.088.000) kleiner als die Anschaffungskosten ist, ist diese Investition sicherlich nicht vorteilhaft.

b) kalkulatorischer Zinssatz: 7,5 %



Der Kapitalwert C_0 ist positiv, daher ist diese Investition vorteilhaft.



d) Endwert E der wiederveranlagten Rückflüsse:

$$E = 220\,000 \cdot 1,035^3 + 220\,000 \cdot 1,035^2 + 220\,000 \cdot 1,035 + 280\,000 = 987\,287,4\dots$$

modifizierter interner Zinssatz i_{mod} :

$$i_{\text{mod}} = \sqrt[4]{\frac{987\,287,4\dots}{800\,000}} - 1 = 0,0539\dots \approx 5,4 \%$$

Da der modifizierte interne Zinssatz höher als der Wiederveranlagungszinssatz ist, ist diese Investition vorteilhaft.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für das richtige Übertragen der Einnahmen, Ausgaben und Rückflüsse in die vorgegebene Tabelle
1 × D: für die richtige Erklärung zur Vorteilhaftigkeit der Investition

- b) 1 × C1: für das richtige Ablesen des kalkulatorischen Zinssatzes
1 × A: für das richtige Darstellen des Zahlungsstroms auf einer Zeitachse
1 × C2: für die richtige Interpretation des Kapitalwerts im Hinblick auf die Vorteilhaftigkeit der Investition

- c) 1 × A: für das richtige Skizzieren der Kapitalwertkurve
1 × C: für das richtige Markieren des internen Zinssatzes in der neu skizzierten Kapitalwertkurve

- d) 1 × B: für die richtige Berechnung des modifizierten internen Zinssatzes
1 × C: für die richtige Interpretation des modifizierten internen Zinssatzes im Hinblick auf die Vorteilhaftigkeit der Investition

Seegrundstück*

Aufgabennummer: B_415

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Für den Kauf eines Seegrundstücks benötigt der Käufer einen Kredit in Höhe von € 865.000.
(Spesen und Gebühren werden nicht berücksichtigt.)

a) Ein Kreditinstitut macht folgendes Angebot:

Der Kreditnehmer bezahlt am Ende jedes Jahres eine Rate in Höhe von € 100.000 bei einem Zinssatz von 6,75 % p. a.

- Berechnen Sie, wie viele volle Raten der Kreditnehmer bezahlen muss.
- Berechnen Sie die Höhe des ein Jahr nach der letzten vollen Rate fälligen Restbetrags.

b) Ein anderes Kreditinstitut stellt einen Tilgungsplan zur Rückzahlung des Kredits auf. Ein Ausschnitt dieses Tilgungsplans ist in der nachstehenden Tabelle dargestellt.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 865.000
1	€ 51.467,50	€ 53.532,50		
2	€ 48.282,32	€ -48.282,32		
...				

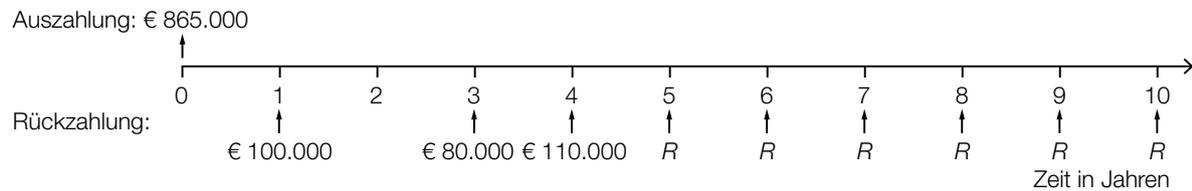
- Ermitteln Sie die Annuität und die Restschuld im Jahr 1.

Im Jahr 2 sind die beiden Einträge in den Spalten „Zinsanteil“ und „Tilgungsanteil“ bis auf das Vorzeichen gleich.

- Beschreiben Sie die Auswirkungen auf die Restschuld im Jahr 2.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Ein weiteres Angebot zur Rückzahlung des Kredits innerhalb von 10 Jahren kann mithilfe folgender Zeitachse dargestellt werden:



- Beschreiben Sie den Rückzahlungsvorgang des in der Zeitachse dargestellten Angebots in Worten.
- Berechnen Sie die Ratenhöhe R bei einem Zinssatz von 6 % p. a.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

$$\text{a) } 865\,000 = 100\,000 \cdot \frac{1,0675^n - 1}{0,0675} \cdot \frac{1}{1,0675^n}$$

Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz:

$$n = 13,42\dots$$

Der Kreditnehmer muss 13 volle Raten bezahlen.

$$\left(865\,000 - 100\,000 \cdot \frac{1,0675^{13} - 1}{0,0675} \cdot \frac{1}{1,0675^{13}} \right) \cdot 1,0675^{14} = 43\,077,457\dots$$

Die Höhe des Restbetrags beträgt € 43.077,46.

$$\text{b) } \text{Annuität im Jahr 1: } 51\,467,50 + 53\,532,50 = 105\,000$$

$$\text{Restschuld im Jahr 1: } 865\,000 - 53\,532,50 = 811\,467,50$$

Im Jahr 1 beträgt die Annuität € 105.000 und die Restschuld € 811.467,50.

Die Restschuld erhöht sich um die anfallenden Zinsen.

c) Jeweils am Ende des ersten, des dritten und des vierten Jahres erfolgt eine Einmalzahlung in Höhe von € 100.000, € 80.000 bzw. € 110.000.

Ab dem fünften Jahr wird eine 6-mal zahlbare nachschüssige Jahresrate in Höhe von R vereinbart.

Restschuld zum Zeitpunkt $t = 4$ Jahre:

$$865\,000 \cdot 1,06^4 - 100\,000 \cdot 1,06^3 - 80\,000 \cdot 1,06 - 110\,000 = 778\,140,970\dots$$

$$778\,140,970\dots = R \cdot \frac{1,06^6 - 1}{0,06} \cdot \frac{1}{1,06^6}$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz: $R = 158\,244,793\dots$

Die Ratenhöhe beträgt € 158.244,79.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Anzahl der Vollraten
1 × B2: für die richtige Berechnung der Höhe des Restbetrags

- b) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Annuität und der Restschuld im Jahr 1
1 × C: für die richtige Beschreibung der Auswirkungen auf die Restschuld im Jahr 2

- c) 1 × C: für die richtige Beschreibung des Rückzahlungsvorgangs
1 × A: für einen richtigen Ansatz
1 × B: für die richtige Berechnung der Ratenhöhe

Weinbau (1)*

Aufgabennummer: B_412

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

- a) Aus nostalgischen Gründen werden in einem kleinen Weingut Trauben der Sorte *Welschriesling* mit einer renovierten Handpresse gepresst. Der zylinderförmige Korb, in dem die Weintrauben gepresst werden, hat dabei die folgenden Abmessungen: Höhe $h = 80$ cm, Innenradius $r = 42$ cm.



- Überprüfen Sie nachweislich mithilfe der Volumensformel des Drehzylinders, ob die nachstehenden Aussagen jeweils richtig sind.

Aussage 1: „Wäre die Presse 1,6 m hoch (bei gleichem Durchmesser), so würde sie das doppelte Volumen fassen.“

Aussage 2: „Hätte die Presse einen Innenradius von 84 cm (bei gleicher Höhe), so würde sie das doppelte Volumen fassen.“

Der Korb ist zu 95 % mit Trauben gefüllt. Aus diesen Trauben werden 350 Liter Traubenmost gepresst.

- Berechnen Sie den prozentuellen Anteil des Traubenmosts am ursprünglichen Volumen der Trauben.

b) Weine der Sorten *Zweigelt* und *Grüner Veltliner* werden in Kisten zu 12 Flaschen und Kartons zu 6 Flaschen verkauft. Die Preise pro Flasche sind unabhängig von der Packungsgröße.

1 Kiste *Zweigelt* und 1 Karton *Grüner Veltliner* kosten insgesamt € 47,40.

2 Kisten *Grüner Veltliner* und 1 Karton *Zweigelt* kosten insgesamt € 72.

- Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem der Preis für eine Flasche *Zweigelt* und der Preis für eine Flasche *Grüner Veltliner* berechnet werden können.
- Berechnen Sie den Preis für eine Flasche *Zweigelt* und den Preis für eine Flasche *Grüner Veltliner*.

c) Der Wein wird mit einem manuellen Reihenfüller in Flaschen abgefüllt. Das Füllvolumen der Flaschen kann dabei als annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ angenommen werden. Es liegen 95 % der Füllvolumina in dem um μ symmetrischen Intervall von 995 Millilitern (ml) bis 1 015 ml.

- Berechnen Sie den Erwartungswert μ des Füllvolumens der Flaschen.
- Berechnen Sie die Standardabweichung σ .

Möglicher Lösungsweg

- a) Aussage 1 ist richtig, weil das Volumen direkt proportional zur Höhe ist.
Aussage 2 ist falsch, weil das Volumen nicht direkt proportional zum Radius ist.
Bei Verdoppelung des Radius erhält man das vierfache Volumen.

Auch ein rechnerischer Nachweis ist jeweils als richtig zu werten.

Volumen der Trauben im Korb in Litern: $0,95 \cdot 4,2^2 \cdot \pi \cdot 8 = 421,1\dots$

relativer Anteil des Traubenmosts am ursprünglichen Traubenvolumen:

$$\frac{350}{421,1\dots} = 0,8310\dots \approx 83,1 \%$$

- b) z ... Preis für 1 Flasche *Zweigelt*
 g ... Preis für 1 Flasche *Grüner Veltliner*

$$\text{I: } 12 \cdot z + 6 \cdot g = 47,40$$

$$\text{II: } 24 \cdot g + 6 \cdot z = 72$$

Lösung des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:

$$z = 2,80$$

$$g = 2,30$$

Preis für 1 Flasche *Zweigelt*: € 2,80

Preis für 1 Flasche *Grüner Veltliner*: € 2,30

c) $\mu = \frac{995 + 1015}{2} = 1005$

Der Erwartungswert beträgt 1005 ml.

X ... Füllvolumen in ml

$$P(X \leq 1015) = 0,975$$

Berechnung von σ mittels Technologieeinsatz: $\sigma = 5,1\dots$

Die Standardabweichung beträgt rund 5 ml.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × D1: für den richtigen Nachweis zur Aussage 1
1 × D2: für den richtigen Nachweis zur Aussage 2
Auch ein rechnerischer Nachweis ist jeweils als richtig zu werten.
1 × B: für die richtige Berechnung des prozentuellen Anteils
- b) 1 × A: für das richtige Erstellen eines Gleichungssystems
1 × B: für die richtige Berechnung der Preise
- c) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Erwartungswerts
1 × B2: für die richtige Berechnung der Standardabweichung

Spam (1)*

Aufgabennummer: B_418

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Als *Spam* werden unerwünscht zugestellte E-Mails bezeichnet.

- a) Der nachstehenden Tabelle kann man die Entwicklung der Anzahl der weltweit täglich versendeten Spam-Mails in Milliarden entnehmen.

Beginn des Jahres ...	Anzahl der weltweit täglich versendeten Spam-Mails in Milliarden
2010	62
2011	42
2012	30

Die Anzahl der Spam-Mails kann näherungsweise durch die Funktion S beschrieben werden:

$$S(t) = 50 \cdot 0,6^t + 12$$

t ... Zeit in Jahren ab 2010, d. h., für den Beginn des Jahres 2010 gilt: $t = 0$

$S(t)$... Anzahl der weltweit täglich versendeten Spam-Mails zur Zeit t in Milliarden

- Zeigen Sie, dass die Funktion S die Anzahl der weltweit täglich versendeten Spam-Mails für den Beginn des Jahres 2012 richtig beschreibt.

Die Funktion S kann auch in der Form $S(t) = 50 \cdot e^{k \cdot t} + 12$ angegeben werden.

- Berechnen Sie k .
- Beschreiben Sie das Ergebnis der Berechnung $\frac{S(5) - S(3)}{S(3)} \approx -0,30$ im gegebenen Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Nach Expertenschätzungen sind 80 % aller E-Mails Spam.

In 8 % aller E-Mails kommt das Wort „Konto“ vor.

7 % aller E-Mails enthalten das Wort „Konto“ und sind Spam.

S bezeichnet das Ereignis, dass ein zufällig ausgewähltes E-Mail Spam ist, \bar{S} bezeichnet das Gegenereignis von S .

K bezeichnet das Ereignis, dass ein zufällig ausgewähltes E-Mail das Wort „Konto“ enthält, \bar{K} bezeichnet das Gegenereignis von K .

– Vervollständigen Sie die nachstehende Vierfeldertafel so, dass sie den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt.

	S	\bar{S}	Summe
K			
\bar{K}			
Summe			

– Lesen Sie aus der Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeit ab, dass ein zufällig ausgewähltes E-Mail kein Spam ist und das Wort „Konto“ enthält.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E wird in diesem Zusammenhang durch folgenden Ausdruck ermittelt:

$$P(E) = \frac{0,07}{0,08}$$

– Beschreiben Sie dieses Ereignis im gegebenen Sachzusammenhang.

c) Mit einem *Aktienspam* wird durch massenhaften Versand von E-Mails eine meist wertlose Aktie beworben, um deren Kurs in die Höhe zu treiben. Der Versender ist selbst Besitzer der Aktie, die er nach der Kurssteigerung gewinnbringend verkauft, worauf der Kurs wieder fällt.

Für eine so beworbene Aktie hat es in den 4 Quartalen eines Jahres folgende prozentuelle Kursänderungen gegeben:

Quartal	1	2	3	4
Kursänderung	+5 %	+20 %	+25 %	–50 %

– Berechnen Sie die mittlere prozentuelle Kursänderung pro Quartal.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Beginn des Jahres 2012: $S(2) = 50 \cdot 0,6^2 + 12 = 30$

$$k = \ln(0,6) = -0,510... \approx -0,51$$

Im Zeitraum vom Beginn des Jahres 2013 bis zum Beginn des Jahres 2015 ist die Anzahl der weltweit täglich versendeten Spam-Mails um rund 30 % gesunken.

b)

	S	\bar{S}	Summe
K	0,07	0,01	0,08
\bar{K}	0,73	0,19	0,92
Summe	0,80	0,20	

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes E-Mail kein Spam ist und das Wort „Konto“ enthält, beträgt 1 %.

E ist das Ereignis, dass ein (zufällig ausgewähltes) E-Mail Spam ist unter der Bedingung, dass es das Wort „Konto“ enthält.

c) $\sqrt[4]{1,05 \cdot 1,2 \cdot 1,25 \cdot 0,5} - 1 = -0,0579... \approx -0,058$

Die mittlere prozentuelle Kursänderung pro Quartal beträgt rund $-5,8$ %.

Die angegebenen prozentuellen Kursänderungen könnten auch als Kursänderungen in Bezug auf den Beginn des 1. Quartals aufgefasst werden. Eine diesem Ansatz entsprechende Berechnung der mittleren prozentuellen Kursänderung pro Quartal ist dann als richtig zu werten.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × D: für den richtigen Nachweis
1 × B: für die richtige Berechnung von k
1 × C: für die richtige Interpretation des Ergebnisses der Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang
- b) 1 × A: für das richtige Vervollständigen der Vierfeldertafel
1 × C1: für das richtige Ablesen der Wahrscheinlichkeit
1 × C2: für die richtige Beschreibung des Ereignisses im gegebenen Sachzusammenhang
- c) 1 × B: für die richtige Berechnung der mittleren prozentuellen Kursänderung pro Quartal
Die angegebenen prozentuellen Kursänderungen könnten auch als Kursänderungen in Bezug auf den Beginn des 1. Quartals aufgefasst werden. Eine diesem Ansatz entsprechende Berechnung der mittleren prozentuellen Kursänderung pro Quartal ist dann als richtig zu werten.

Lampenproduktion (1)*

Aufgabennummer: B_419

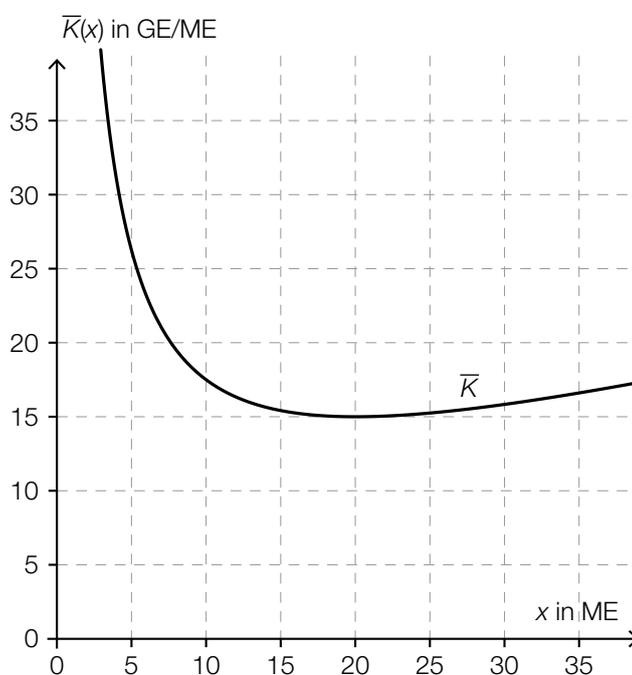
Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Ein Unternehmen produziert verschiedene Lampen.

- a) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Stückkostenfunktion \bar{K} der Leuchte *Credas* dargestellt.



Die zugehörige Grenzkostenfunktion K' ist gegeben durch:

$$K'(x) = 0,5 \cdot x + 5$$

x ... Anzahl der produzierten ME

$K'(x)$... Grenzkosten bei x produzierten ME in GE/ME

- Zeichnen Sie den Graphen der Grenzkostenfunktion K' in der obigen Abbildung ein.
- Lesen Sie das Betriebsoptimum ab.
- Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K .
- Berechnen Sie die Fixkosten.

b) Die Kosten für die Produktion der Pendelleuchte *Ecos* lassen sich näherungsweise durch eine Kostenfunktion K beschreiben:

$$K(x) = 0,05 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 155$$

x ... Anzahl der produzierten ME

$K(x)$... Kosten bei x produzierten ME in GE

Die Pendelleuchte wird zu einem fixen Preis von 9 GE/ME verkauft.

- Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Gewinnfunktion.
- Ermitteln Sie die Gewinn Grenzen.
- Ermitteln Sie den maximalen Gewinn.

c) Für eine quadratische Gewinnfunktion G gilt:

$$G(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

x ... Anzahl der abgesetzten ME

$G(x)$... Gewinn bei x abgesetzten ME in GE

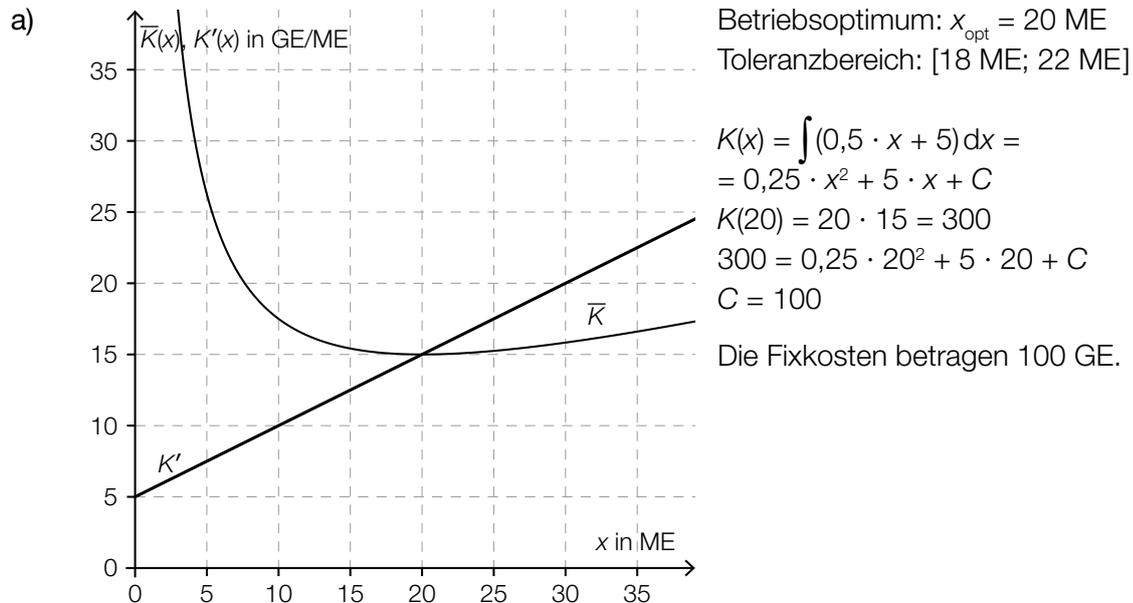
Es wird behauptet, dass die Extremstelle von G bei $x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}$ liegt.

- Zeigen Sie, dass diese Behauptung stimmt.
- Geben Sie an, welche Bedingung für den Koeffizienten a gelten muss, damit an dieser Stelle ein Maximum vorliegt.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg



b) $G(x) = E(x) - K(x) = 9 \cdot x - (0,05 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 155) = -0,05 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 155$

$G(x) = 0:$

Lösen der Gleichung mittels Technologieeinsatz: $x_1 = 37,639... \text{ ME} \approx 37,64 \text{ ME}$,
 $x_2 = 82,360... \text{ ME} \approx 82,36 \text{ ME}$

$G'(x) = 0:$

$0 = -0,1 \cdot x + 6$

$x = 60$

$G(60) = 25$

Der maximale Gewinn beträgt 25 GE.

Eine Überprüfung, ob an der berechneten Stelle tatsächlich ein Maximum vorliegt, z. B. mithilfe der 2. Ableitung, ist hier nicht erforderlich.

c) $G'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$

$0 = 2 \cdot a \cdot x_0 + b$

$\Rightarrow x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}$

Es muss gelten: $a < 0$.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × B1: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Grenzkostenfunktion
1 × C: für das richtige Ablesen des Betriebsoptimums im Toleranzbereich [18 ME; 22 ME]
1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Kostenfunktion (ohne Berechnung der Integrationskonstanten)
1 × B2: für die richtige Berechnung der Fixkosten
- b) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Gewinnfunktion
1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gewinn Grenzen
1 × B2: für das richtige Ermitteln des maximalen Gewinns (Eine Überprüfung, ob an der berechneten Stelle tatsächlich ein Maximum vorliegt, z. B. mithilfe der 2. Ableitung, ist nicht erforderlich.)
- c) 1 × D: für den richtigen Nachweis
1 × A: für das richtige Angeben der Bedingung

Bügeleisen*

Aufgabennummer: B_217

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

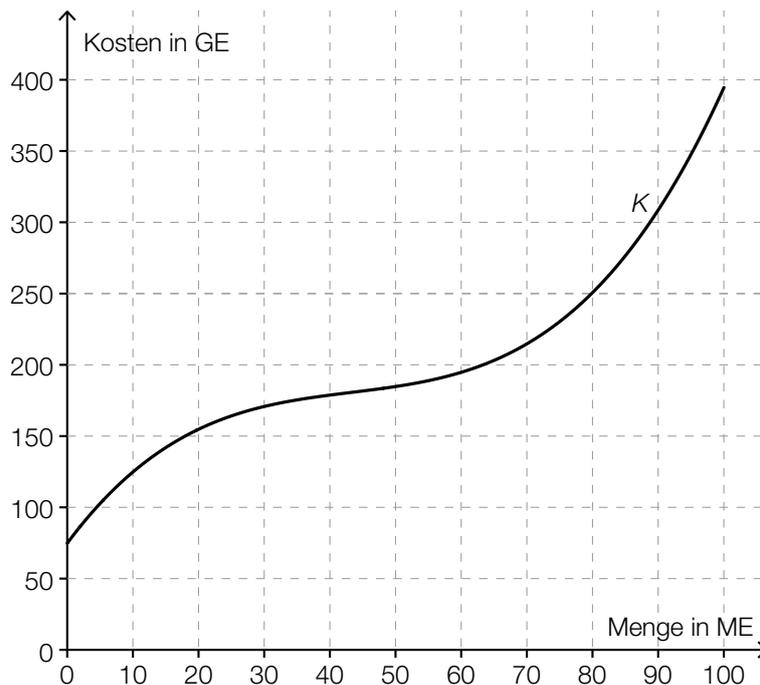
Ein Unternehmen stellt Bügeleisen her. Die Produktionskosten lassen sich näherungsweise durch die folgende Funktion K beschreiben:

$$K(x) = 0,001 \cdot x^3 - 0,13 \cdot x^2 + 6,2 \cdot x + 75 \quad \text{mit } x \geq 0$$

x ... Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME)

$K(x)$... Kosten bei der Produktionsmenge x in Geldeinheiten (GE)

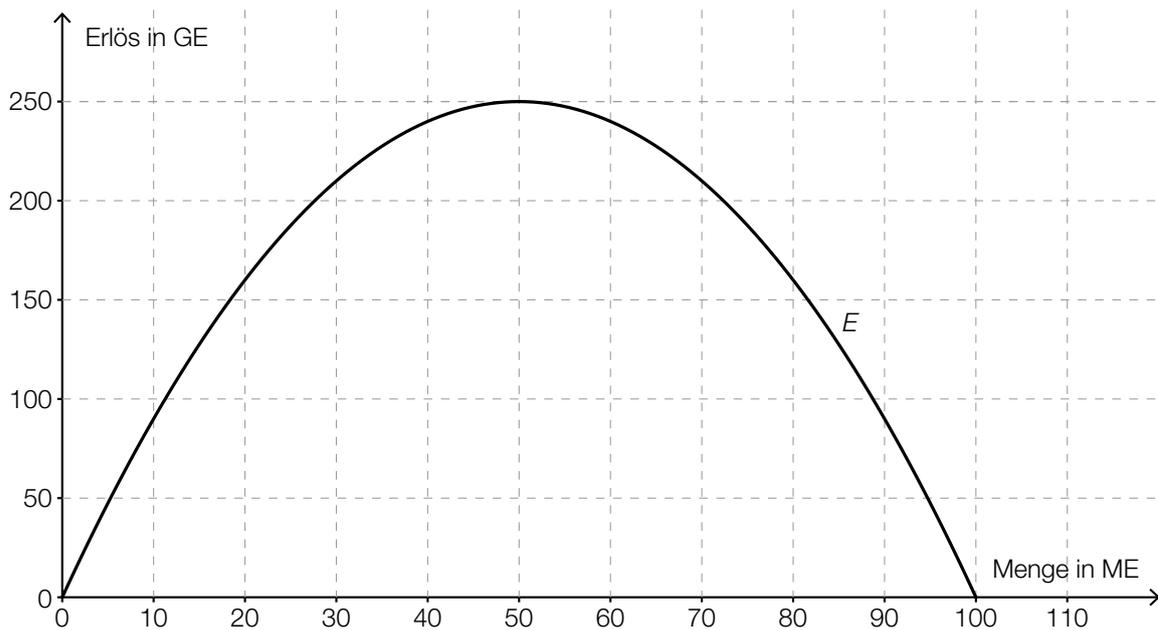
a) Im nachstehenden Koordinatensystem ist der Graph der Kostenfunktion K dargestellt.



Ein Kostenverlauf heißt in einem Bereich degressiv, wenn der Graph der zugehörigen Kostenfunktion in diesem Bereich negativ gekrümmt (rechtsgekrümmt) ist.

– Lesen Sie aus der obigen Grafik den gesamten Bereich ab, in dem der Kostenverlauf degressiv ist.

- b) – Ermitteln Sie diejenige Produktionsmenge, bei der die Stückkosten (Durchschnittskosten) minimal sind.
– Zeigen Sie, dass bei dieser Produktionsmenge die Stückkosten (Durchschnittskosten) gleich den Grenzkosten sind.
- c) Der Graph der Erlösfunktion E mit $E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$ für den Absatz von Bügeleisen ist in der nachstehenden Grafik dargestellt.



- Argumentieren Sie mithilfe des Funktionsgraphen, dass der Koeffizient a negativ sein muss.
- Stellen Sie mithilfe der obigen Grafik eine Gleichung dieser Erlösfunktion auf.
- Berechnen Sie, für welche Produktionsmengen ein Gewinn in Höhe von 50 GE erzielt werden kann, wenn die oben definierte Kostenfunktion K zugrunde gelegt wird.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Im Intervall $[0; 43]$ ist der Kostenverlauf degressiv.

Toleranzbereich der oberen Grenze: $[40; 50]$

$$\text{b) } \bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = 0,001 \cdot x^2 - 0,13 \cdot x + 6,2 + \frac{75}{x}$$

$$\bar{K}'(x) = 0,002 \cdot x - 0,13 - \frac{75}{x^2}$$

$$\bar{K}'(x_{\text{opt}}) = 0$$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $x_{\text{opt}} = 72,19\dots$

Bei einer Produktion von rund 72,2 ME sind die Stückkosten minimal.

$$\bar{K}(x_{\text{opt}}) = K'(x_{\text{opt}})$$

minimale Stückkosten bei dieser Produktionsmenge: $\bar{K}(72,2) = 3,06\dots$

Grenzkosten bei dieser Produktionsmenge: $K'(72,2) = 3,06\dots$

Auch ein allgemeiner Nachweis ist zulässig.

c) Der Koeffizient a muss negativ sein, weil der Funktionsgraph eine nach unten geöffnete Parabel ist.

$$E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$$

$$E(100) = 0$$

$$E(50) = 250$$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$$E(x) = -0,1 \cdot x^2 + 10 \cdot x$$

$$G(x) = E(x) - K(x) = -0,1 \cdot x^2 + 10 \cdot x - (0,001 \cdot x^3 - 0,13 \cdot x^2 + 6,2 \cdot x + 75)$$

$$G(x) = -0,001 \cdot x^3 + 0,03 \cdot x^2 + 3,8 \cdot x - 75$$

$$G(x) = 50$$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$$x_1 = 34,17\dots, x_2 = 58,42\dots$$

Bei einer Produktion von rund 34,2 ME bzw. rund 58,4 ME kann jeweils ein Gewinn von 50 GE erzielt werden.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × C: für das richtige Ablesen des gesamten Bereichs, in dem der Kostenverlauf degressiv ist
- b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Produktionsmenge, bei der die Stückkosten minimal sind
1 × D: für den richtigen Nachweis
Auch ein allgemeiner Nachweis ist zulässig.
- c) 1 × D: für die richtige Argumentation mithilfe des Funktionsgraphen
1 × A: für das richtige Aufstellen der Gleichung der Erlösfunktion
1 × B: für die richtige Berechnung

Pensionsvorsorge*

Aufgabennummer: B_420

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Alexander möchte für seine Pension ansparen. In den folgenden Aufgaben wird die Kapitalertragssteuer nicht berücksichtigt.

a) Er zahlt 15 Jahre lang monatlich vorschüssig € 400 auf ein mit 0,27 % p. m. verzinstes privates Pensionskonto und lässt sein Geld anschließend 25 Jahre bei gleichbleibendem Zinssatz angelegt.

– Berechnen Sie seinen privaten Pensionsbetrag nach 40 Jahren.

b) Eine Bank unterbreitet ihm folgenden Vorschlag:

Durch Einzahlungen von € 20.000 sofort, € 30.000 nach 5 Jahren und € 40.000 nach 15 Jahren garantiert sie ihm nach insgesamt 40 Jahren ein angespartes Kapital von € 200.000.

– Veranschaulichen Sie diesen Zahlungsstrom (Einzahlungen und angespartes Kapital) auf einer Zeitachse.

– Berechnen Sie den zugehörigen Jahreszinssatz.

c) Er hat auf seinem privaten Pensionskonto, das mit 2 % p. a. verzinst wird, einen Betrag in Höhe von € 200.000 angespart.

Nun vergleicht er zwei Auszahlungsvarianten:

Variante 1: Er hebt am Ende jedes Jahres € 12.000 ab.

Variante 2: Er hebt am Ende jedes Jahres € 4.000 ab.

– Berechnen Sie, wie oft er bei Variante 1 den vollen Betrag abheben könnte.

– Erklären Sie, warum bei Variante 2 das angesparte Kapital am Pensionskonto erhalten bleibt.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

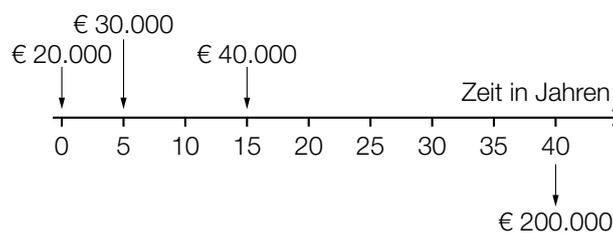
Möglicher Lösungsweg

$$\text{a) } 400 \cdot 1,0027 \cdot \frac{1,0027^{180} - 1}{0,0027} = 92\,803,312\dots$$

$$92\,803,312\dots \cdot 1,0027^{300} = 208\,385,722\dots$$

Sein privater Pensionsbetrag beträgt nach 40 Jahren rund € 208.385,72.

b)



$$200\,000 = 20\,000 \cdot (1 + i)^{40} + 30\,000 \cdot (1 + i)^{35} + 40\,000 \cdot (1 + i)^{25}$$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$$i = 0,02514\dots$$

Der zugehörige Jahreszinssatz beträgt rund 2,51 % p. a.

$$\text{c) } 200\,000 = 12\,000 \cdot \frac{1,02^n - 1}{0,02} \cdot \frac{1}{1,02^n}$$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$$n = 20,4\dots$$

Er könnte 20-mal den vollen Betrag in Höhe von € 12.000 abheben.

Bei Variante 2 bleibt das angesparte Kapital erhalten, weil der Betrag, den er am Ende jedes Jahres abhebt, genau den anfallenden Zinsen entspricht.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung des Pensionsbeitrags nach 40 Jahren

b) 1 × A: für das richtige Darstellen auf einer Zeitachse

1 × B: für die richtige Berechnung des Jahreszinssatzes

c) 1 × B: für die richtige Berechnung der Anzahl der Vollraten

1 × D: für die richtige Erklärung

Grenzkosten und Grenzerlös*

Aufgabennummer: B_421

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

a) Die Produktionskosten eines Unternehmens lassen sich näherungsweise durch die folgende Kostenfunktion K beschreiben:

$$K(x) = 0,001 \cdot x^3 - 0,115 \cdot x^2 + 5,2 \cdot x + 50$$

x ... Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME)

$K(x)$... Kosten bei der Produktionsmenge x in Geldeinheiten (GE)

- Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate von K , wenn die Produktion von 20 ME auf 25 ME erhöht wird.
- Berechnen Sie die Grenzkosten bei einer Produktion von 20 ME.
- Interpretieren Sie diesen Grenzkostenwert im gegebenen Sachzusammenhang.

- b) Um für eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion K mit $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ das Betriebsoptimum zu ermitteln, wurde folgende Rechnung angesetzt:

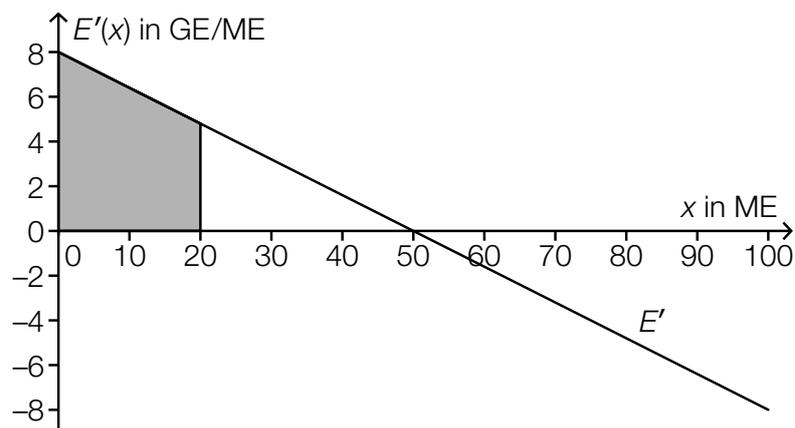
$$\frac{K(x)}{x} = a \cdot x^2 + b \cdot x + c + \frac{d}{x}$$

$$\left(\frac{K(x)}{x}\right)' = 2 \cdot a \cdot x + b + \frac{d}{x}$$

Dabei ist die Berechnung der Ableitungsfunktion fehlerhaft.

- Stellen Sie die Berechnung der Ableitungsfunktion richtig.

- c) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer linearen Grenzerlösfunktion E' dargestellt.



- Stellen Sie eine Gleichung von E' auf.
- Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.
- Interpretieren Sie unter Angabe der entsprechenden Einheit den Inhalt der markierten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang.
- Interpretieren Sie die Bedeutung der Nullstelle von E' in Bezug auf die zugehörige Erlösfunktion E im gegebenen Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

$$\text{a) } \frac{K(25) - K(20)}{25 - 20} = \frac{123,75 - 116}{5} = \frac{7,75}{5} = 1,55$$

Die mittlere Änderungsrate von K im Intervall $[20 \text{ ME}; 25 \text{ ME}]$ beträgt $1,55 \text{ GE/ME}$.

$$K'(x) = 0,003 \cdot x^2 - 0,23 \cdot x + 5,2$$

$$K'(20) = 1,8$$

Die Grenzkosten bei einer Produktion von 20 ME betragen $1,8 \text{ GE/ME}$.

Bei einer Produktionsmenge von 20 ME führt eine Steigerung der Produktion um 1 ME zu einer Kostensteigerung von näherungsweise $1,8 \text{ GE}$.

$$\text{b) } \left(\frac{K(x)}{x} \right)' = 2 \cdot a \cdot x + b - \frac{d}{x^2}$$

$$\text{c) } E'(x) = -\frac{8}{50} \cdot x + 8$$

$$E'(20) = 4,8$$

$$A = \frac{(8 + 4,8) \cdot 20}{2} = 128$$

Bei 20 abgesetzten ME beträgt der Erlös 128 GE .

Bei 50 abgesetzten ME ist der Erlös maximal.

Lösungsschlüssel

- a) $1 \times \text{B1}$: für die richtige Berechnung der mittleren Änderungsrate
 $1 \times \text{B2}$: für die richtige Berechnung der Grenzkosten
 $1 \times \text{C}$: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
- b) $1 \times \text{B}$: für das Richtigstellen der Berechnung der Ableitungsfunktion
- c) $1 \times \text{A}$: für das richtige Aufstellen der Grenzerlösfunktion
 $1 \times \text{B}$: für die richtige Berechnung des Flächeninhalts
 $1 \times \text{C1}$: für die richtige Interpretation des Inhalts der markierten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang mit Angabe der Einheit
 $1 \times \text{C2}$: für die richtige Interpretation der Nullstelle von E' in Bezug auf die Erlösfunktion E im gegebenen Sachzusammenhang

Wohnungen (2)*

Aufgabennummer: B_424

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Der Fachverband der Immobilien- und Vermögenstreuhänder erstellt Statistiken zu den Trends auf dem Immobilienmarkt. Es werden die ortsüblichen Kaufpreise und Mieten erhoben. Die Höhe der Kaufpreise bzw. der Mieten hängt in der Regel stark von der Größe, der Ausstattung und der Lage der Wohnungen ab.

- a) Für eine österreichische Landeshauptstadt hat der Fachverband der Immobilien- und Vermögenstreuhänder die Mietpreise in Euro pro m² für Wohnungen bis zu 60 m² mit gutem Wohnwert erhoben:

Ende des Jahres ...	Mietpreis in Euro pro m ²
2003	8,10
2004	7,90
2005	8,20
2006	8,50
2007	8,80
2008	9,30
2009	9,60
2010	9,70
2011	10,30
2012	10,80

Der Mietpreis in Euro pro m² soll in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren beschrieben werden.

- Ermitteln Sie mithilfe von linearer Regression eine Gleichung der zugehörigen Funktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Ende des Jahres 2003.
- Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.
- Ermitteln Sie mithilfe dieser Regressionsfunktion eine Prognose für den Mietpreis pro m² für das Ende des Jahres 2018.

Ein anderes Modell verwendet zur Beschreibung der Mietpreisentwicklung die Funktion B .

$$B(t) = 7,77 \cdot 1,035^t$$

t ... Zeit in Jahren ab Ende des Jahres 2003

$B(t)$... Mietpreis zur Zeit t in Euro pro m²

- Interpretieren Sie die Bedeutung des Parameters 1,035 im gegebenen Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

- b) Laut einer Erhebung aus dem Jahr 2001 lebten im Bundesland Tirol in 303 632 Wohnungen 661 026 Personen. Die nachstehende Tabelle gibt die Anzahl dieser Wohnungen aufgelistet nach dem Merkmal „Anzahl der Wohnräume“ an.

Anzahl der Wohnräume	Anzahl der Wohnungen
1	19372
2	28973
3	61002
4	80331
5	56878
6	57076
Summe	303632

– Beschreiben Sie in Worten, was durch folgende Ausdrücke im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird:

$$(1) \frac{661\,026}{303\,632} \approx 2,18$$

$$(2) \frac{1 \cdot 19372 + 2 \cdot 28973 + 3 \cdot 61002 + 4 \cdot 80331 + 5 \cdot 56878 + 6 \cdot 57076}{303632} \approx 3,98$$

- c) Der durchschnittliche Preis für Eigentumswohnungen mit gutem Wohnwert wurde in einer Landeshauptstadt jeweils am Ende des Jahres erhoben.

Die nachstehende Tabelle gibt die prozentuelle Steigerung des Preises pro m² am Ende des Jahres gegenüber dem Preis pro m² am Ende des jeweiligen Vorjahres für die Jahre 2009 bis 2013 an.

Ende des Jahres ...	Preissteigerung gegenüber dem Preis pro m ² am Ende des jeweiligen Vorjahres
2009	5,5 %
2010	1,2 %
2011	7,1 %
2012	6,7 %
2013	5,4 %

Am Ende des Jahres 2013 kostete eine Eigentumswohnung mit gutem Wohnwert durchschnittlich € 3.362 pro m².

- Berechnen Sie den durchschnittlichen Preis pro m² für eine Eigentumswohnung mit gutem Wohnwert am Ende des Jahres 2010.
- Berechnen Sie die mittlere prozentuelle Preissteigerung pro Jahr für den Zeitraum von Anfang 2009 bis Ende 2013.

d) In einer Landeshauptstadt werden 90 % der Wohnungen als Wohnungen mit mittlerem Wohnwert eingestuft, 10 % der Wohnungen als Wohnungen mit gutem Wohnwert. 20 % der Wohnungen haben eine Größe von weniger als 60 m². 16 % aller Wohnungen haben eine Größe von weniger als 60 m² und einen mittleren Wohnwert.

– Vervollständigen Sie die nachstehende Vierfeldertafel so, dass sie den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt.

	Wohnungsgröße weniger als 60 m ²	Wohnungsgröße mindestens 60 m ²	Summe
mittlerer Wohnwert			
guter Wohnwert			
Summe			

- Weisen Sie nach, dass die Merkmale „Wohnungsgröße“ und „Wohnwert“ (stochastisch) abhängig voneinander sind.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Wohnung weniger als 60 m² Wohnfläche hat, wenn man weiß, dass sie einen mittleren Wohnwert hat.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

- a) Lösung mittels Technologieeinsatz:

$$M(t) = 0,32 \cdot t + 7,69 \quad (\text{Koeffizienten gerundet})$$

Die Mietpreise pro m² sind im angegebenen Zeitraum um durchschnittlich rund € 0,32 pro Jahr angestiegen.

$$M(15) = 12,454... \approx 12,45$$

Gemäß diesem Modell beträgt der Mietpreis pro m² am Ende des Jahres 2018 rund € 12,45.

Der Änderungsfaktor 1,035 gibt an, dass die Mietpreise pro m² jährlich um 3,5 % steigen.

- b) Der Ausdruck (1) gibt die durchschnittliche Anzahl der Personen pro Wohnung (rund 2,18) an.

Der Ausdruck (2) gibt die durchschnittliche Anzahl der Wohnräume pro Wohnung (rund 3,98) an.

c)
$$\frac{3362}{1,054 \cdot 1,067 \cdot 1,071} = 2791,2... \approx 2791$$

Der durchschnittliche Preis pro m² für eine Eigentumswohnung mit gutem Wohnwert lag am Ende des Jahres 2010 bei rund € 2.791.

$$\sqrt[5]{1,055 \cdot 1,012 \cdot 1,071 \cdot 1,067 \cdot 1,054} - 1 = 0,05158... \approx 0,0516$$

Die mittlere prozentuelle Preissteigerung pro Jahr beträgt rund 5,16 %.

Die Berechnung des arithmetischen Mittels $\left(\frac{0,055 + 0,012 + 0,071 + 0,067 + 0,054}{5} = 0,0518, \text{ also } 5,18 \%\right)$ ist nicht als richtig zu werten.

- d)

	Wohnungsgröße weniger als 60 m ²	Wohnungsgröße mindestens 60 m ²	Summe
mittlerer Wohnwert	0,16	0,74	0,90
guter Wohnwert	0,04	0,06	0,10
Summe	0,20	0,80	

Für eine Unabhängigkeit der beiden Merkmale müsste z. B. gelten:

$$P(\text{„mittlerer Wohnwert und Größe weniger als 60 m}^2\text{“}) = \\ = P(\text{„mittlerer Wohnwert“}) \cdot P(\text{„Größe weniger als 60 m}^2\text{“})$$

Es gilt jedoch: $0,16 \neq 0,9 \cdot 0,2$

$$P(\text{„Größe weniger als 60 m}^2\text{“} | \text{„mittlerer Wohnwert“}) = \frac{0,16}{0,9} = 0,17777... \approx 0,1778$$

Lösungsschlüssel

- a) 1 × B1: für das richtige Ermitteln einer Gleichung der Regressionsfunktion
1 × C1: für die richtige Interpretation des Werts der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang
1 × B2: für das richtige Ermitteln der Prognose für das Ende des Jahres 2018
1 × C2: für die richtige Interpretation des Werts 1,035 im gegebenen Sachzusammenhang
- b) 1 × C1: für die richtige Beschreibung von Ausdruck (1) im gegebenen Sachzusammenhang
1 × C2: für die richtige Beschreibung von Ausdruck (2) im gegebenen Sachzusammenhang
- c) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Preises pro m² am Ende des Jahres 2010
1 × B2: für die richtige Berechnung der mittleren prozentuellen Preissteigerung pro Jahr
- d) 1 × A: für das richtige Vervollständigen der Vierfeldertafel
1 × D: für den richtigen Nachweis der Abhängigkeit der Merkmale
1 × B: für die richtige Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeit

Lackproduktion*

Aufgabennummer: B_433

Technologieeinsatz:

möglich

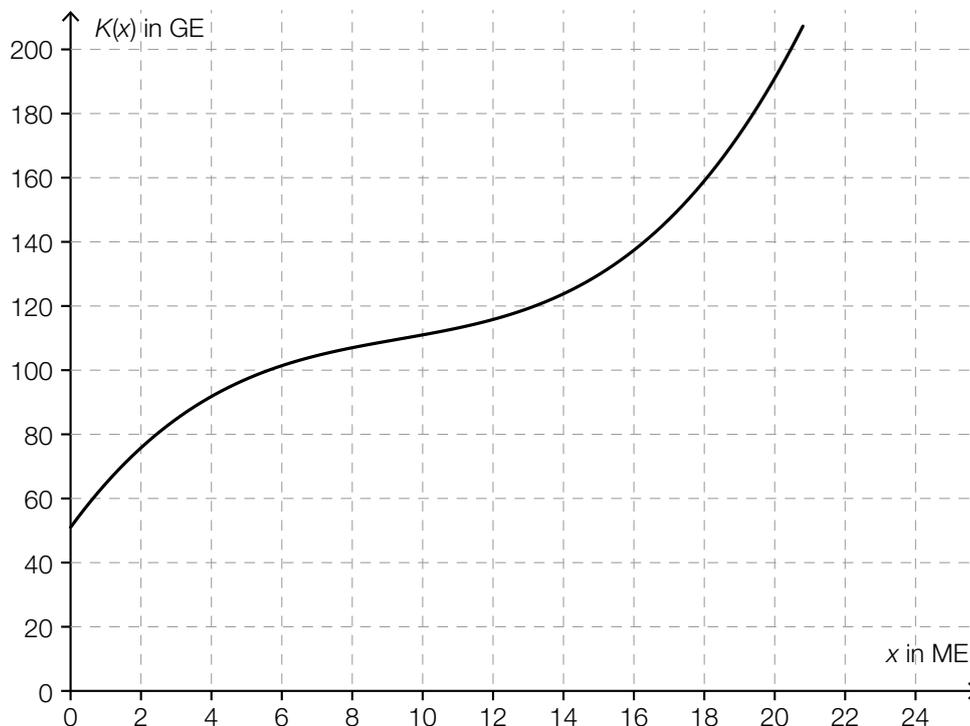
erforderlich

Ein Unternehmen stellt verschiedene Lacke her. Es wird die monatliche Produktion betrachtet.

a) Die Kosten für die Herstellung des Acryllacks *Ferrocolor* sollen durch eine Kostenfunktion K mit $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschrieben werden. Das Unternehmen hat dabei Fixkosten von 450 GE. Bei der Produktion von 8 ME liegt die Kostenkehre. Bei der Produktion von 8 ME betragen die Gesamtkosten 522 GE und die Grenzkosten 5 GE/ME.

- Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem die Koeffizienten a , b , c und d ermittelt werden können.
- Ermitteln Sie die Koeffizienten a , b , c und d .

b) Im nachstehenden Diagramm ist der Graph der Kostenfunktion K für die Herstellung des Lacks *VariColor* dargestellt.



Das Betriebsoptimum kann mithilfe des Graphen der Kostenfunktion K ermittelt werden, indem man diejenige Tangente an den Graphen von K einzeichnet, die durch den Koordinatenursprung verläuft. Die x -Koordinate des Berührungspunkts ist das Betriebsoptimum.

- Ermitteln Sie grafisch mithilfe des obigen Diagramms das Betriebsoptimum.
- Ermitteln Sie die langfristige Preisuntergrenze.

* ehemalige Klausuraufgabe

- c) Für die Holzschutzgrundierung *Pullex* wird der Zusammenhang zwischen dem Preis und der Absatzmenge erhoben:

Absatzmenge x in ME	Preis $p_N(x)$ in GE/ME
10	16
12	13
15	12
17	9
19	8

- Ermitteln Sie mithilfe linearer Regression eine Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage p_N .
- Ermitteln Sie den maximalen Erlös.

- d) Die Gewinnfunktion G für den Lack *Soloplast* ist gegeben durch:

$$G(x) = -0,025 \cdot x^3 - 0,1 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 65$$

x ... Anzahl der abgesetzten ME

$G(x)$... Gewinn bei x abgesetzten ME in GE

- Lesen Sie aus der Gleichung der Gewinnfunktion die Fixkosten für die Herstellung des Lacks ab.
- Beschreiben Sie, wie sich der Graph der Gewinnfunktion ändert, wenn die Fixkosten steigen.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
 $K'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$
 $K''(x) = 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b$

I: $K(0) = 450 \Rightarrow 450 = d$

II: $K(8) = 522 \Rightarrow 522 = 512 \cdot a + 64 \cdot b + 8 \cdot c + 450$

III: $K'(8) = 5 \Rightarrow 5 = 192 \cdot a + 16 \cdot b + c$

IV: $K''(8) = 0 \Rightarrow 0 = 48 \cdot a + 2 \cdot b$

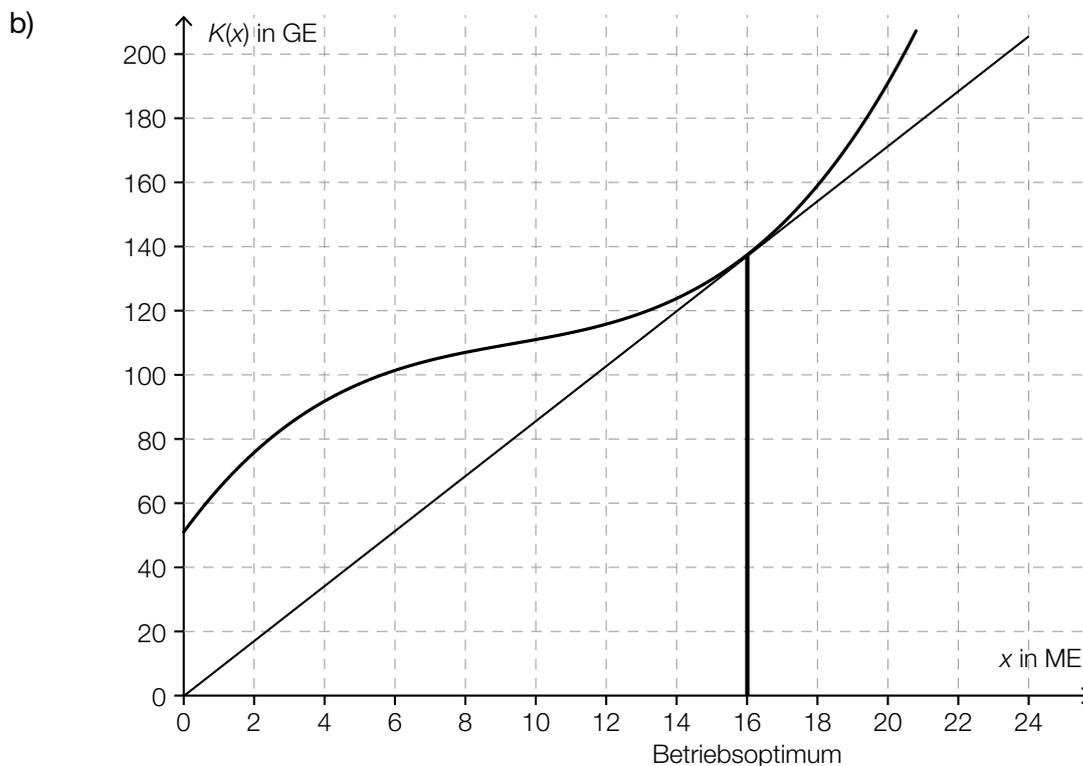
Lösung des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:

$$a = \frac{1}{16} = 0,0625$$

$$b = -\frac{3}{2} = -1,5$$

$$c = 17$$

$$d = 450$$



grafische Ermittlung des Betriebsoptimums: 16 ME (Toleranzbereich: [15; 17])

Ermittlung der langfristigen Preisuntergrenze: $\frac{136 \text{ GE}}{16 \text{ ME}} = 8,5 \text{ GE/ME}$
 (Toleranzbereich: [8; 9])

c) Berechnung der Preisfunktion der Nachfrage mittels Technologieeinsatz:

$$p_N(x) = -0,861 \cdot x + 24,169 \quad (\text{Koeffizienten gerundet})$$

$$E(x) = p_N(x) \cdot x$$

$$E'(x) = 0 \Rightarrow x = 14,037\dots$$

$$E(14,037\dots) = 169,632\dots$$

Der maximale Erlös beträgt rund 169,63 GE.

d) $G(0) = -F$

Die Fixkosten betragen 65 GE.

Wenn die Fixkosten steigen, wird der Graph der Gewinnfunktion nach unten verschoben.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichungen mithilfe der Funktion K
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichungen mithilfe der Funktionen K' und K''
1 × B: für das richtige Ermitteln der Koeffizienten a , b , c und d
- b) 1 × A: für das richtige grafische Ermitteln des Betriebsoptimums
1 × B: für das richtige Ermitteln der langfristigen Preisuntergrenze
- c) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung mithilfe linearer Regression
1 × B2: für das richtige Ermitteln des maximalen Erlöses
- d) 1 × C1: für das richtige Ablesen der Fixkosten
1 × C2: für die richtige Beschreibung der Veränderung des Graphen der Gewinnfunktion

Liftgesellschaft (1)*

Aufgabennummer: B_434

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

a) Für die Finanzierung eines Sessellifts hat eine Liftgesellschaft einen Kredit in Höhe von € 1,4 Mio. aufgenommen. Diesen Kredit zahlt die Liftgesellschaft durch nachschüssige Jahresraten in Höhe von € 90.000 bei einer Verzinsung von 4 % p. a. zurück. (Spesen und Gebühren werden nicht berücksichtigt.)

– Berechnen Sie, wie viele volle Jahresraten zu zahlen sind.

Nach 5 Jahren Kredittilgung gerät die Liftgesellschaft in Zahlungsschwierigkeiten und setzt die Rückzahlungen aus.

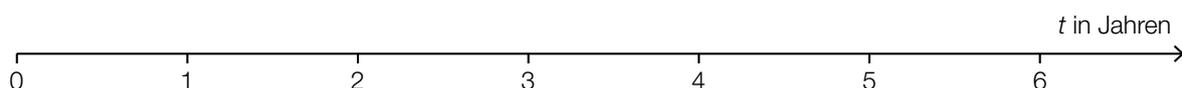
– Berechnen Sie die Höhe der Restschuld am Ende des 6. Jahres.

b) Die Liftgesellschaft bildet eine Rücklage und veranlagt dafür 3 Beträge zu unterschiedlichen Zeitpunkten. Der Gesamtwert der Rücklage nach 6 Jahren wird durch folgende Rechnung ermittelt:

$$(50\,000 \cdot 1,03^2 + 30\,000) \cdot 1,035^4 + 80\,000 \cdot 1,035 \approx 178\,096,05$$

– Beschreiben Sie, zu welchen Zinssätzen der Betrag in Höhe von € 50.000 verzinst wird. Geben Sie an, wie lange die jeweiligen Zinssätze gelten.

– Tragen Sie die 3 Beträge und den Gesamtwert der Rücklage nach 6 Jahren auf der nachstehenden Zeitachse ein.



Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

$$\text{a) } 1\,400\,000 = 90\,000 \cdot \frac{1,04^n - 1}{0,04} \cdot \frac{1}{1,04^n}$$

Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz:

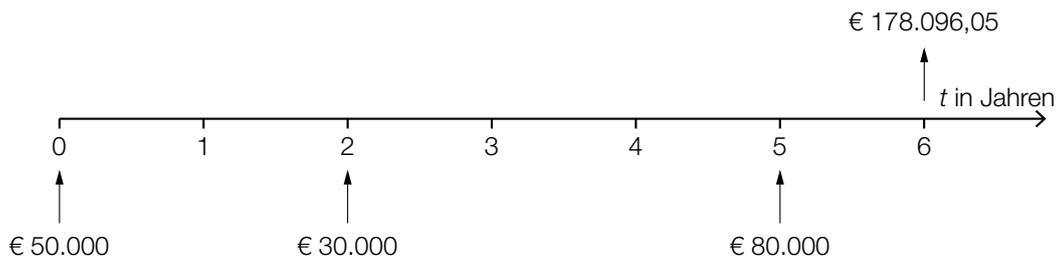
$$n = 24,81\dots$$

Die Liftgesellschaft muss 24 volle Jahresraten bezahlen.

$$\left(1\,400\,000 \cdot 1,04^5 - 90\,000 \cdot \frac{1,04^5 - 1}{0,04}\right) \cdot 1,04 = 1\,264\,478,834\dots$$

Die Höhe der Restschuld am Ende des 6. Jahres beträgt € 1.264.478,83.

- b) Der Betrag in Höhe von € 50.000 wird 2 Jahre zu 3 % p. a., dann 4 Jahre zu 3,5 % p. a. verzinst.



Lösungsschlüssel

- a) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Anzahl der Vollraten
 1 × B2: für die richtige Berechnung der Restschuld am Ende des 6. Jahres
- b) 1 × C: für die richtige Beschreibung der Zinssätze und der Verzinsungsdauer
 1 × A: für das richtige Eintragen der 3 Beträge und des Gesamtwerts der Rücklage nach 6 Jahren

Liftgesellschaft (2)*

Aufgabennummer: B_435

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

a) Eine Liftgesellschaft plant die Errichtung einer neuen Seilbahn. Die Anschaffungskosten für die Seilbahn betragen € 4,5 Mio. Als Nutzungsdauer werden 8 Jahre angenommen. Die Liftgesellschaft erwartet jährliche Einnahmen von € 940.000. Die jährlichen Personal- und Betriebskosten werden auf € 250.000 geschätzt. Im Jahr 3 und im Jahr 6 entstehen Wartungskosten in Höhe von € 80.000. Am Ende der Nutzungsdauer wird mit einem Liquidationserlös von 10 % der Anschaffungskosten gerechnet.

– Übertragen Sie die Einnahmen und die Ausgaben für den Zeitraum der Nutzungsdauer in die nachstehende Tabelle.

Jahr	Einnahmen	Ausgaben
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

Die Liftgesellschaft kalkuliert mit einem Zinssatz von 4 % p. a.

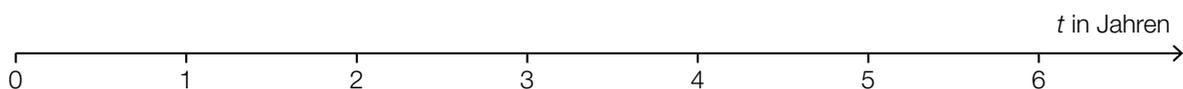
– Ermitteln Sie den Kapitalwert der Investition.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Liftgesellschaft bildet eine Rücklage und veranlagt dafür 3 Beträge zu unterschiedlichen Zeitpunkten. Der Gesamtwert der Rücklage nach 6 Jahren wird durch folgende Rechnung ermittelt:

$$(50\,000 \cdot 1,03^2 + 30\,000) \cdot 1,035^4 + 80\,000 \cdot 1,035 \approx 178\,096,05$$

- Beschreiben Sie, zu welchen Zinssätzen der Betrag in Höhe von € 50.000 verzinst wird. Geben Sie an, wie lange die jeweiligen Zinssätze gelten.
- Tragen Sie die 3 Beträge und den Gesamtwert der Rücklage nach 6 Jahren auf der nachstehenden Zeitachse ein.



Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)

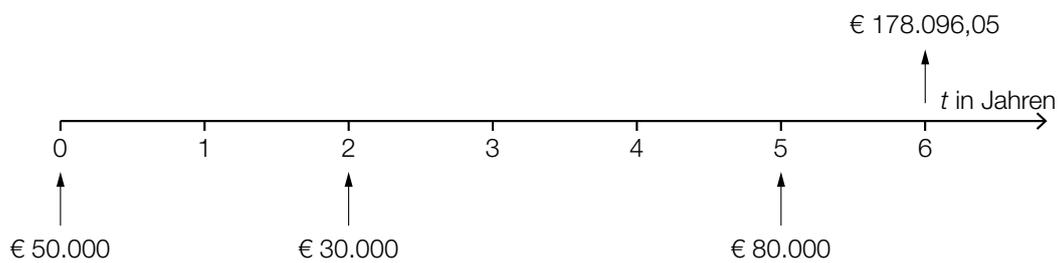
Jahr	Einnahmen	Ausgaben
0		€ 4.500.000
1	€ 940.000	€ 250.000
2	€ 940.000	€ 250.000
3	€ 940.000	€ 330.000
4	€ 940.000	€ 250.000
5	€ 940.000	€ 250.000
6	€ 940.000	€ 330.000
7	€ 940.000	€ 250.000
8	€ 1.390.000	€ 250.000

$$-4\,500\,000 + (940\,000 - 250\,000) \cdot \frac{1,04^8 - 1}{0,04} \cdot \frac{1}{1,04^8} + \frac{450\,000}{1,04^8} - \frac{80\,000}{1,04^6} - \frac{80\,000}{1,04^3} =$$

$$= 340\,059,685\dots$$

Der Kapitalwert dieser Investition beträgt € 340.059,69.

b) Der Betrag in Höhe von € 50.000 wird 2 Jahre zu 3 % p. a., dann 4 Jahre zu 3,5 % p. a. verzinst.



Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für das richtige Übertragen in die Einnahmen-Ausgaben-Tabelle
1 × B: für das richtige Ermitteln des Kapitalwerts

- b) 1 × C: für die richtige Beschreibung der Zinssätze und der Verzinsungsdauer
1 × A: für das richtige Eintragen der 3 Beträge und des Gesamtwerts der Rücklage nach 6 Jahren

Smartphones (2)*

Aufgabennummer: B_079

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

- a) Der Akku eines Smartphones entlädt sich aufgrund von Hintergrundanwendungen auch dann, wenn das Gerät nicht aktiv benützt wird.

Für ein bestimmtes Smartphone wird die zeitliche Entwicklung des Akku-Ladestands in Prozent beobachtet. Zur Zeit $t = 0$ ist der Akku vollständig aufgeladen.

Zeit t in Stunden	Akku-Ladestand in Prozent
0	100
3	94
6	81
10	71
18	43

Die zeitliche Entwicklung des Akku-Ladestands in Prozent soll beschrieben werden.

- Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion.

Bei einem Akku-Ladestand von 15 % sollte das Smartphone wieder ans Stromnetz angeschlossen werden.

- Berechnen Sie, wie viele Stunden nach dem vollständigen Aufladen dies gemäß diesem linearen Regressionsmodell der Fall ist.

b) Die zeitliche Entwicklung des Akku-Ladestands beim Aufladen lässt sich näherungsweise durch die Funktion A beschreiben:

$$A(t) = 100 - 85 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

t ... Zeit nach Beginn des Aufladens in h

$A(t)$... Akku-Ladestand zur Zeit t in Prozent

λ ... positiver Parameter

– Argumentieren Sie mathematisch, dass sich die Funktionswerte von A mit wachsendem t dem Wert 100 annähern.

2 Stunden nach Beginn des Aufladens beträgt der Akku-Ladestand 80 %.

– Berechnen Sie λ .

– Berechnen Sie, zu welcher Zeit nach Beginn des Aufladens der Akku-Ladestand 90 % beträgt.

- c) Die Entwicklung der weltweiten Verkaufszahlen von Smartphones kann modellhaft durch die Funktion S beschrieben werden:

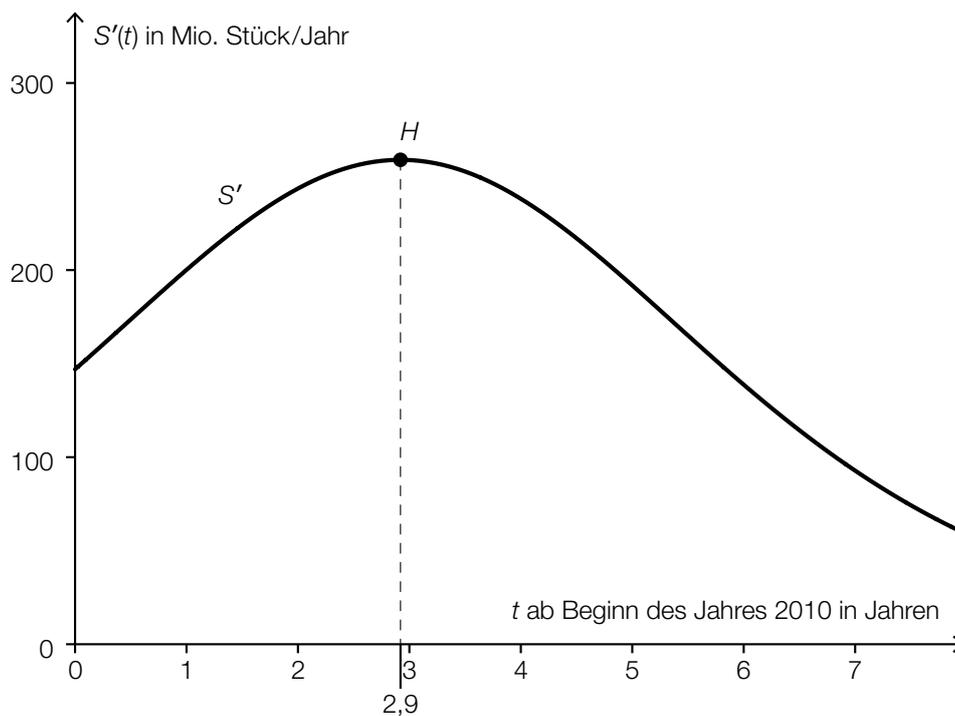
$$S(t) = \frac{1918}{1 + 4,84 \cdot e^{-0,54 \cdot t}}$$

t ... Zeit in Jahren ($t = 0$ entspricht dem Beginn des Jahres 2010)

$S(t)$... Anzahl der bis zur Zeit t insgesamt verkauften Smartphones in Millionen Stück

- Ermitteln Sie mithilfe dieses Modells die Anzahl der bis zum Beginn des Jahres 2020 insgesamt verkauften Smartphones.

Im nachstehenden Diagramm ist der Graph der Ableitungsfunktion S' dargestellt. Auf dem Graphen von S' ist der Hochpunkt H markiert.



- Beschreiben Sie die mathematische Bedeutung der Stelle $t = 2,9$ in Bezug auf die Funktion S .

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$$L(t) = -3,210 \cdot t + 101,554 \quad (\text{Koeffizienten gerundet})$$

t ... Zeit in h

$L(t)$... Akku-Ladestand zur Zeit t in %

$$15 = -3,210 \cdot t + 101,554$$

$$t = 26,9\dots$$

Nach etwa 27 Stunden sollte das Smartphone wieder ans Stromnetz angeschlossen werden.

b) Mit beliebig groß werdendem t geht $e^{-\lambda \cdot t}$ gegen null, und damit geht $100 - 85 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ gegen 100.

$$80 = 100 - 85 \cdot e^{-\lambda \cdot 2}$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$\lambda = 0,72345\dots$$

$$90 = 100 - 85 \cdot e^{-0,72345\dots \cdot t}$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$t = 2,9\dots$$

Nach etwa 3 Stunden ist ein Ladestand von 90 % erreicht.

$$\text{c) } S(10) = \frac{1918}{1 + 4,84 \cdot e^{-0,54 \cdot 10}} = 1876,9\dots$$

Gemäß diesem Modell werden bis zum Beginn des Jahres 2020 rund 1 877 Millionen Smartphones verkauft.

$t = 2,9$ ist die Wendestelle der Funktion S .

oder:

$t = 2,9$ ist die Stelle maximalen Wachstums von S .

Lösungsschlüssel

- a) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der Regressionsfunktion
1 × B2: für die richtige Berechnung des Zeitpunkts

- b) 1 × D: für die richtige mathematische Argumentation
1 × B1: für die richtige Berechnung von λ
1 × B2: für die richtige Berechnung des Zeitpunkts

- c) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Funktionswerts
1 × C: für die richtige Beschreibung der Bedeutung der Stelle $t = 2,9$ in Bezug auf die Funktion S

Rohrproduktion*

Aufgabennummer: B_089

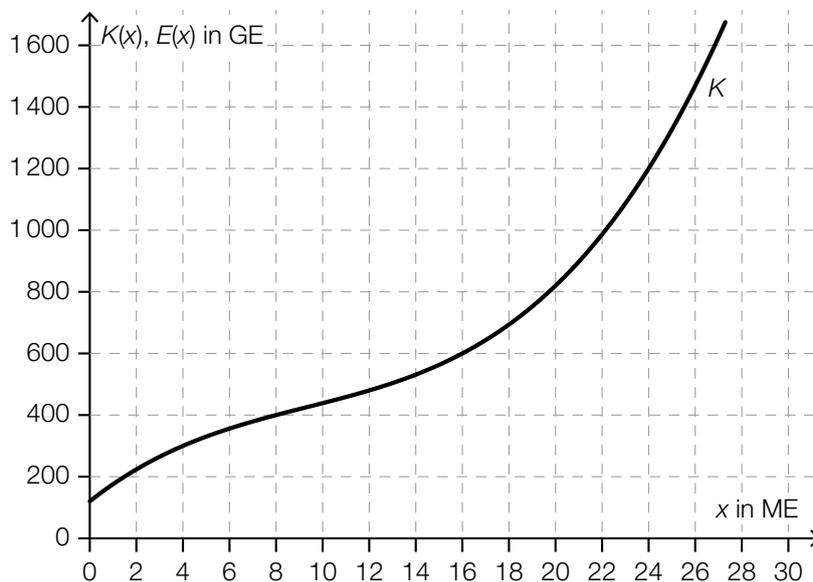
Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

a) Ein Unternehmen stellt Kunststoffrohre her, die zu einem fixen Preis verkauft werden.

Im nachstehenden Diagramm ist der Graph der Kostenfunktion K für die Herstellung der Kunststoffrohre dargestellt.



Der Break-even-Point liegt bei einer Produktion von 8 ME. Die Kosten betragen dabei 400 GE.

- Zeichnen Sie den Graphen der Erlösfunktion E im obigen Diagramm ein.
- Ermitteln Sie den zugehörigen Marktpreis.
- Ergänzen Sie in der nachstehenden Wertetabelle die fehlenden Werte für die zugehörige Gewinnfunktion G .

x in ME	0	8	16
G(x) in GE		0	

b) Die Grenzkostenfunktion K' für die Herstellung von Kunststoffrohren ist gegeben durch:

$$K'(x) = \frac{15}{32} \cdot x^2 - \frac{35}{4} \cdot x + 60$$

x ... produzierte Menge in ME

$K'(x)$... Grenzkosten bei der produzierten Menge x in GE/ME

- Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K mit $K(16) = 600$.
- Berechnen Sie die Kostenkehre.

c) Ein anderes Unternehmen stellt Keramikrohre her.

Von der quadratischen Erlösfunktion E ist für den Absatz von 10 ME bekannt:

$$E(10) = 15$$

$$E'(10) = -1,5$$

$$E''(10) = -0,6$$

- Kreuzen Sie die zutreffende Aussage über den Erlös bei einem Absatz von 11 ME an.
[1 aus 5]

$E(11) = 13,2$	<input type="checkbox"/>
$E(11) = 13,5$	<input type="checkbox"/>
$E(11) = 14,1$	<input type="checkbox"/>
$E(11) = 16,2$	<input type="checkbox"/>
$E(11) = 16,5$	<input type="checkbox"/>

d) Die Erlösfunktion E für Betonrohre ist gegeben durch:

$$E(x) = -3,2 \cdot x \cdot (x - 25)$$

x ... Absatzmenge in ME

$E(x)$... Erlös bei der Absatzmenge x in GE

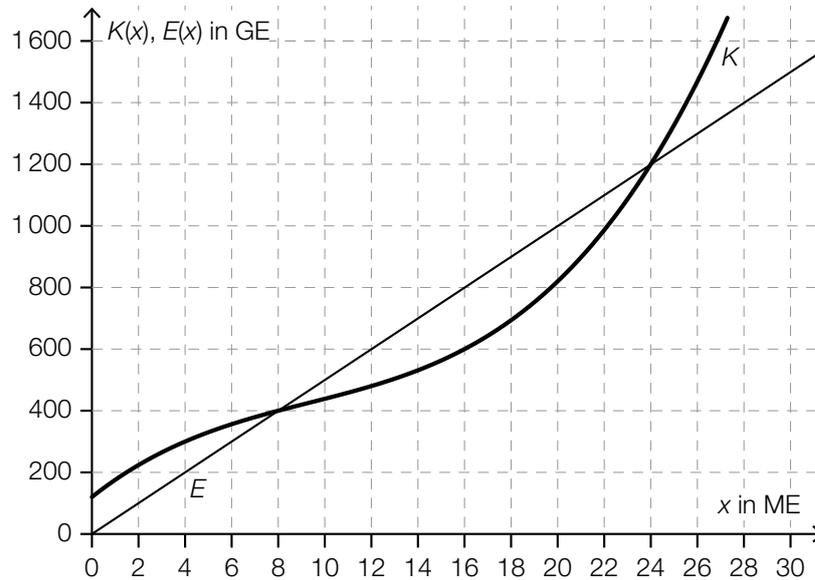
- Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Preisfunktion der Nachfrage.
- Ermitteln Sie den Höchstpreis.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Marktpreis: 50 GE/ME

x in ME	0	8	16
G(x) in GE	-120	0	200

Toleranzbereiche:

G(0): [-180; -100]

G(16): [150; 250]

$$b) K(x) = \int \left(\frac{15}{32} \cdot x^2 - \frac{35}{4} \cdot x + 60 \right) dx = \frac{5}{32} \cdot x^3 - \frac{35}{8} \cdot x^2 + 60 \cdot x + F$$

$$K(16) = 600 \Rightarrow 600 = \frac{5}{32} \cdot 16^3 - \frac{35}{8} \cdot 16^2 + 60 \cdot 16 + F \Rightarrow F = 120$$

$$K(x) = \frac{5}{32} \cdot x^3 - \frac{35}{8} \cdot x^2 + 60 \cdot x + 120$$

$$K''(x) = \frac{15}{16} \cdot x - \frac{35}{4}$$

$$K''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{28}{3}$$

Die Kostenkehre liegt bei rund 9,33 ME.

c)

$E(11) = 13,2$	<input checked="" type="checkbox"/>

d) $p_N(x) = -3,2 \cdot x + 80$

 x ... Absatzmenge in ME $p_N(x)$... Preis bei der Absatzmenge x in GE/ME

Höchstpreis: 80 GE/ME

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A1: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Erlösfunktion
 1 × C: für das richtige Ermitteln des Marktpreises
 1 × A2: für das richtige Ergänzen der fehlenden Werte in der Tabelle in den angegebenen Toleranzbereichen $[-180; -100]$ bzw. $[150; 250]$
- b) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Kostenfunktion
 1 × B: für die richtige Berechnung der Kostenkehre
- c) 1 × A: für das richtige Ankreuzen
- d) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage
 1 × C: für das richtige Ermitteln des Höchstpreises

Baugrundstücke*

Aufgabennummer: B_090

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Die Preise von Baugrundstücken sind in den letzten Jahren erheblich gestiegen.

a) Herr Pfeifer hat ein Grundstück um € 228.000 gekauft. Nach der Umwidmung in ein Baugrundstück kann er es 4 Jahre später um € 753.000 verkaufen.

- Ermitteln Sie den mittleren jährlichen Zinssatz des eingesetzten Kapitals ohne Berücksichtigung von Spesen, Gebühren und Steuern.

b) Frau Maier möchte ein Baugrundstück verkaufen. Sie bekommt zwei Angebote.

Herr Altmann bietet € 150.000 sofort bei Vertragsabschluss und € 50.000 nach 2 Jahren.
Frau Bogner bietet € 202.000 ein Jahr nach Vertragsabschluss.

Frau Maier vergleicht die beiden Angebote.

- Weisen Sie für einen Zinssatz von 3 % p. a. nach, dass sich die beiden Angebote zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses um rund € 1.013 unterscheiden.

Für die beiden Angebote wird folgende Gleichung aufgestellt:

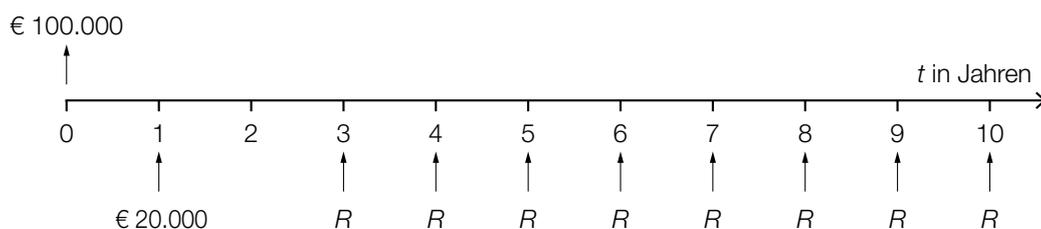
$$150\,000 \cdot x^2 + 50\,000 = 202\,000 \cdot x$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist $x \approx 1,0198$.

- Interpretieren Sie die Bedeutung von x im gegebenen Sachzusammenhang.

- c) Herr Müller nimmt für den Kauf eines Baugrundstücks einen Kredit in Höhe von € 100.000 auf. Der vereinbarte Zinssatz beträgt 3 % p. a.

Der Kredit soll durch die auf der nachstehenden Zeitachse dargestellten Zahlungen vollständig getilgt werden.



Die Zahlungen R können als nachschüssige Rente aufgefasst werden.

- Markieren Sie auf der Zeitachse den Bezugszeitpunkt für den Barwert dieser nachschüssigen Rente.
 - Berechnen Sie die Höhe der Zahlungen R .
- d) Frau Marth nimmt für den Kauf eines Baugrundstücks einen Kredit in Höhe von € 120.000 mit jährlich nachschüssigen Kreditrückzahlungen auf. Der vereinbarte Zinssatz beträgt 2,5 % p. a.

Für die ersten zwei Jahre vereinbart Frau Marth Sonderbedingungen, die im nachstehenden Tilgungsplan dargestellt sind.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 120.000,00
1			€ 0,00	€ 123.000,00
2		€ 0,00		€ 123.000,00

- Ermitteln Sie die Beträge für die beiden grau markierten Zellen im obigen Tilgungsplan.
- Ab dem Jahr 3 werden jährliche Annuitäten in Höhe von € 10.000 bezahlt.
- Berechnen Sie, wie viele volle Annuitäten in Höhe von € 10.000 bezahlt werden müssen.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $228000 \cdot (1 + i)^4 = 753000$

$$i = \sqrt[4]{\frac{753000}{228000}} - 1 = 0,3480\dots$$

Der mittlere jährliche Zinssatz beträgt rund 34,8 %.

b) Barwertvergleich:

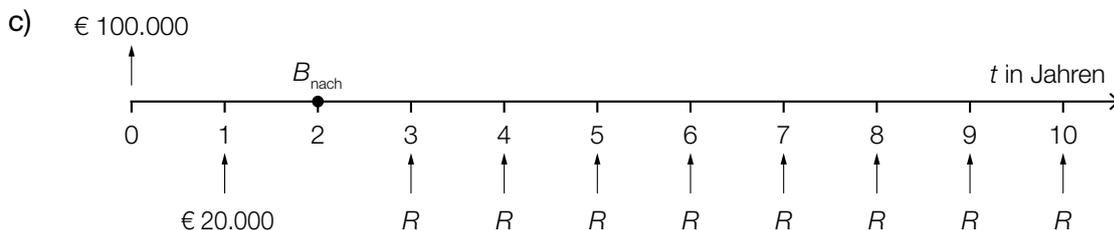
Angebot 1: $150000 + \frac{50000}{1,03^2} = 197129,795\dots$

Angebot 2: $\frac{202000}{1,03} = 196116,504\dots$

$197129,795\dots - 196116,504\dots = 1013,290\dots$

Die beiden Angebote unterscheiden sich zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses also um rund € 1.013.

Bei einem Zinssatz von 1,98 % p. a. sind die beiden Angebote äquivalent.



Bewertung aller Zahlungen auf den Bezugszeitpunkt $t = 2$ (Barwert der nachschüssigen Rente): $100000 \cdot 1,03^2 - 20000 \cdot 1,03 = 85490$

$$85490 = R \cdot \frac{1,03^8 - 1}{0,03} \cdot \frac{1}{1,03^8} \Rightarrow R = 12178,596\dots$$

Die Höhe der Zahlungen R beträgt € 12.178,60.

d)

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 120.000,00
1		€ -3.000,00	€ 0,00	€ 123.000,00
2		€ 0,00	€ 3.075,00	€ 123.000,00

$$123000 = 10000 \cdot \frac{1,025^n - 1}{0,025} \cdot \frac{1}{1,025^n}$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$n = 14,88\dots$

Die volle Annuität in Höhe von € 10.000 muss 14-mal bezahlt werden.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × B: für das richtige Ermitteln des mittleren jährlichen Zinssatzes
- b) 1 × D: für den richtigen Nachweis
1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
- c) 1 × C: für das richtige Markieren des Bezugszeitpunkts
1 × B: für die richtige Berechnung der Höhe von R
- d) 1 × B1: für das richtige Ermitteln des Tilgungsanteils im Jahr 1 und der Annuität im Jahr 2
1 × B2: für die richtige Berechnung der Anzahl der vollen Annuitäten

Hotelerweiterung*

Aufgabennummer: B_106

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Ein Hotel plant die Errichtung zusätzlicher Zimmer.

- a) Das Hotel plant mit einer Investitionssumme von € 1.650.000 die Errichtung 15 zusätzlicher Zimmer.

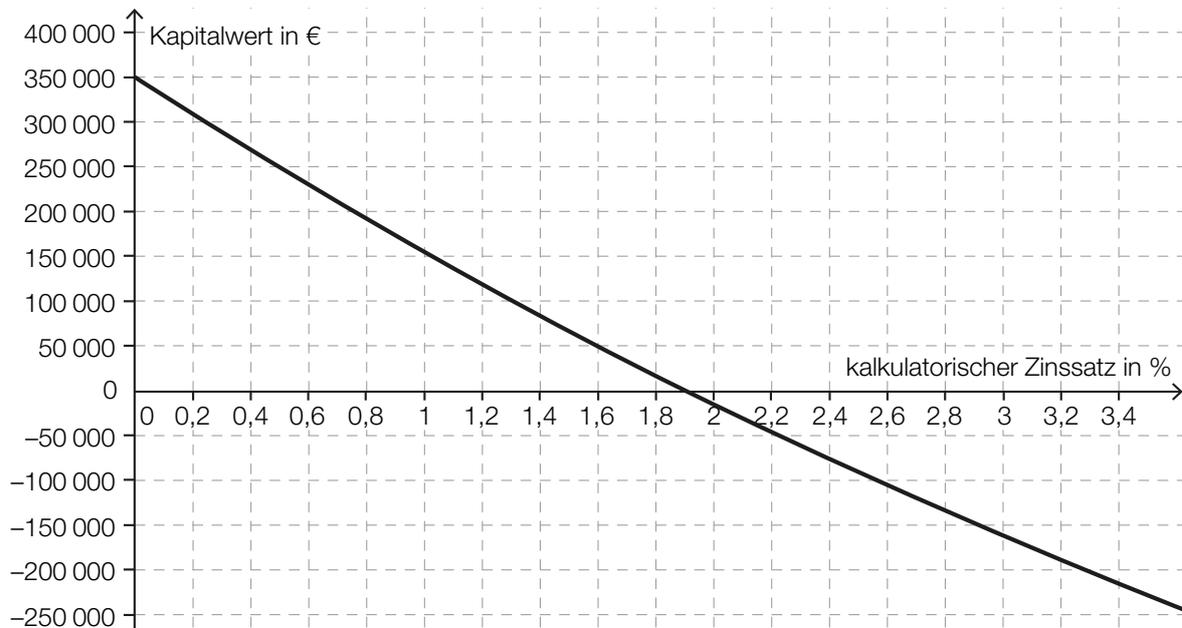
Für jedes dieser neuen Zimmer wird im 1. Jahr mit einem Erlös in Höhe von € 87 pro Nächtigung kalkuliert. Gleichzeitig rechnet der Betrieb damit, dass 13 % des Erlöses für Warenverbrauch, 31 % für Personalaufwand und 28 % für Betriebskosten aufgewendet werden.

Im 1. Jahr rechnet man damit, dass diese zusätzlichen Zimmer für jeweils 165 Nächtigungen gebucht werden.

- Tragen Sie die prognostizierten Einnahmen und Ausgaben für diese zusätzlichen Zimmer in die nachstehende Tabelle ein.

Jahr	Einnahmen in Euro	Ausgaben in Euro
0		
1		

- b) In der nachstehenden Abbildung ist der Kapitalwert einer Investition in Höhe von € 1.650.000 in Abhängigkeit vom kalkulatorischen Zinssatz dargestellt. Es werden gleich hohe jährliche Rückflüsse und eine Nutzungsdauer von 20 Jahren angenommen.



- Lesen Sie aus dem Funktionsgraphen ab, bis zu welchem kalkulatorischen Zinssatz die Investition vorteilhaft ist.
 - Bestimmen Sie die Höhe der jährlichen Rückflüsse.
- c) Bei einer bestimmten Kalkulation geht man bei einer Investitionssumme in Höhe von € 1.650.000 davon aus, dass 20 Jahre lang gleich hohe jährliche Rückflüsse in Höhe von jeweils € 78.000 zu erwarten sind. Die Rückflüsse können zu einem Wiederveranlagungszinssatz von 1,5 % p. a. angelegt werden.
- Berechnen Sie den Endwert der wiederveranlagten Rückflüsse.
 - Überprüfen Sie nachweislich mithilfe des modifizierten internen Zinssatzes, ob diese Investition vorteilhaft ist.
 - Argumentieren Sie, dass der modifizierte interne Zinssatz bei einem höheren Wiederveranlagungszinssatz höher wäre.
- d) Um die Investition durchführen zu können, ist ein Bankkredit in Höhe von € 800.000 notwendig. Für die Rückzahlung werden eine Laufzeit von 15 Jahren und nachschüssige Semesterraten in Höhe von jeweils € 38.100 vereinbart.
- Berechnen Sie den effektiven Jahreszinssatz für dieses Finanzierungsmodell.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)

Jahr	Einnahmen in Euro	Ausgaben in Euro
0	0	1 650 000
1	$15 \cdot 165 \cdot 87 = 215\,325$	$0,72 \cdot 215\,325 = 155\,034$

- b) Bis zu einem kalkulatorischen Zinssatz von rund 1,9 % ist die Investition vorteilhaft.
Toleranzbereich: [1,85 %; 1,95 %]

$$350\,000 = -1\,650\,000 + R \cdot 20 \Rightarrow R = 100\,000$$

Die Höhe der jährlichen Rückflüsse beträgt € 100.000.

Auch eine Lösung mithilfe des internen Zinssatzes oder eines anderen kalkulatorischen Zinssatzes ist als richtig zu werten.

c) $E_{\text{nach}} = 78\,000 \cdot \frac{1,015^{20} - 1}{0,015} = 1\,803\,646,034\dots$

Der Endwert der wiederveranlagten Rückflüsse beträgt € 1.803.646,03.

$$1\,650\,000 \cdot (1 + i_{\text{mod}})^{20} = 1\,803\,646,034\dots$$

$$i_{\text{mod}} = \sqrt[20]{\frac{1\,803\,646,034\dots}{1\,650\,000}} - 1 = 0,00446\dots \approx 0,45 \%$$

Da der modifizierte interne Zinssatz geringer als der Wiederveranlagungszinssatz ist, ist die Investition nicht vorteilhaft.

Bei einem höheren Wiederveranlagungszinssatz wäre der Endwert der Rückflüsse größer und somit auch der modifizierte interne Zinssatz.

d) $800\,000 = 38\,100 \cdot \frac{q_2^{30} - 1}{q_2 - 1} \cdot \frac{1}{q_2^{30}}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz: $q_2 = 1,02476\dots$

$$i = q_2^2 - 1 = 0,05013\dots$$

Für dieses Finanzierungsmodell beträgt der zugrunde liegende effektive Jahreszinssatz rund 5,01 %.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für das richtige Eintragen der Einnahmen und Ausgaben in der Tabelle
- b) 1 × C: für das richtige Ablesen im Toleranzbereich [1,85 %; 1,95 %]
1 × B: für das richtige Bestimmen der Höhe der jährlichen Rückflüsse
- c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Endwerts
1 × D1: für den richtigen Nachweis mithilfe des modifizierten internen Zinssatzes
1 × D2: für die richtige Argumentation
- d) 1 × B: für die richtige Berechnung des effektiven Jahreszinssatzes

Parfumherstellung

In einem Betrieb wird Parfum hergestellt.

- a) Die Gesamtkosten für die Produktion des Parfums *Desert* können durch die ertragsgesetzliche Kostenfunktion K beschrieben werden. Für die zugehörige Grenzkostenfunktion K' gilt:

$$K'(x) = 0,15 \cdot x^2 - 6 \cdot x + c \quad \text{mit } x \geq 0$$

x ... Produktionsmenge in ME

$K'(x)$... Grenzkosten bei der Produktionsmenge x in GE/ME

c ... Parameter

- 1) Ermitteln Sie, für welche Produktionsmengen ein progressiver Kostenverlauf vorliegt.

[0/1 P.]

Bei ertragsgesetzlichen Kostenfunktionen gilt folgende Bedingung:

Die Grenzkostenfunktion muss im gesamten Definitionsbereich positiv sein.

- 2) Weisen Sie nach, dass diese Bedingung nur für $c > 60$ erfüllt ist.

[0/1 P.]

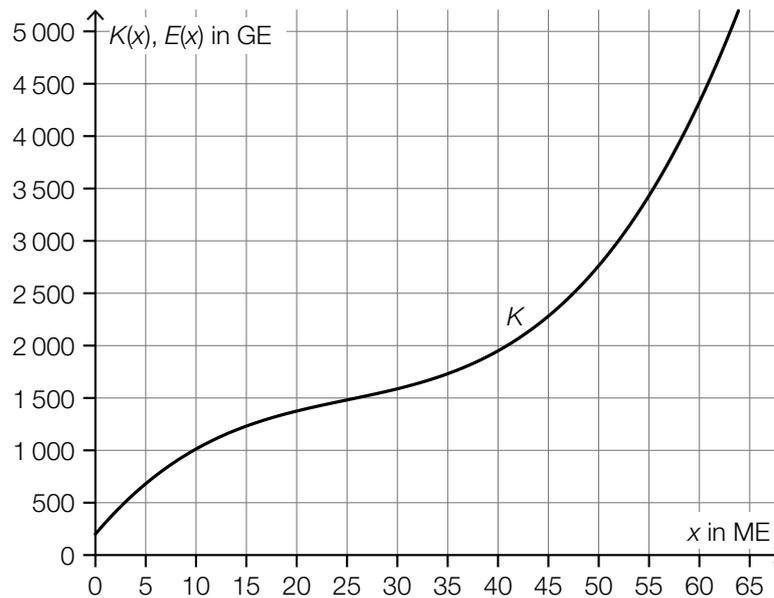
Die Fixkosten bei der Produktion dieses Parfums betragen 250 GE.

Es gilt: $c = 80$

- 3) Stellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K auf.

[0/1 P.]

- b) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Gesamtkostenfunktion K für die Produktion des Parfums *Sunrise* dargestellt. Der Verkaufspreis dieses Parfums beträgt 75 GE/ME.



- 1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Erlösfunktion E ein. [0/1 P.]
- 2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Gewinnbereich ab.

[_____ ; _____] (in ME) [0/1 P.]

- c) Für die Gewinnfunktion G für die Produktion des Parfums *Moonlight* gilt:

$$G(x) = -0,05 \cdot x^3 + 2,4 \cdot x^2 - 9 \cdot x - 180$$

x ... Absatzmenge in ME

$G(x)$... Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

- 1) Berechnen Sie den durchschnittlichen Gewinn pro ME, der bei einem Absatz von 25 ME erzielt wird. [0/1 P.]
- 2) Berechnen Sie den maximalen Gewinn. [0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

a1) $K''(x) = 0,3 \cdot x - 6$
 $K''(x) = 0$ oder $0,3 \cdot x - 6 = 0$
 $x = 20$

Für $x > 20$ liegt ein progressiver Kostenverlauf vor.

a2) $0,15 \cdot x^2 - 6 \cdot x + c = 0$
 $x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 0,15 \cdot c}}{2 \cdot 0,15}$

Der Ausdruck unter der Wurzel muss kleiner als null sein:

$$36 - 4 \cdot 0,15 \cdot c < 0$$

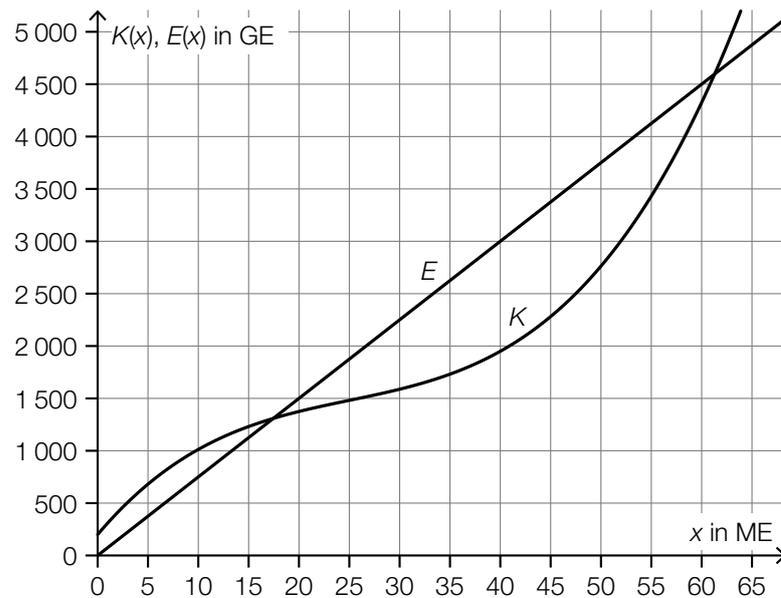
$$c > 60$$

Auch ein Nachweis, dass $K'(20) = 0$ für $c = 60$ gilt, ist im Hinblick auf die Punktevergabe ausreichend.

a3) $\int (0,15 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 80) dx = 0,05 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 80 \cdot x + F$
 $F = 250$
 $K(x) = 0,05 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 80 \cdot x + 250$

- a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Produktionsmengen mit einem progressiven Kostenverlauf.
a2) Ein Punkt für das richtige Nachweisen.
a3) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Kostenfunktion K .

b1)



b2) [17; 61] (in ME)

Toleranzbereich untere Grenze: [15; 19]

Toleranzbereich obere Grenze: [59; 63]

b1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen der Erlösfunktion E .

b2) Ein Punkt für das Ablesen des richtigen Gewinnbereichs.

c1) $G(25) = 313,75$

$$\frac{313,75}{25} = 12,55$$

Bei einem Absatz von 25 ME beträgt der durchschnittliche Gewinn 12,55 GE/ME.

c2) $G'(x) = -0,15 \cdot x^2 + 4,8 \cdot x - 9$

$$G'(x) = 0 \quad \text{oder} \quad -0,15 \cdot x^2 + 4,8 \cdot x - 9 = 0$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 30$$

$$(G(2) = -188,8)$$

$$G(30) = 360$$

Der maximale Gewinn beträgt 360 GE.

c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des durchschnittlichen Gewinns.

c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des maximalen Gewinns.

Kaffeeautomat*

Aufgabennummer: B_285

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Der Elternverein einer Schule entschließt sich, einen Kaffeeautomaten für Schüler/innen und Lehrer/innen anzuschaffen.

a) Die Kosten für den Kaffeeautomaten betragen € 5.500.

Der Elternverein erhält folgendes Leasingangebot:

- Anzahlung: € 1.000 bei Vertragsabschluss
- 48 Monatsraten zu je € 100
- Die Ratenzahlungen beginnen einen Monat nach Vertragsabschluss.
- Der Restwert in Höhe von € 900 ist gleichzeitig mit der letzten Rate zu bezahlen.

1) Berechnen Sie den effektiven Jahreszinssatz für dieses Angebot.

- b) Der Elternverein zahlt die Kosten für den Kaffeeautomaten in Höhe von € 5.500 sofort und darf dafür die Einnahmen behalten.

Der Kassier des Elternvereins legt seiner Berechnung folgende Annahmen zugrunde:

- Er rechnet mit 150 Bechern Kaffee pro Tag für 40 Schulwochen zu je 5 Tagen.
- Wareneinsatz pro Becher Kaffee: 30 Cent
- Verkaufspreis pro Becher Kaffee: 45 Cent
- Wartungskosten: € 1.400 pro Jahr
- Nach 4 Jahren soll der Kaffeeautomat um € 900 verkauft werden.

- 1) Tragen Sie die Einnahmen, Ausgaben und Rückflüsse in die nachstehende Tabelle ein.

Jahr	Einnahmen in Euro	Ausgaben in Euro	Rückflüsse in Euro
0			
1			
2			
3			
4			

Der Kassier nimmt einen kalkulatorischen Zinssatz von 1,8 % p. a. an.

- 2) Berechnen Sie den Kapitalwert.

- c) An 80 von insgesamt 200 Schultagen hat Chiara Nachmittagsunterricht.

An Schultagen mit Nachmittagsunterricht trinkt sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % Kaffee, an Schultagen ohne Nachmittagsunterricht beträgt diese Wahrscheinlichkeit 20 %.

- 1) Erstellen Sie für diesen Sachverhalt ein mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten beschriftetes Baumdiagramm.
- 2) Beschreiben Sie ein mögliches Ereignis E im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit folgendermaßen berechnet wird:

$$P(E) = \frac{120}{200} \cdot 0,8 = 0,48$$

- 3) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Chiara heute Nachmittagsunterricht hat unter der Voraussetzung, dass sie heute Kaffee getrunken hat.

Möglicher Lösungsweg

$$\text{a1) } 5500 = 1000 + 100 \cdot \frac{q_{12}^{48} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{48}} + \frac{900}{q_{12}^{48}}$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz: $q_{12} = 1,0087\dots$

$$i = q_{12}^{12} - 1 = 0,1099\dots \approx 11,0 \%$$

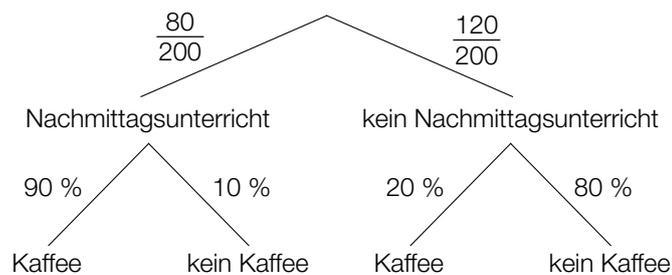
b1)

Jahr	Einnahmen in Euro	Ausgaben in Euro	Rückflüsse in Euro
0		5500	-5500
1	13500	10400	3100
2	13500	10400	3100
3	13500	10400	3100
4	14400	10400	4000

$$\text{b2) } C_0 = 3100 \cdot 1,018^{-1} + 3100 \cdot 1,018^{-2} + 3100 \cdot 1,018^{-3} + 4000 \cdot 1,018^{-4} - 5500 = 7199,487\dots$$

Der Kapitalwert beträgt € 7.199,49.

c1)



c2) Chiara hat keinen Nachmittagsunterricht und trinkt keinen Kaffee.

$$\text{c3) } P(\text{„Nachmittagsunterricht“} | \text{„Kaffee“}) = \frac{\frac{80}{200} \cdot 0,9}{\frac{80}{200} \cdot 0,9 + \frac{120}{200} \cdot 0,2} = 0,75$$

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für den richtigen Ansatz
1 × B: für die richtige Berechnung des effektiven Jahreszinssatzes
- b) 1 × A: für das richtige Eintragen der Einnahmen, Ausgaben und Rückflüsse in der Tabelle
1 × B: für die richtige Berechnung des Kapitalwerts
- c) 1 × A: für das richtige Erstellen des Baumdiagramms
1 × C: für die richtige Beschreibung des Ereignisses E im gegebenen Sachzusammenhang
1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

Mixer*

Aufgabennummer: B_282

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Ein Unternehmen stellt unterschiedliche Typen von Mixern her.

- a) Bei einem Stückpreis von € 65 können 2 000 Stabmixer pro Jahr verkauft werden. Bei einem Verkauf von 2 500 Stabmixern kann ein Erlös in Höhe von € 131.250 pro Jahr erzielt werden.

Der Erlös beim Verkauf der Stabmixer kann durch eine quadratische Funktion E beschrieben werden:

$$E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

x ... Anzahl der verkauften Stabmixer

$E(x)$... Erlös bei x verkauften Stabmixern in €

- 1) Begründen Sie, warum in der Gleichung der Erlösfunktion der Parameter c gleich null sein muss.
 - 2) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a und b der Erlösfunktion.
 - 3) Berechnen Sie die Koeffizienten a und b .
 - 4) Berechnen Sie die Sättigungsmenge.
- b) Der Gewinn beim Verkauf der Handmixer kann durch die Funktion G beschrieben werden.

$$G(x) = -0,1 \cdot x^3 - 1,9 \cdot x^2 + 200 \cdot x - 940$$

x ... Absatzmenge in ME

$G(x)$... Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

- 1) Berechnen Sie die Gewinn Grenzen.
- 2) Ermitteln Sie den maximalen Gewinn.

Durch Veränderungen im Unternehmen können die Fixkosten um 200 GE gesenkt werden.

- 3) Erstellen Sie eine Gleichung der neuen Gewinnfunktion G_1 .

- c) Die Kosten bei der Produktion von Standmixern können durch die Funktion K beschrieben werden.

$$K(x) = 0,04 \cdot x^3 - 2,4 \cdot x^2 + 63 \cdot x + 940$$

x ... Produktionsmenge in ME

$K(x)$... Kosten bei der Produktionsmenge x in GE

- 1) Überprüfen Sie nachweislich, ob der Kostenverlauf bei einer Produktion von 25 ME progressiv oder degressiv ist.
- 2) Kreuzen Sie diejenige Gleichung an, deren Lösung das Betriebsoptimum ist. [1 aus 5]

$0 = 0,04 \cdot x^3 - 2,4 \cdot x^2 + 63 \cdot x + 940$	<input type="checkbox"/>
$0 = 0,12 \cdot x^2 - 4,8 \cdot x + 63$	<input type="checkbox"/>
$0 = 0,24 \cdot x - 4,8$	<input type="checkbox"/>
$0 = 0,04 \cdot x^2 - 2,4 \cdot x + 63 + \frac{940}{x}$	<input type="checkbox"/>
$0 = 0,08 \cdot x - 2,4 - \frac{940}{x^2}$	<input type="checkbox"/>

Möglicher Lösungsweg

a1) Der Parameter c muss null sein, da bei einem Absatz von null Stück auch der Erlös null ist.

a2) Erlös beim Absatz von 2000 Mixern: $2000 \cdot 65 = 130000$

$$E(2000) = 130000$$

$$E(2500) = 131250$$

oder:

$$2000^2 \cdot a + 2000 \cdot b = 130000$$

$$2500^2 \cdot a + 2500 \cdot b = 131250$$

a3) Lösung mittels Technologieeinsatz:

$$a = -\frac{1}{40} = -0,025$$

$$b = 115$$

a4) $E(x) = 0$

oder:

$$-0,025 \cdot x^2 + 115 \cdot x = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 4600$$

Die Sättigungsmenge liegt bei 4600 Stück.

b1) $G(x) = 0$

oder:

$$-0,1 \cdot x^3 - 1,9 \cdot x^2 + 200 \cdot x - 940 = 0$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$x_1 = 5 \text{ ME (untere Gewinngrenze)}$$

$$x_2 = 32,9 \dots \text{ ME} \approx 33 \text{ ME (obere Gewinngrenze)}$$

b2) $G'(x) = 0$

oder:

$$-0,3 \cdot x^2 - 3,8 \cdot x + 200 = 0$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$(x_1 = -32,9\dots)$$

$$x_2 = 20,2\dots$$

$$G(20,2\dots) = 1\,500,504\dots$$

Der maximale Gewinn beträgt rund 1.500,50 GE

b3) $G_1(x) = G(x) + 200 = -0,1 \cdot x^3 - 1,9 \cdot x^2 + 200 \cdot x - 740$

c1) $K'''(x) = 0,24 \cdot x - 4,8$

$$K'''(25) = 1,2 > 0$$

Da die 2. Ableitung für 25 ME positiv ist, ist der Kostenverlauf dort progressiv.

c2)

[...]	
[...]	
[...]	
[...]	
$0 = 0,08 \cdot x - 2,4 - \frac{940}{x^2}$	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel

- a) 1 × D: für die richtige Begründung
 1 × A: für das richtige Erstellen des Gleichungssystems
 1 × B1: für die richtige Berechnung der Koeffizienten a und b
 1 × B2: für die richtige Berechnung der Sättigungsmenge
- b) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Gewinn Grenzen
 1 × B2: für das richtige Ermitteln des maximalen Gewinns
 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der neuen Gewinnfunktion G_1
- c) 1 × D: für die richtige nachweisliche Überprüfung
 1 × C: für das richtige Ankreuzen

Erbschaft*

Aufgabennummer: B_264

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

- a) Armin erhält ein Erbe in Höhe von € 50.000, das in Form von 3 Beträgen in den nächsten 5 Jahren ausbezahlt wird.

Die Höhe der Auszahlungen Z kann mit der nachstehenden Gleichung berechnet werden:

$$50\,000 = \frac{20\,000}{1,03} + \frac{Z}{1,03^3} + \frac{Z}{1,03^5}$$

- 1) Lesen Sie den zugehörigen Jahreszinssatz ab.
- 2) Veranschaulichen Sie alle in der Gleichung vorkommenden Auszahlungen auf der nachstehenden Zeitachse.



- 3) Berechnen Sie die Höhe der Auszahlungen Z .

- b) Jutta hat € 50.000 geerbt. Diesen Betrag legt sie mit einer Verzinsung von 3 % p. a. an.

In den nächsten 5 Jahren will sie nun jeweils am Ende jedes Monats einen gleich hohen Betrag abheben, sodass nach diesen 5 Jahren vom angelegten Geld ein Betrag in Höhe von € 20.000 vorhanden ist.

Jutta überlegt, dass sie monatlich rund $\frac{€ 50.000 - € 20.000}{60} = € 500$ abheben kann.

- 1) Begründen Sie, warum die tatsächlichen Monatsraten größer als € 500 sind.
- 2) Berechnen Sie den zugehörigen äquivalenten Monatszinssatz.
- 3) Berechnen Sie die Höhe dieser tatsächlichen Monatsraten.

c) Auf den unten stehenden Zeitachsen sind Erbschaftsauszahlungen dargestellt.

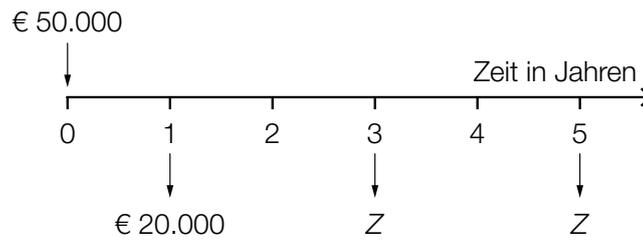
1) Kreuzen Sie diejenige Auszahlungsvariante an, die bei einem positiven Zinssatz den größten Barwert hat. [1 aus 5]

<p style="text-align: right;">Zeit in Jahren</p> <p>Timeline diagram showing annual payments of € 5.000 from year 1 to year 8. The x-axis is labeled 'Zeit in Jahren' and has tick marks from 0 to 8. Arrows point down from each year mark to the value '€ 5.000'.</p>	<input type="checkbox"/>
<p style="text-align: right;">Zeit in Jahren</p> <p>Timeline diagram showing payments of € 10.000 at years 2, 4, 6, and 8. The x-axis is labeled 'Zeit in Jahren' and has tick marks from 0 to 8. Arrows point down from year marks 2, 4, 6, and 8 to the value '€ 10.000'.</p>	<input type="checkbox"/>
<p style="text-align: right;">Zeit in Jahren</p> <p>Timeline diagram showing payments of € 20.000 at years 3 and 7. The x-axis is labeled 'Zeit in Jahren' and has tick marks from 0 to 8. Arrows point down from year marks 3 and 7 to the value '€ 20.000'.</p>	<input type="checkbox"/>
<p style="text-align: right;">Zeit in Jahren</p> <p>Timeline diagram showing payments of € 20.000 at years 4 and 6. The x-axis is labeled 'Zeit in Jahren' and has tick marks from 0 to 8. Arrows point down from year marks 4 and 6 to the value '€ 20.000'.</p>	<input type="checkbox"/>
<p style="text-align: right;">Zeit in Jahren</p> <p>Timeline diagram showing a single payment of € 40.000 at year 5. The x-axis is labeled 'Zeit in Jahren' and has tick marks from 0 to 8. An arrow points down from year mark 5 to the value '€ 40.000'.</p>	<input type="checkbox"/>

Möglicher Lösungsweg

a1) Zinssatz: 3 % p. a.

a2)



a3)
$$50000 = \frac{20000}{1,03} + \frac{Z}{1,03^3} + \frac{Z}{1,03^5}$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$Z = 17202,934\dots$

Die Höhe der Auszahlungen Z beträgt € 17.202,93.

b1) Da das Erbe angelegt und verzinst wird, kann Jutta einen höheren Betrag als monatlich € 500 abheben.

b2) $i_{12} = \sqrt[12]{1,03} - 1 = 0,002466\dots$

Der Monatszinssatz beträgt rund 0,247 %.

b3) $q_{12} = 1 + i_{12}$

$$50000 \cdot 1,03^5 = R \cdot \frac{q_{12}^{60} - 1}{q_{12} - 1} + 20000$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$R = 587,846\dots$

Die Höhe der Monatsraten beträgt € 587,85.

c1)

<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <p>Zeit in Jahren</p> <p>0 1 2 3 4 5 6 7 8</p> <p>↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓</p> <p>€ 5.000 € 5.000 € 5.000 € 5.000 € 5.000 € 5.000 € 5.000 € 5.000</p> </div> <div style="text-align: right; padding-right: 20px;"> <p>→</p> </div> </div>	<input type="checkbox"/>
[...]	
[...]	
[...]	
[...]	

Lösungsschlüssel

- a) 1 × C: für das richtige Ablesen des Jahreszinssatzes
1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Auszahlungen auf der Zeitachse
1 × B: für die richtige Berechnung der Höhe der Auszahlungen Z
- b) 1 × D: für die richtige Begründung
1 × B1: für die richtige Berechnung des äquivalenten Monatszinssatzes
1 × B2: für die richtige Berechnung der Höhe der Monatsraten
- c) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

Maschinenring

Aufgabennummer: B_182

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Vier landwirtschaftliche Betriebe, die Weizen anbauen, haben sich zu einem Maschinenring zusammengeschlossen.

- a) Man geht davon aus, dass der jetzige Mähdrescher noch genau 10 Jahre verwendet werden kann. Daher plant man, dann einen neuen Mähdrescher um einen voraussichtlichen Kaufpreis von € 150.000 zu erwerben.

Für die Anschaffung haben die Betriebe gemeinsam bereits € 30.000 an Rücklagen gebildet und wollen den Rest in Form von vorschüssigen Jahresraten ansparen.

Der Zinssatz wird mit 1,5 % p. a. angenommen.

- Veranschaulichen Sie das Finanzierungskonzept mithilfe einer Zeitlinie.
- Berechnen Sie die Höhe der Jahresraten.

Es wird überlegt, mit der Ratenzahlung erst in 5 Jahren zu beginnen.

- Argumentieren Sie, warum die neuen Raten für die restlichen 5 Jahre in diesem Fall mehr als doppelt so hoch sein müssen, als wenn sofort mit dem Ansparen begonnen wird.

- b) Die nebenstehende Tabelle zeigt die erzielten Preise für Weizen in den Qualitätsstufen A und B für einen Zeitraum von 10 Jahren.

Der Zusammenhang der Preise zwischen den Weizenqualitäten A und B wird mithilfe der linearen Regression untersucht.

Jahr	Preis pro 1 000 kg	
	A	B
1	€ 98	€ 112
2	€ 108	€ 117
3	€ 88	€ 101
4	€ 82	€ 97
5	€ 105	€ 116
6	€ 189	€ 202
7	€ 135	€ 165
8	€ 91	€ 106
9	€ 184	€ 205
10	€ 157	€ 186

- Erstellen Sie eine Gleichung der Regressionsgeraden.
- Interpretieren Sie die Bedeutung eines Korrelationskoeffizienten von $r = 0,989$ im gegebenen Sachzusammenhang.
- Stellen Sie die Punkte und die Regressionsgerade in einem passenden Koordinatensystem grafisch dar.

c) Die Landwirte des Maschinenrings diskutieren über die Begriffe *Betriebsoptimum* und *Betriebsminimum*.

– Ordnen Sie den beiden Begriffen jeweils die korrekte Aussage aus A bis D zu. [2 zu 4]

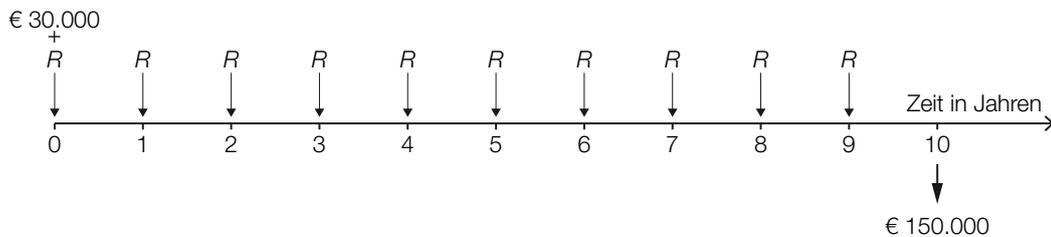
Betriebsoptimum		A	Hier spielen die Fixkosten keine Rolle.
Betriebsminimum		B	Hier erzielt man den höchsten Erlös.
		C	Hier sind die Durchschnittskosten am kleinsten.
		D	Hier steigt der Gewinn am stärksten.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) R ... Höhe einer Jahresrate in €



$$q = 1,015$$

$$30000 \cdot q^{10} + R \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1} \cdot q = 150000 \Rightarrow R \approx \text{€ } 10.603,06$$

Die Höhe der Jahresraten beträgt € 10.603,06.

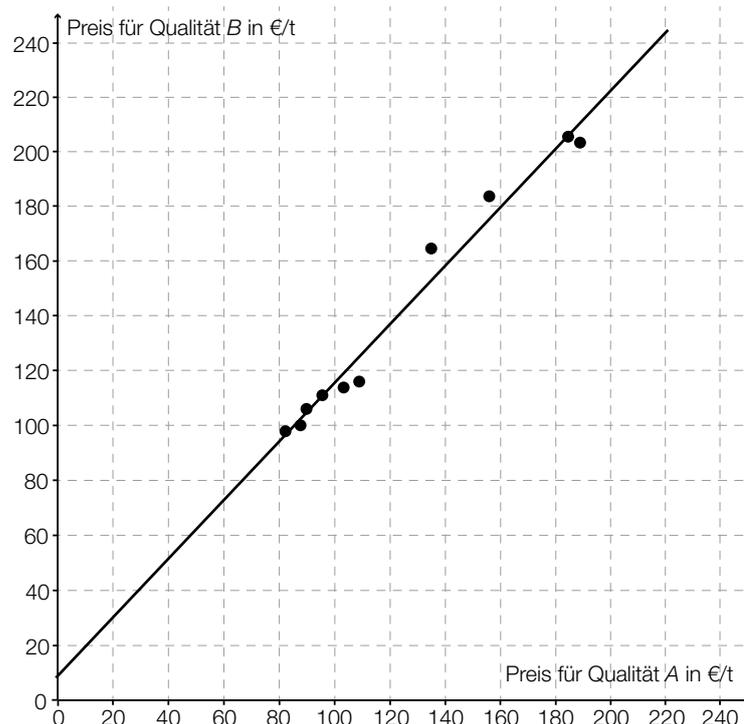
Wenn die Raten genau doppelt so hoch wären, wäre die Summe der bezahlten Raten zwar gleich hoch, der Endwert der 5-jährigen Rente aber niedriger, weil die Verzinsungen der ersten 5 Raten fehlten. Um den gleichen Wert zu erhalten, müssen die Raten daher mehr als doppelt so hoch sein.

b) $y = 1,08 \cdot x + 7,32$ (Parameter gerundet)

x ... Preis für Qualität A in €/t

y ... Preis für Qualität B in €/t

Der Korrelationskoeffizient liegt nahe bei 1 und lässt daher einen ziemlich starken positiven linearen Zusammenhang zwischen den Preisen für die Qualitätsstufen A und B vermuten.



c)

Betriebsoptimum	<i>C</i>
Betriebsminimum	<i>A</i>

A	Hier spielen die Fixkosten keine Rolle.
B	Hier erzielt man den höchsten Erlös.
C	Hier sind die Durchschnittskosten am kleinsten.
D	Hier steigt der Gewinn am stärksten.

Klassifikation

- Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) 5 Stochastik
- c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) D Argumentieren und Kommunizieren, B Operieren und Technologieeinsatz
- b) C Interpretieren und Dokumentieren
- c) —

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) leicht
- c) mittel

Punkteanzahl:

- a) 3
- b) 3
- c) 1

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Traktoren-Steuerung

Aufgabennummer: B_183

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Ein Großunternehmen hat eine spezielle GPS-unterstützte Steuerung für Traktoren entwickelt und verkauft diese direkt.

- a) Für die Produktion von Ersatzteilen der Steuerung sind die Kostenfunktion K und die Erlösfunktion E bekannt:

$$K(x) = 0,001 \cdot x^3 - 0,03 \cdot x^2 + x + 70\,000$$

$$E(x) = -5 \cdot x^2 + 3\,000 \cdot x$$

x ... Anzahl produzierter bzw. verkaufter Stück

$K(x)$... Gesamtkosten bei x produzierten Stück in Euro

$E(x)$... Erlös bei x verkauften Stück in Euro

- Berechnen Sie diejenige Anzahl von Ersatzteilen, bei der der maximale Gewinn erzielt wird.
- Erstellen Sie eine Gleichung der Preis-Absatz-Funktion p .
- Beschreiben Sie, wie man unter Verwendung der gegebenen Kosten- und Erlösfunktion den Cournot'schen Punkt ermitteln kann.

Der Cournot'sche Punkt befindet sich bei $(x_c | 1\,610)$.

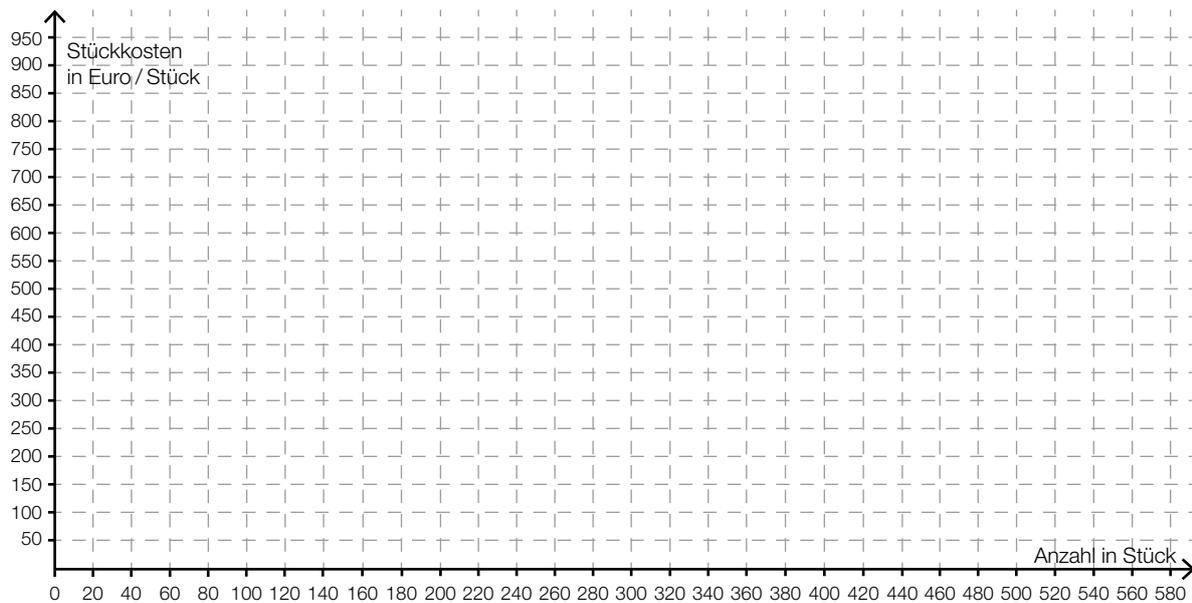
- Interpretieren Sie die Koordinaten des Cournot'schen Punktes im gegebenen Sachzusammenhang.

b) Für die Produktion von Ersatzteilen der Steuerung werden die Stückkosten durch die folgende Funktion \bar{K} beschrieben:

$$\bar{K}(x) = 0,001 \cdot x^2 - 0,03 \cdot x + 1 + \frac{70000}{x}$$

x ... Anzahl produzierter Stück

$\bar{K}(x)$... Stückkosten bei x produzierten Stück in Euro/Stück



- Zeichnen Sie den Graphen der Stückkostenfunktion in das obige Koordinatensystem ein.
- Markieren Sie in der obigen Abbildung das Betriebsoptimum.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $G(x) = -0,001 \cdot x^3 - 4,97 \cdot x^2 + 2999 \cdot x - 70000$

$$G'(x) = -0,003 \cdot x^2 - 9,94 \cdot x + 2999$$

$$G'(x) = 0 \Rightarrow x = 278,3\dots$$

Das Gewinnmaximum liegt bei 278 Stück.

$$p(x) = -5 \cdot x + 3000$$

Ermittlung der Gewinnfunktion G als Differenz von Erlös- und Kostenfunktion:

$$G(x) = E(x) - K(x)$$

Berechnung der Maximumstelle x_C von G :

Lösen der Gleichung $G(x_C) = 0$ (wobei $G'(x_C) < 0$ gelten muss)

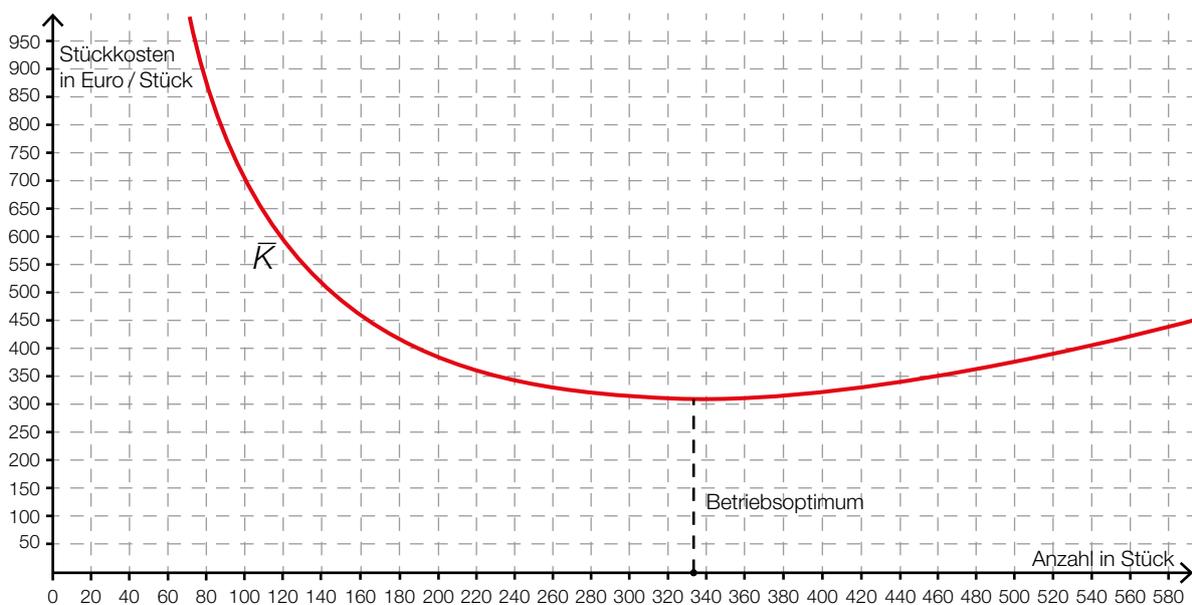
x_C ist die x -Koordinate des Cournot'schen Punktes.

Ermittlung der Preis-Absatz-Funktion p aus der Erlösfunktion: $p(x) = \frac{E(x)}{x}$

Der Funktionswert $p(x_C)$ ist die y -Koordinate des Cournot'schen Punktes.

Der maximale Gewinn wird bei Produktion und Verkauf von x_C Stück zum Preis von € 1.610 pro Stück erzielt.

b)



Toleranzbereich für das Einzeichnen des Betriebsoptimums: [310; 350]

Klassifikation

- Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 4 Analysis
- b) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) C Interpretieren und Dokumentieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz, A Modellieren und Transferieren
- b) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) leicht

Punkteanzahl:

- a) 4
- b) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: –

Produktion von Golfschlägern

Aufgabennummer: B_303

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Ein Unternehmen produziert und verkauft Golfschläger.

a) Durch Marktforschung konnten folgende Verkaufsdaten ermittelt werden:

Nachfrage in Stück	240	310	400	500
Preis in €/Stk.	230	217	203	182

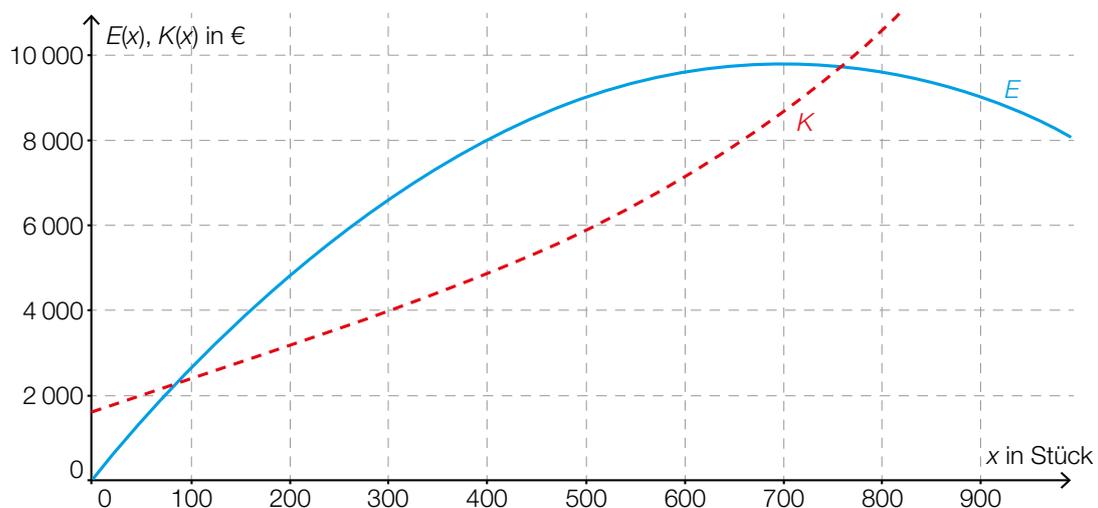
Auf Grundlage dieser Daten soll eine Preisfunktion der Nachfrage p_N mit $p_N(x) = a \cdot x + b$ ermittelt werden.

x ... Anzahl der Golfschläger in Stück

$p_N(x)$... Preis bei einer Nachfrage von x Stück in Euro pro Stück (€/Stk.)

- Ermitteln Sie mithilfe von Regression eine Gleichung der Funktion p_N .
- Interpretieren Sie die Parameter a und b der Preisfunktion der Nachfrage p_N im gegebenen Sachzusammenhang.

b) Für einen speziellen Golfschläger sind die Graphen der Erlösfunktion E und der Kostenfunktion K dargestellt:



- Beschreiben Sie, wie Sie aus der obigen Grafik die Gewinngrenzen ermitteln können.
- Beschreiben Sie, wie Sie aus der obigen Grafik diejenige Stückzahl ermitteln können, für die der Gewinn maximal ist.

- c) Von einer Golfschlägerproduktion sind die Gewinnfunktion G und die Preisfunktion der Nachfrage p_N bekannt.

$$G(x) = -0,0001 \cdot x^3 - 0,17 \cdot x^2 + 200 \cdot x - 16000$$

$$p_N(x) = -0,2 \cdot x + 280$$

x ... Anzahl der Golfschläger in Stück

$G(x)$... Gewinn bei x Stück in €

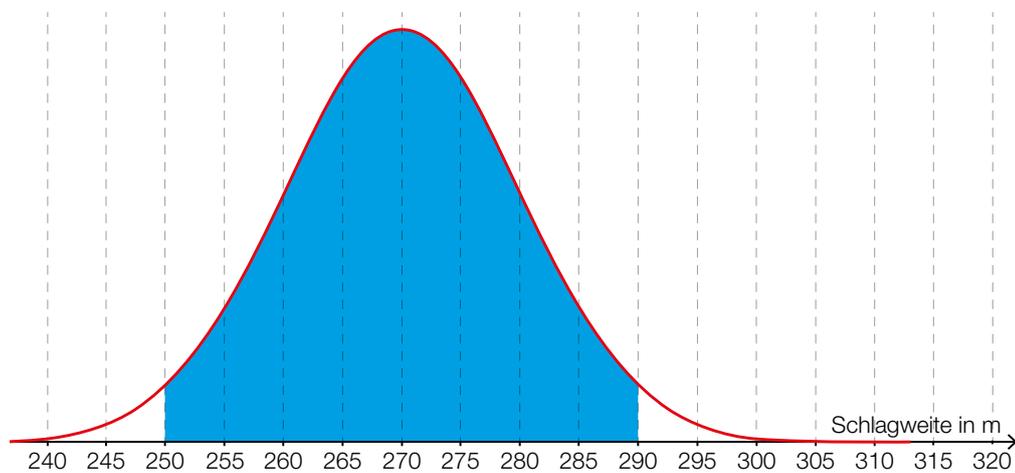
$p_N(x)$... Preis bei x Stück in €/Stk.

– Berechnen Sie den Cournot'schen Punkt.

d) Von einem Roboter wird ein Schlägertest durchgeführt. Dabei wird ein Ball abgeschlagen und die dabei erzielte Schlagweite gemessen. Die Schlagweite wird als annähernd normalverteilt mit $\mu = 270$ m und $\sigma = 10$ m angenommen. Liegt die Schlagweite bei einem getesteten Schläger unter einer bestimmten Grenze, wird er aussortiert.

- Berechnen Sie, welche Schlagweite als Grenze angesetzt wurde, wenn 7 % der Schläger aussortiert werden.

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion dargestellt.



- Kreuzen Sie die korrekte Beschreibung des dunkel hinterlegten Bereichs an. [1 aus 5]

der Anteil der Schläger, deren Schlagweite mindestens um $\pm 2 \cdot \sigma$ vom Erwartungswert abweicht	<input type="checkbox"/>
der Anteil der Schläger, deren Schlagweite genau um $\pm 2 \cdot \sigma$ vom Erwartungswert abweicht	<input type="checkbox"/>
der Anteil der Schläger, deren Schlagweite genau um $\pm 4 \cdot \sigma$ vom Erwartungswert abweicht	<input type="checkbox"/>
der Anteil der Schläger, deren Schlagweite höchstens um $\pm 2 \cdot \sigma$ vom Erwartungswert abweicht	<input type="checkbox"/>
der Anteil der Schläger, deren Schlagweite höchstens um $\pm 4 \cdot \sigma$ vom Erwartungswert abweicht	<input type="checkbox"/>

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

- a) Ermittlung der Funktionsgleichung mittels Technologieeinsatz:

$$p_N(x) = -0,18 \cdot x + 273,98 \quad (\text{Parameter gerundet})$$

Interpretation der Parameter:

$a \approx -0,18$: Bei einer Preissenkung um € 0,18 pro Stück steigt die Nachfrage um 1 Stück.

$b \approx 273,98$: Der Höchstpreis beträgt € 273,98.

- b) Die Gewinngrenzen sind diejenigen Stückzahlen, bei denen die Graphen der Kostenfunktion und der Erlösfunktion einander schneiden.

Man misst, bei welcher Stückzahl der senkrechte Abstand zwischen den Graphen der Kostenfunktion und der Erlösfunktion innerhalb der Gewinngrenzen am größten ist.

- c) denjenigen x -Wert, für den $G'(x) = 0$ ist, in p_N einsetzen

Cournot'scher Punkt: (427,20... | 194,55...) bzw., falls die x -Koordinate auf ganze Stück gerundet wird: (427 | 194,6)

- d) X ... Schlagweite in m

$$P(X \leq a) = 0,07 \Rightarrow a = 255,2\dots$$

Die Grenze der Schlagweite liegt bei rund 255 m.

	<input type="checkbox"/>
	<input type="checkbox"/>
	<input type="checkbox"/>
der Anteil der Schläger, deren Schlagweite höchstens um $\pm 2 \cdot \sigma$ vom Erwartungswert abweicht	<input checked="" type="checkbox"/>
	<input type="checkbox"/>

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 5 Stochastik
- b) 4 Analysis
- c) 4 Analysis
- d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

- a) 4 Analysis
- b) —
- c) —
- d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) C Interpretieren und Dokumentieren
- c) B Operieren und Technologieeinsatz
- d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) C Interpretieren und Dokumentieren
- b) —
- c) —
- d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) mittel
- c) mittel
- d) mittel

Punkteanzahl:

- a) 2
- b) 2
- c) 1
- d) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Ansparplan*

Aufgabennummer: B_185

Technologieeinsatz:

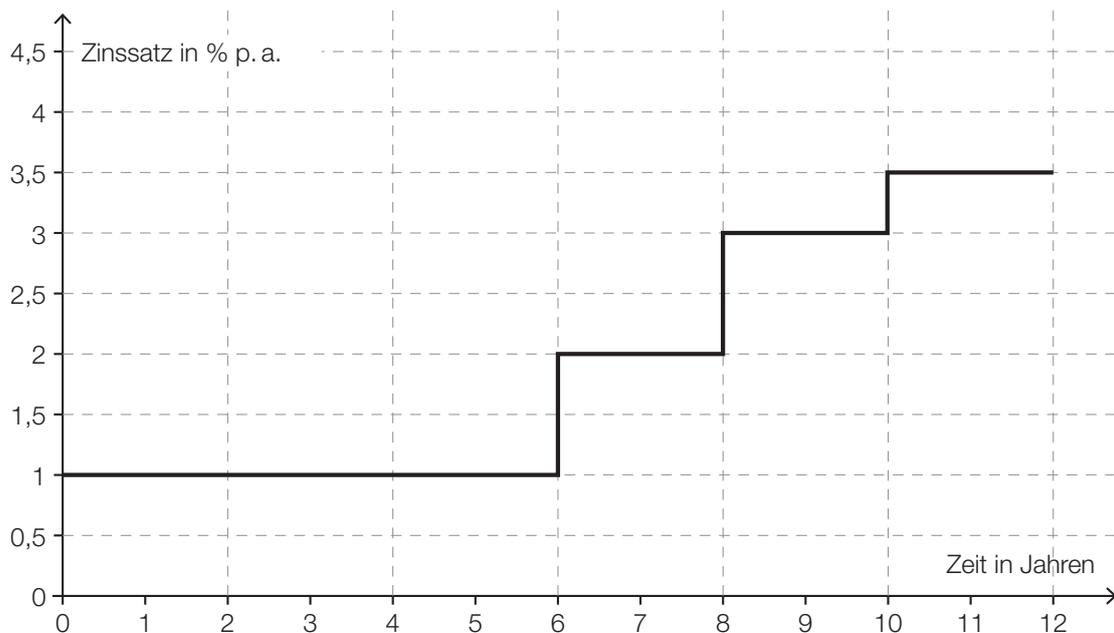
möglich

erforderlich

Monika möchte in den nächsten 12 Jahren € 20.000 ansparen.

Im Folgenden wird die Kapitalertragsteuer nicht berücksichtigt.

- a) Monika betrachtet das Angebot einer Bank für eine Wohnbaurleihe mit einer Laufzeit von 12 Jahren (siehe nachstehende Grafik). Die jährliche Verzinsung steigt dabei im Laufe der Jahre an.



- 1) Lesen Sie aus der obigen Grafik die Höhe und die Dauer der jährlichen Zinssätze ab.
 - 2) Berechnen Sie den mittleren jährlichen Zinssatz.
 - 3) Berechnen Sie die Höhe desjenigen Betrags, den Monika jetzt anlegen muss, um ihr Sparziel von € 20.000 in 12 Jahren zu erreichen.
- b) Auf einem Sparbuch bietet die Bank für 12 Jahre einen fixen Zinssatz von 2 % p. a. Um ihr Sparziel von € 20.000 in 12 Jahren zu erreichen, könnte Monika sofort € 8.000 einlegen und 2 gleich hohe Einzahlungen Z nach 3 Jahren und nach insgesamt 8 Jahren tätigen.
- 1) Veranschaulichen Sie Monikas Zahlungsplan und das Sparziel auf einer Zeitachse.
 - 2) Berechnen Sie die Höhe der Einzahlung Z .

c) Monika überlegt, 12 Jahre lang zu Beginn jedes Jahres einen gleich hohen Betrag einzuzahlen, um ihr Sparziel von € 20.000 in 12 Jahren bei einem fixen Zinssatz von 2 % p. a. zu erreichen.

1) Berechnen Sie die Höhe des jährlichen Einzahlungsbetrags R .

Sie überlegt, nicht zu Beginn jedes Jahres den Jahresbetrag einzuzahlen, sondern zu Beginn jedes Monats $\frac{1}{12}$ des Jahresbetrags.

2) Argumentieren Sie, dass sie ihr Sparziel damit nicht in der vorgesehenen Zeit erreicht.

Möglicher Lösungsweg

a1) Die Anleihe wird die ersten 6 Jahre zu 1 % p. a., dann 2 Jahre zu 2 % p. a., 2 Jahre zu 3 % p. a. und schließlich 2 Jahre zu 3,5 % p. a. verzinst.

$$a2) (1 + i)^{12} = 1,01^6 \cdot 1,02^2 \cdot 1,03^2 \cdot 1,035^2 \Rightarrow i = 0,0191\dots$$

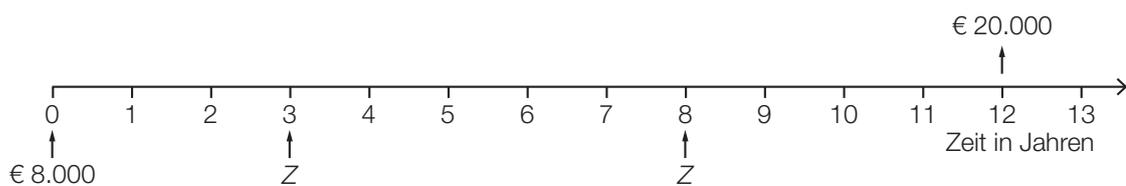
Der mittlere jährliche Zinssatz beträgt rund 1,9 %.

(Eine Berechnung des mittleren jährlichen Zinssatzes als gewichtetes arithmetisches Mittel ist als falsch zu werten.)

$$a3) \frac{20000}{1,01^6 \cdot 1,02^2 \cdot 1,03^2 \cdot 1,035^2} = 15934,786\dots$$

Monika muss € 15.934,79 anlegen, damit sie in 12 Jahren € 20.000 angespart hat.

b1)



$$b2) 8000 \cdot 1,02^{12} + Z \cdot 1,02^9 + Z \cdot 1,02^4 = 20000 \Rightarrow Z = 4326,655\dots$$

Die Höhe einer Einzahlung Z beträgt € 4.326,66.

$$c1) 20000 = R \cdot \frac{1,02^{12} - 1}{0,02} \cdot 1,02 \Rightarrow R = 1461,952\dots$$

Der jährliche Ansparbetrag beträgt € 1.461,95.

c2) Sie wird damit ihr Sparziel nicht erreichen, da die Zahlungen großteils später erfolgen und sie somit weniger Zinsen erhält.

Lösungsschlüssel

- a1) 1 × C: für das richtige Ablesen der Zinssätze und der Verzinsungsdauer
- a2) 1 × B1: für die richtige Berechnung des mittleren jährlichen Zinssatzes
(Eine Berechnung des mittleren jährlichen Zinssatzes als gewichtetes arithmetisches Mittel ist als falsch zu werten.)
- a3) 1 × B2: für die richtige Berechnung der Höhe des Betrags

- b1) 1 × A1: für das richtige Veranschaulichen auf einer Zeitachse
- b2) 1 × A2: für einen richtigen Ansatz
1 × B: für die richtige Berechnung der Höhe der Zahlung Z

- c1) 1 × B: für die richtige Berechnung des jährlichen Ansparbetrags
- c2) 1 × D: für die richtige Argumentation

Verkehrsbetriebe*

Aufgabennummer: B_294

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Städtische Verkehrsbetriebe analysieren ihre Einnahmen.

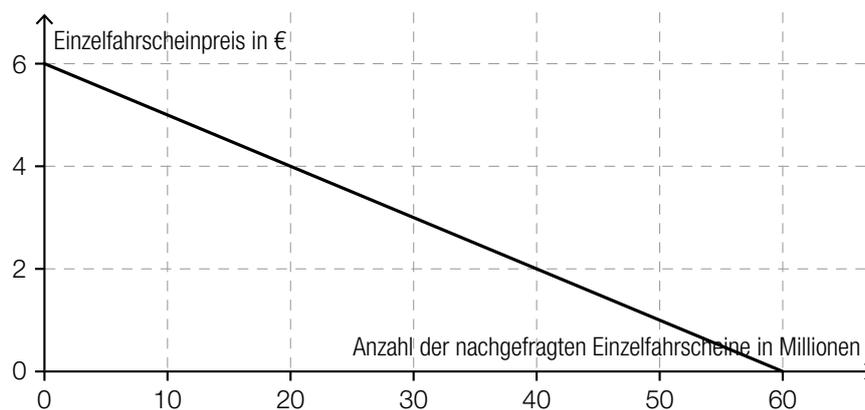
- a) In der Stadt A können die Einnahmen der Verkehrsbetriebe durch den Verkauf von Einzelfahrscheinen modellhaft durch die folgende Erlösfunktion E beschrieben werden:

$$E(x) = -0,1 \cdot x^2 + 6,6 \cdot x$$

x ... Anzahl der verkauften Einzelfahrscheine in Millionen

$E(x)$... Erlös beim Verkauf von x Einzelfahrscheinen in Millionen Euro

- 1) Berechnen Sie den maximal möglichen Erlös in Euro.
 - 2) Erstellen Sie eine Funktionsgleichung der zugehörigen Preisfunktion der Nachfrage.
 - 3) Ermitteln Sie den zum maximalen Erlös führenden Einzelfahrscheinpreis in Euro.
- b) In der Stadt B wird ein linearer Zusammenhang zwischen dem Einzelfahrscheinpreis in Euro und der Anzahl der nachgefragten Einzelfahrscheine in Millionen angenommen. Dieser Zusammenhang ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



- 1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Höchstpreis ab.
- 2) Beschreiben Sie die Bedeutung der Sättigungsmenge im gegebenen Sachzusammenhang.

- c) In der Stadt C wird modellhaft angenommen, dass der Zusammenhang zwischen dem Einzelfahrscheinpreis in Euro und der Anzahl der nachgefragten Einzelfahrschein in Millionen durch eine quadratische Funktion p beschrieben werden kann.

$$p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

x ... Anzahl der nachgefragten Einzelfahrschein in Millionen

$p(x)$... Einzelfahrscheinpreis bei x nachgefragten Einzelfahrschein in Euro

Bei einem Einzelfahrscheinpreis von € 1,60 werden 50 Millionen Einzelfahrschein nachgefragt. Bei einem Einzelfahrscheinpreis von € 1,80 werden 48 Millionen Einzelfahrschein nachgefragt. Der Höchstpreis wird mit € 7,80 angenommen.

- 1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Funktion p .
- 2) Berechnen Sie die Koeffizienten von p .

Möglicher Lösungsweg

a1) $E'(x) = -0,2 \cdot x + 6,6$

$$E'(x) = 0$$

$$0 = -0,2 \cdot x + 6,6$$

$$x = 33$$

$$E(33) = 108,9$$

Der maximale Erlös beträgt € 108,9 Millionen.

(Der Graph von E ist eine nach unten offene Parabel. Die Nullstelle der Ableitungsfunktion E' ist also eine Maximumstelle.)

a2) $p(x) = -0,1 \cdot x + 6,6$

a3) $p(33) = 3,3$

Bei einem Einzelfahrscheinpreis von € 3,30 ist der Erlös maximal.

b1) Höchstpreis: € 6

b2) Die Sättigungsmenge ist diejenige Anzahl an nachgefragten Einzelfahrscheinen in Millionen, wenn der Einzelfahrscheinpreis € 0 beträgt.

c1) $p(0) = 7,8$

$$p(48) = 1,8$$

$$p(50) = 1,6$$

oder:

$$7,8 = c$$

$$1,8 = 2304 \cdot a + 48 \cdot b + c$$

$$1,6 = 2500 \cdot a + 50 \cdot b + c$$

c2) Lösung des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:

$$a = 0,0005; \quad b = -0,149; \quad c = 7,8$$

Lösungsschlüssel

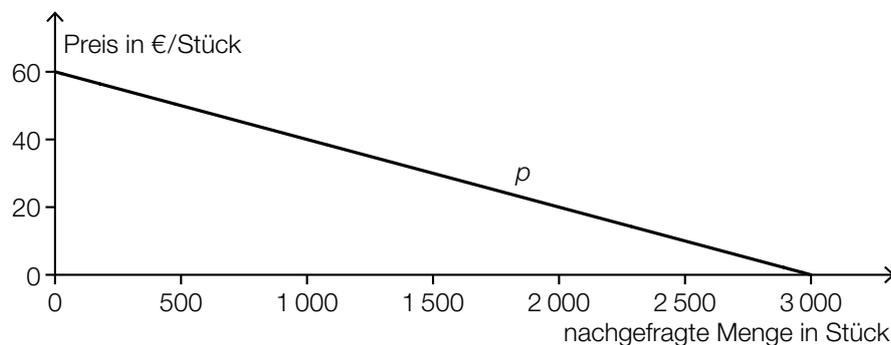
- a1) 1 × B1: für die richtige Berechnung des maximalen Erlöses
(Die Zahl 108,9 allein als Lösung ist nicht als richtig zu werten.
Dass es sich bei der Nullstelle von E' um eine Maximumstelle handelt, muss
weder überprüft noch argumentativ begründet werden.)
- a2) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung
- a3) 1 × B2: für das richtige Ermitteln des Einzelfahrscheinpreises bei maximalem Erlös
- b1) 1 × C1: für das richtige Ablesen des Höchstpreises
- b2) 1 × C2: für die richtige Beschreibung der Sättigungsmenge im gegebenen Sachzusammenhang
- c1) 1 × A: für das richtige Erstellen des Gleichungssystems
- c2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten

Betonrohre*

Aufgabennummer: B_452

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

- a) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Preisfunktion der Nachfrage p für Betonrohre des Modells A dargestellt.



- 1) Erstellen Sie mithilfe der obigen Abbildung eine Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage p .
- 2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung von p im gegebenen Sachzusammenhang.

Die Betonrohre des Modells A werden um € 32 pro Stück verkauft.

- 3) Berechnen Sie die zugehörige Anzahl der nachgefragten Betonrohre des Modells A.

- b) Für Betonrohre des Modells B geht man von einer kubischen Gewinnfunktion G aus.

x ... Absatzmenge in ME

$G(x)$... Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

- 1) Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils die zutreffende Gleichung aus A bis D zu.
 [2 zu 4]

Der Break-even-Point liegt bei 200 ME.	
Das Gewinnmaximum liegt bei 200 ME.	

A	$G(0) = 200$
B	$G(200) = 0$
C	$G'(200) = 0$
D	$G''(200) = 0$

* ehemalige Klausuraufgabe

- c) Für Betonrohre des Modells *C* geht man von einer kubischen Kostenfunktion *K* aus.

$$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

x ... Produktionsmenge in ME

K(x) ... Kosten bei der Produktionsmenge *x* in GE

Die Fixkosten betragen 150 GE.

Bei einer Produktion von 20 ME ergeben sich Kosten von 530 GE.

Bei einer Produktion von 10 ME ergeben sich Grenzkosten von 17 GE/ME.

Bei einer Produktion von 30 ME ergeben sich Stückkosten von 22 GE/ME.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten *a*, *b*, *c* und *d*.

2) Berechnen Sie diese Koeffizienten.

- d) Der Durchmesser von Betonrohren des Modells *D* kann als annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 100$ mm angenommen werden. Bei 3 % der Rohre ist der Durchmesser kleiner als 98 mm.

1) Berechnen Sie die zugehörige Standardabweichung σ .

Möglicher Lösungsweg

a1) $p(x) = -\frac{1}{50} \cdot x + 60$

x ... nachgefragte Menge in Stück

$p(x)$... Preis bei der nachgefragten Menge x in €/Stück

a2) Die Steigung $-\frac{1}{50}$ gibt an, dass eine Preisreduktion um € 1 pro Stück zu einer Erhöhung der nachgefragten Menge um 50 Stück führt.

oder:

Soll die nachgefragte Menge um 1 Stück gesteigert werden, muss der Preis um € 0,02 pro Stück gesenkt werden.

a3) $p(x) = 32$ oder $-\frac{1}{50} \cdot x + 60 = 32 \Rightarrow x = 1\,400$

Bei einem Preis von € 32 pro Stück ist mit einer nachgefragten Menge von 1 400 Stück zu rechnen.

b1)

Der Break-even-Point liegt bei 200 ME.	B
Das Gewinnmaximum liegt bei 200 ME.	C

A	$G(0) = 200$
B	$G(200) = 0$
C	$G'(200) = 0$
D	$G''(200) = 0$

c1) $K'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$
 $\bar{K}(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c + \frac{d}{x}$

$$K(0) = 150$$

$$K(20) = 530$$

$$K'(10) = 17$$

$$\bar{K}(30) = 22$$

oder:

$$d = 150$$

$$a \cdot 20^3 + b \cdot 20^2 + c \cdot 20 + d = 530$$

$$3 \cdot a \cdot 10^2 + 2 \cdot b \cdot 10 + c = 17$$

$$a \cdot 30^2 + b \cdot 30 + c + \frac{d}{30} = 22$$

c2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$a = 0,02$$

$$b = -1,2$$

$$c = 35$$

$$d = 150$$

d1) X ... Durchmesser in mm

$$P(X < 98) = 0,03$$

Berechnung von σ mittels Technologieeinsatz:

$$\sigma = 1,06\dots$$

Die Standardabweichung beträgt rund 1,1 mm.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage

a2) 1 × C: für die richtige Interpretation des Wertes der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang

a3) 1 × B: für die richtige Berechnung der Anzahl der nachgefragten Betonrohre

b1) 1 × C: für die richtige Zuordnung

c1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der beiden Gleichungen mithilfe der Kosten

1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung mithilfe der Grenzkosten

1 × A3: für das richtige Erstellen der Gleichung mithilfe der Stückkosten

c2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten

d1) 1 × B: für die richtige Berechnung der Standardabweichung

Küchenkauf*

Aufgabennummer: B_453

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Frau Tomić will eine neue Küche um € 30.000 kaufen.

a) Um sich die Küche leisten zu können, hat sie vor 7 Jahren, vor 4 Jahren und vor 1 Jahr jeweils € 3.000 auf ein Sparbuch mit fixem Zinssatz eingezahlt. Nun befinden sich € 10.000 auf dem Sparbuch.

1) Berechnen Sie den zugrunde liegenden Jahreszinssatz.

Bei diesem Sparvorgang wurden jährlich 25 % Kapitalertragssteuer (KESt) abgezogen.

2) Berechnen Sie den Jahreszinssatz des Sparbuchs vor Abzug der KESt.

b) Frau Tomić benötigt für den Kauf der Küche einen Kredit in Höhe von € 20.000. Ein Bekannter von Frau Tomić bietet an, ihr das Geld zu einem fixen Zinssatz von 4 % p. a. zu leihen. Für die Rückzahlung vereinbaren sie, dass am Ende des 1. Semesters nur die Zinsen zu bezahlen sind, danach sind Semesterraten in Höhe von jeweils € 2.000 fällig.

1) Berechnen Sie den äquivalenten Semesterzinssatz.

2) Vervollständigen Sie die Zeilen für die Semester 1 und 2 des nachstehenden Tilgungsplans.

Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Semesterrate	Restschuld
0	---	---	---	€ 20.000
1				
2				

3) Erklären Sie, warum die folgende Behauptung richtig ist: „Eine Verdoppelung der Semesterrate führt nicht zu einer Verdoppelung des Tilgungsanteils.“

c) Für einen Kredit in Höhe von € 20.000 holt Frau Tomić ein Angebot von einer Bank ein. Die Bank schlägt für die Rückzahlung nachschüssige Jahresraten in Höhe von jeweils € 3.000 bei einem Jahreszinssatz i vor.

1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Restschuld S nach t Jahren.

$S =$ _____

Möglicher Lösungsweg

a1) $3000 \cdot (1 + i)^7 + 3000 \cdot (1 + i)^4 + 3000 \cdot (1 + i) = 10000$

$i = 0,02617\dots$

Der zugrunde liegende Jahreszinssatz beträgt rund 2,62 %.

a2) $\frac{0,02617\dots}{0,75} = 0,0349\dots$

Der Jahreszinssatz vor Abzug der KEST beträgt rund 3,5 %.

b1) $i_2 = \sqrt{1,04} - 1 = 0,01980\dots$

Der äquivalente Semesterzinssatz beträgt rund 1,98 %.

b2)

Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Semesterrate	Restschuld
0	---	---	---	€ 20.000
1	€ 396,08	€ 0	€ 396,08	€ 20.000
2	€ 396,08	€ 1.603,92	€ 2.000	€ 18.396,08

b3) Der Tilgungsanteil berechnet sich aus der Differenz von Semesterrate und Zinsanteil. Wenn die Semesterrate verdoppelt wird, bleibt der Zinsanteil trotzdem gleich hoch. Somit ist der neue Tilgungsanteil mehr als doppelt so hoch wie der alte Tilgungsanteil.

c1) $S = 20000 \cdot (1 + i)^t - 3000 \cdot \frac{(1 + i)^t - 1}{i}$

oder:

$S = 20000 \cdot q^t - 3000 \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1}$ mit $q = 1 + i$

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Jahreszinssatzes

a2) 1 × B2: für die richtige Berechnung des Jahreszinssatzes vor Abzug der KEST

b1) 1 × B1: für die richtige Berechnung des äquivalenten Semesterzinssatzes

b2) 1 × B2: für das richtige Vervollständigen der Zeile für das Semester 1 des Tilgungsplans

1 × B3: für das richtige Vervollständigen der Zeile für das Semester 2 des Tilgungsplans

b3) 1 × D: für die richtige Erklärung

c1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel

Speiseeis*

Aufgabennummer: B_455

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Ein Restaurant stellt nach eigener Rezeptur Speiseeis für Nachspeisen her.

Aus den 6 Rohstoffen Milch, Obers, Eier, Zucker, Schokolade und Vanille werden die 2 Zwischenprodukte Schokoladeeis und Vanilleeis hergestellt.

Die Mengen in Gramm für die Herstellung jeweils einer Portion Eis sind in der nachstehenden Tabelle angegeben.

	Schokoladeeis Z_1	Vanilleeis Z_2
Milch R_1	10	25
Obers R_2	40	30
Eier R_3	20	15
Zucker R_4	5	10
Schokolade R_5	20	0
Vanille R_6	0	10

Das Schokoladeeis und das Vanilleeis werden für die Nachspeisen Früchtebecher und Bananensplit verwendet.

Die dazu jeweils benötigten Eisportionen sind in der nachstehenden Tabelle angegeben.

	Früchtebecher E_1	Bananensplit E_2
Schokoladeeis Z_1	2	0
Vanilleeis Z_2	1	3

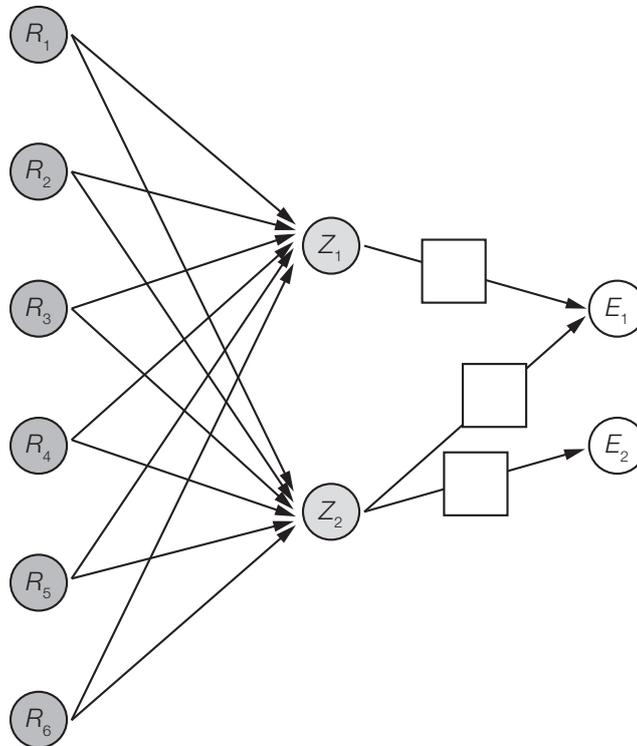
Die Verflechtung, die den Bedarf an Rohstoffen für jeweils eine Nachspeise angibt, kann durch die Matrix V beschrieben werden.

a) 1) Ermitteln Sie die Matrix V .

Das Restaurant benötigt täglich 50 Früchtebecher und 30 Bananensplits.

2) Ermitteln Sie denjenigen Vektor \vec{r} , der den täglichen Bedarf an Rohstoffen angibt.

b) Die Verflechtung kann auch durch einen Gozinto-Graphen dargestellt werden.



1) Tragen Sie im obigen unvollständigen Gozinto-Graphen die fehlenden Zahlen in die entsprechenden Kästchen ein.

c) Die Preise für die Rohstoffe können in einem Vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{pmatrix}$ zusammengefasst werden.

1) Beschreiben Sie, was durch den Ausdruck $\vec{p}^T \cdot \mathbf{V}$ im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird.

2) Kreuzen Sie die richtige Zeilen- und Spaltenanzahl der Matrix $\vec{p}^T \cdot \mathbf{V}$ an. [1 aus 5]

1×2-Matrix	<input type="checkbox"/>
2×1-Matrix	<input type="checkbox"/>
2×6-Matrix	<input type="checkbox"/>
6×1-Matrix	<input type="checkbox"/>
6×2-Matrix	<input type="checkbox"/>

- d) Nach einer längeren Lagerung der Milch und der Eier besteht die Gefahr, dass diese Rohstoffe zu einem bestimmten Zeitpunkt t verdorben sind.

A bezeichnet das Ereignis, dass die Milch zum Zeitpunkt t verdorben ist. Das Ereignis A tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 % ein.

B bezeichnet das Ereignis, dass die Eier zum Zeitpunkt t verdorben sind. Das Ereignis B tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 2 % ein.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 % sind beide Rohstoffe zum Zeitpunkt t verdorben.

Die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Ereignisse können in einer Vierfeldertafel dargestellt werden.

- 1) Vervollständigen Sie die nachstehende Vierfeldertafel so, dass sie den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt.

	A	nicht A	Summe
B			
nicht B			
Summe			

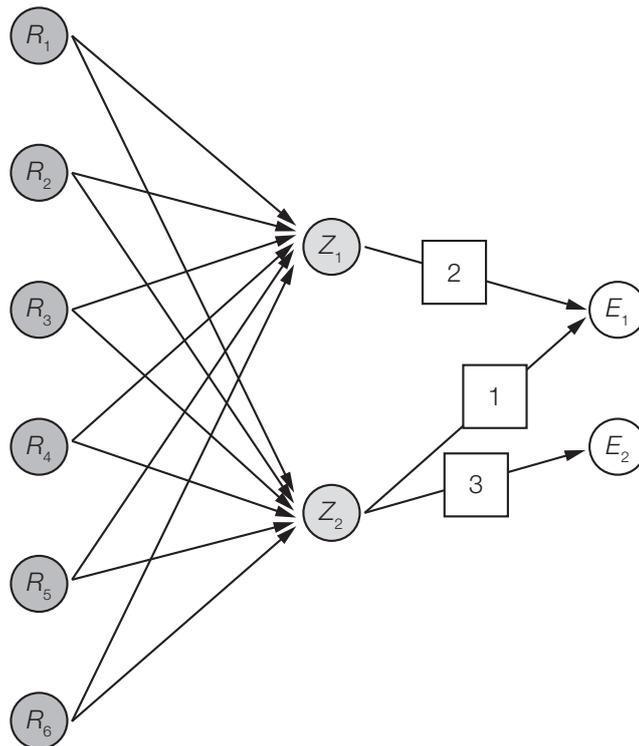
- 2) Zeigen Sie, dass die beiden Ereignisse A und B voneinander abhängig sind.

Möglicher Lösungsweg

$$\text{a1) } \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 10 & 25 \\ 40 & 30 \\ 20 & 15 \\ 5 & 10 \\ 20 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 75 \\ 110 & 90 \\ 55 & 45 \\ 20 & 30 \\ 40 & 0 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}$$

$$\text{a2) } \vec{r} = \begin{pmatrix} 45 & 75 \\ 110 & 90 \\ 55 & 45 \\ 20 & 30 \\ 40 & 0 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4500 \\ 8200 \\ 4100 \\ 1900 \\ 2000 \\ 1400 \end{pmatrix}$$

b1)



c1) Es werden die Rohstoffkosten für eine Portion Früchtebecher und für eine Portion Bananensplit berechnet.

c2)

1×2-Matrix	<input checked="" type="checkbox"/>

d1)

	A	nicht A	Summe
B	0,005	0,015	0,02
nicht B	0,005	0,975	0,98
Summe	0,01	0,99	

d2) $P(A) \cdot P(B) = 0,01 \cdot 0,02 = 0,0002$

$$P(A \cap B) = 0,005$$

Da $P(A) \cdot P(B) \neq P(A \cap B)$ ist, sind die Ereignisse A und B voneinander abhängig.

Lösungsschlüssel

- a1) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Matrix V
- a2) 1 × B2: für das richtige Ermitteln des Vektors \vec{r}
- b1) 1 × A: für das richtige Eintragen der fehlenden Zahlen im Gozinto-Graphen
- c1) 1 × C1: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang
- c2) 1 × C2: für das richtige Ankreuzen
- d1) 1 × A: für das richtige Vervollständigen der Vierfeldertafel
- d2) 1 × D: für den richtigen Nachweis der Abhängigkeit der Ereignisse

Malerarbeiten

Aufgabennummer: B_212

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Die Innenwände eines Hotels sollen in den Farben Weiß, Rot, Hellrosa, Dunkelrosa, Hellviolett und Dunkelviolett ausgemalt werden. Der Malermeister kauft für dieses Vorhaben die Farben Weiß, Rot und Blau ein. Alle anderen Farbtöne werden selbst gemischt.

- a) Die nachstehende Tabelle gibt einen Überblick, welche Menge in Kilogramm von den Farben Weiß, Rot und Blau zur Herstellung von jeweils 1 kg der Farben Hellrosa, Dunkelrosa, Hellviolett und Dunkelviolett benötigt werden.

	Hellrosa	Dunkelrosa	Hellviolett	Dunkelviolett
Weiß	0,6	0,5	0,32	0,4
Rot	0,4	0,5	0,08	0,1
Blau	0	0	0,6	0,5

– Veranschaulichen Sie die Verflechtung der Farbmengen in einem Gozinto-Graphen.

- b) Die nachstehende Tabelle gibt einen Überblick, welche Mengen in Kilogramm von den Farben Weiß und Rot zur Herstellung von jeweils 1 kg der Farben Hellrosa und Dunkelrosa benötigt werden.

	Hellrosa	Dunkelrosa
Weiß	0,6	0,5
Rot	0,4	0,5

Der Malermeister benötigt für das Ausmalen der Wände der Gästezimmer insgesamt 240 kg Weiß und 310 kg Rot, wobei er 100 kg Weiß und 200 kg Rot direkt auf die Wände aufträgt. Die jeweilige Restmenge dient zur Herstellung der Farben Hellrosa und Dunkelrosa.

- Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der hergestellten Mengen Hellrosa und Dunkelrosa.
– Berechnen Sie die jeweils hergestellte Menge an Hellrosa und Dunkelrosa.

- c) Für das Ausmalen der Funktionsräume des Hotels werden insgesamt 956 kg weiße, 424 kg rote und 170 kg blaue Farbe benötigt. Die Farben können nicht in beliebigen Mengen, sondern in Kübeln bestimmter Füllmenge gekauft werden. Es liegt folgende Berechnung vor:

$$\begin{pmatrix} 956 \\ 424 \\ 170 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{25} = \begin{pmatrix} 38,24 \\ 16,96 \\ 6,8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 39 \\ 17 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot 25 - \begin{pmatrix} 956 \\ 424 \\ 170 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- Interpretieren Sie die einzelnen Rechenschritte und das Ergebnis der Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

- d) Der Hotelbesitzer fordert einen Kostenvoranschlag für die anstehenden Malerarbeiten. Der Malermeister erstellt folgende Übersicht:

Materialkosten:

	Farbmenge in kg	Preis in € pro kg
Weiß	n_1	p_1
Rot	n_2	p_2
Blau	n_3	p_3

Lohnkosten: L €

Insgesamt werden 5 % Rabatt gewährt.

Es sollen die Gesamtkosten K berechnet werden.

- Kreuzen Sie die richtige Formel an. [1 aus 5]

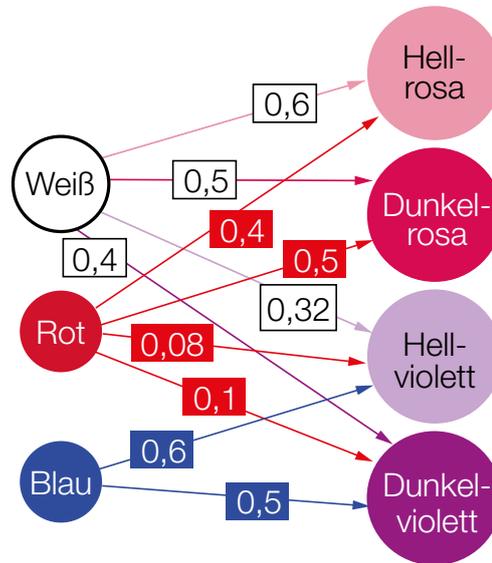
$K = [(n_1 \ n_2 \ n_3) \cdot (p_1 \ p_2 \ p_3) + L] \cdot 0,95$	<input type="checkbox"/>
$K = [(n_1 \ n_2 \ n_3) \cdot (p_1 \ p_2 \ p_3)^T + L] \cdot 0,95$	<input type="checkbox"/>
$K = [(n_1 \ n_2 \ n_3)^T \cdot (p_1 \ p_2 \ p_3)^{-1} + L] \cdot 0,95$	<input type="checkbox"/>
$K = [(n_1 \ n_2 \ n_3)^{-1} \cdot (p_1 \ p_2 \ p_3) + L] \cdot 0,95$	<input type="checkbox"/>
$K = [(n_1 \ n_2 \ n_3)^{-1} \cdot (p_1 \ p_2 \ p_3)^T + L] \cdot 0,95$	<input type="checkbox"/>

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



- b) x ... hergestellte Menge Hellrosa in kg
 y ... hergestellte Menge Dunkelrosa in kg

$$0,6 \cdot x + 0,5 \cdot y = 140$$

$$0,4 \cdot x + 0,5 \cdot y = 110$$

Lösung des Gleichungssystems: $x = 150$ und $y = 100$

Es werden 150 kg Hellrosa und 100 kg Dunkelrosa hergestellt.

(Die Berechnung kann auch mithilfe von Matrizen erfolgen.)

- c) Der Malermeister kauft die Farben in Kübeln zu je 25 kg ein. Er berechnet die Anzahl der jeweils benötigten Farbkübel und berechnet durch Subtraktion der benötigten Farbmengen die verbleibenden Restmengen.

Es bleiben 19 kg Weiß, 1 kg Rot und 5 kg Blau übrig.

d)

[...]	
$K = [(n_1 \ n_2 \ n_3) \cdot (p_1 \ p_2 \ p_3)^T + L] \cdot 0,95$	<input checked="" type="checkbox"/>
[...]	
[...]	
[...]	

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 2 Algebra und Geometrie
- b) 2 Algebra und Geometrie
- c) 2 Algebra und Geometrie
- d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —
- d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren
- b) A Modellieren und Transferieren
- c) C Interpretieren und Dokumentieren
- d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) —
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) —
- d) —

Schwierigkeitsgrad:

- a) leicht
- b) leicht
- c) mittel
- d) mittel

Punkteanzahl:

- a) 1
- b) 2
- c) 2
- d) 1

Thema: Alltag

Quellen: —

Interneteinkäufe

Aufgabennummer: B_216

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Das Einkaufen im Internet erfreut sich immer größerer Beliebtheit.

a) Ein Marktforschungsinstitut führte eine Umfrage unter 5 000 Personen über ihr Einkaufsverhalten durch. Unter den Befragten befanden sich 3 000 Frauen. Die Umfrage ergab, dass 3 450 aller Befragten, davon 1 050 Männer, Einkäufe im Internet erledigen.

– Interpretieren Sie den nachstehend berechneten Prozentsatz im gegebenen Sachzusammenhang.

$$\frac{3450 - 1050}{3000} = 80 \%$$

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte befragte Person, die im Internet Einkäufe erledigt, eine Frau ist.

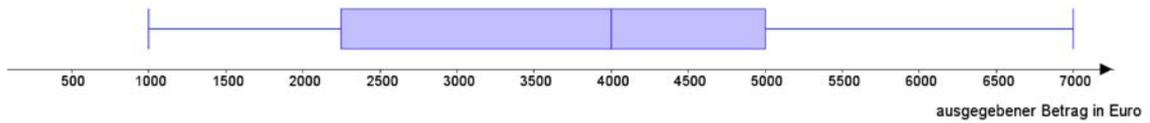
b) Ein Versandhaus bietet seinen Internetkunden die Möglichkeit, ihre Rechnung durch Ratenzahlung zu begleichen. Die Rückzahlung erfolgt monatlich vorschüssig. Die erste Rate ist einen Monat nach Kaufabschluss fällig.

– Erklären Sie, warum der als vorschüssig angegebene Rückzahlungsmodus auch als nachschüssige Rente aufgefasst werden kann.

Ein Betrag von € 250 wird durch 23 Monatsraten beglichen. Die ersten 22 Raten betragen jeweils € 13, die letzte Rate € 17,22.

– Berechnen Sie den effektiven Jahreszinssatz, der diesem Zahlungsmodus zugrunde liegt.

c) Ein Internethändler hat untersucht, um welchen Geldbetrag seine Stammkunden jährlich bei ihm einkaufen. Es wurde dazu folgender Boxplot erstellt.



– Kreuzen Sie die nicht zutreffende Aussage an. [1 aus 5]

Kauft ein Stammkunde um € 6.000 ein, so zählt der ausgegebene Geldbetrag zu den 25 % der höchsten Beträge.	<input type="checkbox"/>
Kein Stammkunde kauft um weniger als € 1.000 ein.	<input type="checkbox"/>
Mindestens 75 % der Stammkunden kaufen um maximal € 5.000 ein.	<input type="checkbox"/>
Kein Stammkunde kauft um mehr als € 7.000 ein.	<input type="checkbox"/>
50 % der Stammkunden kaufen um genau € 4.000 ein.	<input type="checkbox"/>

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) 80 % ist der Prozentsatz derjenigen befragten Frauen, die im Internet Einkäufe erledigen.

$$P(\text{„Frau“} | \text{„Interneteinkäufe“}) = \frac{P(\text{„Frau und Interneteinkäufe“})}{P(\text{„Interneteinkäufe“})} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{2400}{3000}}{\frac{3}{5} \cdot \frac{2400}{3000} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1050}{2000}}$$

$$= 0,6956\dots$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte befragte Person, die im Internet Einkäufe erledigt, eine Frau ist, beträgt rund 69,6 %.

b) In der Finanzmathematik fallen der Beginn des 2. Monats und das Ende des 1. Monats zusammen. Man kann daher die vorschüssige Rente mit Beginn im 2. Monat gleichsetzen mit einer nachschüssigen Rente mit Beginn zum Zeitpunkt 0 = Kaufabschluss.

q_{12} ... monatlicher Aufzinsungsfaktor

$$250 = 13 \cdot \frac{q_{12}^{22} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{22}} + \frac{17,22}{q_{12}^{23}}$$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$$q_{12} = 1,0165\dots$$

$$i_{\text{eff}} = q_{12}^{12} - 1 = 0,21716\dots$$

Der effektive Jahreszinssatz beträgt rund 21,72 % p. a.

c)

[...]	
[...]	
[...]	
[...]	
50 % der Stammkunden kaufen um genau € 4.000 ein.	<input checked="" type="checkbox"/>

Klassifikation

- Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 5 Stochastik
- b) 3 Funktionale Zusammenhänge
- c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

- a) 1 Zahlen und Maße
- b) —
- c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) C Interpretieren und Dokumentieren
- b) D Argumentieren und Kommunizieren
- c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) —

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) schwer
- c) leicht

Punkteanzahl:

- a) 2
- b) 2
- c) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Handyverkauf

Aufgabennummer: B_218

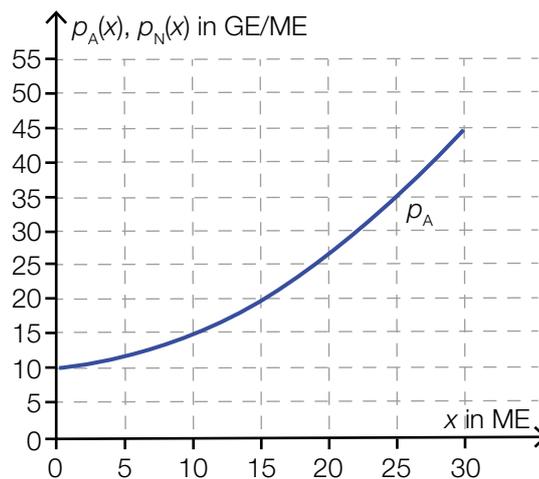
Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Anlässlich der Herstellung eines neuen Handymodells untersucht ein Konzern die mit den bisherigen Handymodellen gemachten Erfahrungen am Markt. Geldbeträge werden dabei in Geldeinheiten (GE) und die Anzahl der Handys in Mengeneinheiten (ME) angegeben.

- a) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Preisfunktion des Angebots p_A eines bestimmten Handymodells dargestellt. Die Preisfunktion der Nachfrage p_N dieses Modells kann mithilfe einer linearen Funktion beschrieben werden. Der Höchstpreis liegt bei 50 GE/ME. Der Markt ist bei 25 ME gesättigt.



- Zeichnen Sie den Graphen der Preisfunktion der Nachfrage in die obige Abbildung ein.
- Lesen Sie den Marktpreis ab.

- b) Der erzielbare Gewinn für ein Handymodell kann mithilfe der Funktion G beschrieben werden:

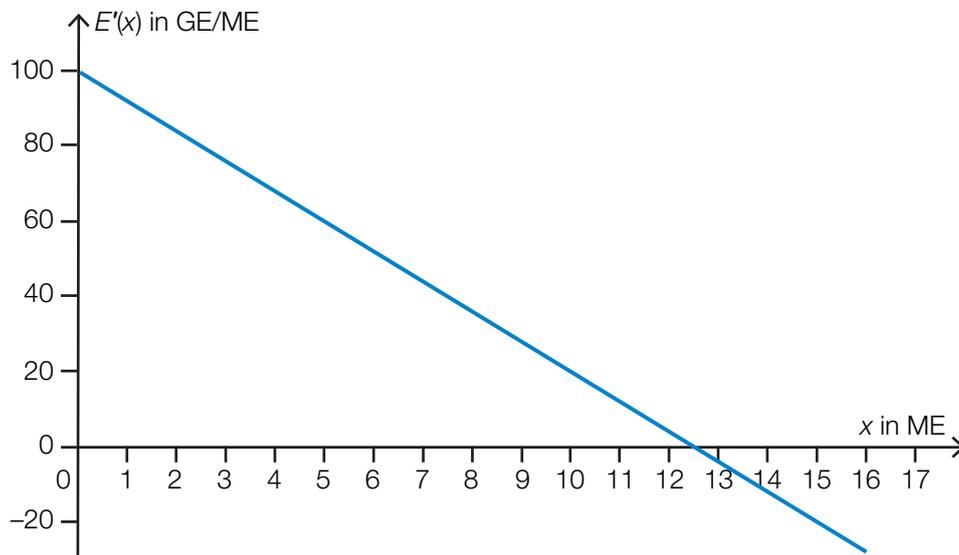
$$G(x) = -0,1 \cdot x^3 - 0,2 \cdot x^2 + 175 \cdot x - 1750$$

x ... verkaufte Menge in ME

$G(x)$... erzielter Gewinn in GE beim Verkauf von x ME

- Berechnen Sie, ab welcher Verkaufsmenge Gewinn erzielt wird.
- Berechnen Sie den maximal erzielbaren Gewinn.

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Grenzerlösfunktion E' für den Verkauf eines anderen Handymodells dargestellt.

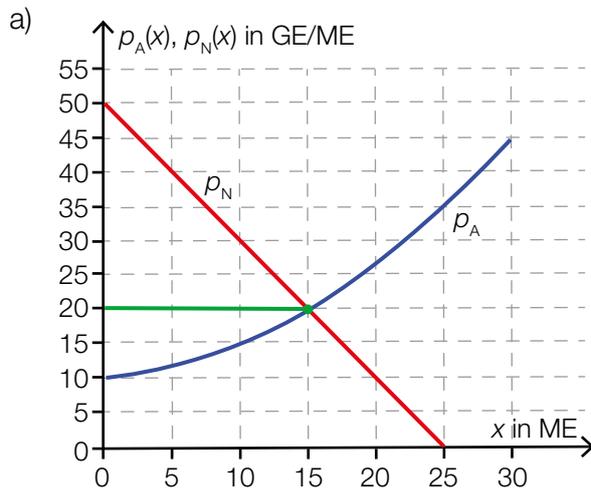


- Lesen Sie aus der Abbildung diejenige Verkaufsmenge ab, bei der der maximale Erlös erwirtschaftet wird.
- Erklären Sie, wie man ohne Integration mithilfe der Abbildung den maximalen Erlös berechnen kann.
- Berechnen Sie den maximalen Erlös.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg



- b) Lösen der Gleichung $G(x) = 0$ mittels Technologieeinsatz:
 $(x_1 = -47,073\dots); x_2 = 10,868; x_3 = 34,204\dots$
 Ab einer Verkaufsmenge von rund 10,87 ME wird Gewinn erzielt.

$$G'(x) = -0,3 \cdot x^2 - 0,4 \cdot x + 175$$

Für die Verkaufsmenge des maximalen Gewinns gilt: $G'(x) = 0$

Lösen der Gleichung mittels Technologieeinsatz: $x = 23,494\dots$

$$G(23,494\dots) = 954,262\dots$$

Der maximale Gewinn beträgt rund 954,26 GE.

- c) Die Stelle des maximalen Erlöses entspricht der Nullstelle der Grenzerlösfunktion.
 Der maximale Erlös wird bei $x = 12,5$ ME erwirtschaftet.

Die Höhe des maximalen Erlöses entspricht dem Flächeninhalt unter dem Graphen der Grenzerlösfunktion bis zur Nullstelle der Funktion. Dieser kann (ohne Integration) als Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks berechnet werden.

$$\text{Die Fläche ist ein rechtwinkeliges Dreieck: } A = \frac{100 \cdot 12,5}{2} = 625$$

Der maximale Erlös beträgt also 625 GE.

Klassifikation

- Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 4 Analysis
- b) 4 Analysis
- c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) 2 Algebra und Geometrie

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) C Interpretieren und Dokumentieren
- b) —
- c) D Argumentieren und Kommunizieren, B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

- a) leicht
- b) leicht
- c) mittel

Punkteanzahl:

- a) 2
- b) 2
- c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Kekse

Aufgabennummer: B_219

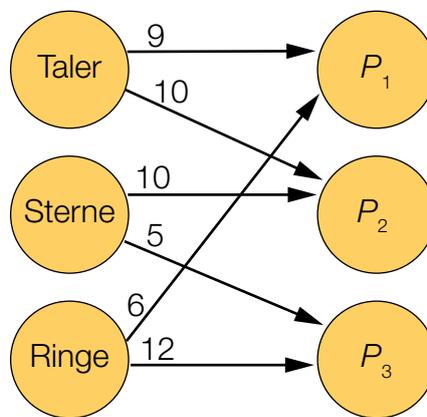
Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

In einer Keksfabrik werden talerförmige, sternförmige und ringförmige Kekse produziert.

- a) Die produzierten Kekse werden abschließend in verschiedenen Packungen P_1 , P_2 und P_3 zusammengestellt und verkauft.



- Beschreiben Sie die im Gozinto-Graphen dargestellten Verflechtungen mithilfe einer quadratischen Matrix \mathbf{A} .
 - Interpretieren Sie die Bedeutung des Elements a_{23} dieser Matrix im gegebenen Sachzusammenhang.
- b) Ein Supermarkt bestellt 100 Stück Taler, 150 Stück Sterne und 170 Stück Ringe. Außerdem werden n Packungen der Keksmischung M_1 und doppelt so viele Packungen der Keksmischung M_2 angefordert. Die 3×2 -Matrix \mathbf{B} gibt an, wie viel Stück Taler, Sterne und Ringe jeweils in den Mischungen M_1 und M_2 enthalten sind.
- Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der für die Bestellung des Supermarkts insgesamt zu produzierenden Taler, Sterne und Ringe.
 - Geben Sie an, wie viele Zeilen und Spalten die Ergebnismatrix dieser Berechnung hat.

- c) Die nachstehende Tabelle gibt die Verflechtung für die Herstellung zweier Packungssorten P_4 und P_5 an.

	P_4	P_5
Taler	10	10
Sterne	5	4
Ringe	12	6

Es werden 50 Packungen P_4 und 30 Packungen P_5 zusammengestellt.

– Berechnen Sie, wie viele Taler, Sterne und Ringe dafür nötig sind.

- d) Die Produktion eines Kekses kostet unabhängig von dessen Form 5 Cent. Die Matrix \mathbf{C} gibt die Anzahl der benötigten Taler, Sterne und Ringe für zwei unterschiedliche Packungen P_6 und P_7 an.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 5 & 4 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$$

Es wird folgende Berechnung durchgeführt:

$$\mathbf{K} = 0,05 \cdot \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 5 & 4 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,2 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$$

– Interpretieren Sie die Bedeutung der Matrix \mathbf{K} im gegebenen Sachzusammenhang.

Aus der Matrix \mathbf{P} sollen ohne weitere Berechnungen die Produktionskosten für eine Packung P_6 und die Produktionskosten für eine Packung P_7 abgelesen werden können.

– Berechnen Sie die Matrix \mathbf{P} .

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

- a) Werden die Rohstoffe waagrecht in der Reihenfolge Taler, Sterne, Ringe und die Packungen senkrecht aufgetragen, ergibt sich folgende Matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 5 \\ 6 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Auch eine Vertauschung von Zeilen und Spalten sowie eine andere Reihenfolge der Kekssorten ist möglich.

Das Element a_{23} steht in der 2. Zeile und 3. Spalte und hat den Wert 5. Es gibt die Anzahl der in den Packungen P_3 enthaltenen Sterne an.

$$\text{b) } \mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \begin{pmatrix} n \\ 2 \cdot n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 170 \end{pmatrix}$$

Die Ergebnismatrix \mathbf{X} hat 3 Zeilen und 1 Spalte.

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 5 & 4 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800 \\ 370 \\ 780 \end{pmatrix}$$

Man benötigt 800 Stück Taler, 370 Stück Sterne und 780 Stück Ringe.

- d) Die Matrix \mathbf{K} gibt an, wie viel die Produktion der in den Packungen vorhandenen unterschiedlichen Kekssorten jeweils kostet.

$$\mathbf{P} = (0,05 \quad 0,05 \quad 0,05) \cdot \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 5 & 4 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} = (1,35 \quad 1)$$

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 2 Algebra und Geometrie
- b) 2 Algebra und Geometrie
- c) 2 Algebra und Geometrie
- d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

- a) –
- b) –
- c) –
- d) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren
- b) A Modellieren und Transferieren
- c) B Operieren und Technologieeinsatz
- d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) C Interpretieren und Dokumentieren
- b) C Interpretieren und Dokumentieren
- c) –
- d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

- a) leicht
- b) mittel
- c) leicht
- d) mittel

Punkteanzahl:

- a) 2
- b) 2
- c) 1
- d) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: –

Autokauf (1)*

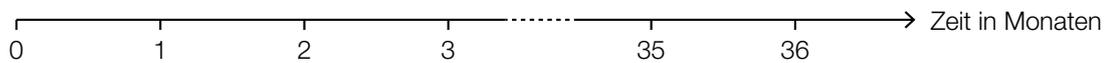
Aufgabennummer: B_459

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Frau Kopecek möchte ein neues Auto mit einem Listenpreis von € 17.100 kaufen. Dabei stehen verschiedene Finanzierungsmöglichkeiten zur Auswahl.

a) Ein Händler verlangt eine Anzahlung von € 3.420 und 36 nachschüssige Monatsraten zu je € 380.

1) Veranschaulichen Sie die Zahlungen und den Listenpreis auf der nachstehenden Zeitachse.



Der Händler behauptet, dass es sich bei dieser Finanzierung um eine „Null-Prozent-Finanzierung“ handelt.

Unter einer „Null-Prozent-Finanzierung“ versteht man, dass keine Zinsen verrechnet werden.

2) Zeigen Sie, dass die Behauptung des Händlers richtig ist.

b) Bei „Drittelfinanzierung“ muss Frau Kopecek sofort, am Ende des 2. Jahres und am Ende des 3. Jahres jeweils einen gleich hohen Betrag R bezahlen. Der Zinssatz beträgt 2 % p. a.

1) Erstellen Sie eine Gleichung zur Berechnung von R .

2) Berechnen Sie R .

- c) Bei einer anderen Finanzierung werden am Ende des 1. Jahres und am Ende des 2. Jahres jeweils € 6.000 bezahlt. Der Zinssatz beträgt 1,5 % p. a.

- 1) Vervollständigen Sie den nachstehenden Tilgungsplan für die Jahre 1 und 2.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	---	---	---	€ 17.100
1				
2				

- 2) Berechnen Sie die Höhe der Restzahlung, mit der die Schuld am Ende des 3. Jahres vollständig getilgt ist.

- d) Bei Barzahlung gewährt der Händler 8 % Preisnachlass vom Listenpreis.

- 1) Berechnen Sie den Preis des Autos bei Barzahlung.

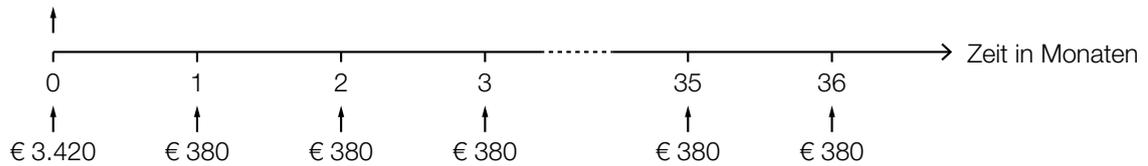
Bei einer Ratenfinanzierung verlangt der Händler eine Anzahlung von € 3.420 sowie 36 nachschüssige Monatsraten zu je € 380.

Barzahlung und Ratenfinanzierung sind bei einem bestimmten Jahreszinssatz gleichwertig.

- 2) Berechnen Sie diesen Jahreszinssatz.

Möglicher Lösungsweg

a1) € 17.100



a2) $3420 + 36 \cdot 380 = 17100$

Die Summe aller Zahlungen ergibt den Listenpreis. Daher ist die Behauptung des Händlers richtig.

b1) $17100 = R + \frac{R}{1,02^2} + \frac{R}{1,02^3}$

b2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$R = 5889,461\dots$$

Es müssen jeweils € 5.889,46 bezahlt werden.

c1)

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	---	---	---	€ 17.100
1	€ 256,50	€ 5.743,50	€ 6.000,00	€ 11.356,50
2	€ 170,35	€ 5.829,65	€ 6.000,00	€ 5.526,85

c2) $5526,85 \cdot 1,015 = 5609,75$

Die Höhe der Restzahlung beträgt € 5.609,75.

d1) $17100 \cdot 0,92 = 15732$

Bei Barzahlung beträgt der Preis des Autos € 15.732.

d2) $15732 = 3420 + 380 \cdot \frac{q_{12}^{36} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{36}}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$q_{12} = 1,0058\dots$$

$$i = q_{12}^{12} - 1 = 0,0719\dots$$

Der Jahreszinssatz ist rund 7,2 %.

Lösungsschlüssel

- a1) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Zahlungen und des Listenpreises auf der Zeitachse
- a2) 1 × D: für den richtigen Nachweis
- b1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung zur Berechnung von R
- b2) 1 × B: für die richtige Berechnung von R
- c1) 1 × A: für das richtige Vervollständigen der beiden Zeilen des Tilgungsplans
- c2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Höhe der Restzahlung
- d1) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Preises bei Barzahlung
- d2) 1 × A: für den richtigen Ansatz
1 × B2: für die richtige Berechnung des Jahreszinssatzes

Zeitschriften (2)*

Aufgabennummer: B_463

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

- a) Die Kosten für die Produktion der Sport-Zeitschrift *Bike and Run* können durch eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion K modelliert werden:

$$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + 79$$

x ... Produktionsmenge in ME

$K(x)$... Kosten bei der Produktionsmenge x in GE

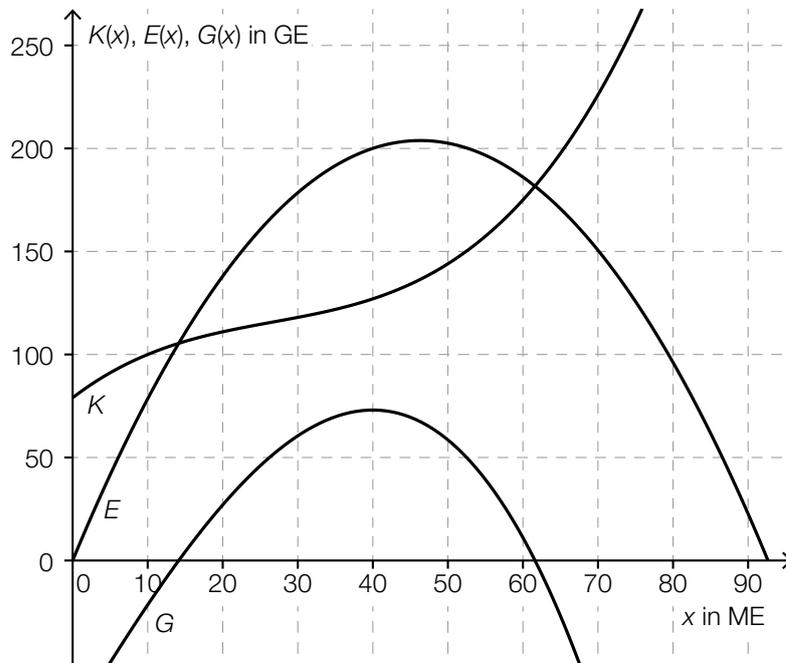
Bei einer Produktion von 10 ME betragen die Kosten 100 GE und die Grenzkosten 1,5 GE/ME.

- 1) Erstellen Sie die beiden Gleichungen, die diesem Sachverhalt entsprechen.

Weiters gilt: $K''(10) = -0,1$

- 2) Interpretieren Sie das Vorzeichen von $K''(10)$ in Bezug auf den Verlauf des Funktionsgraphen von K .
- 3) Ermitteln Sie die Koeffizienten a , b und c der Kostenfunktion K .

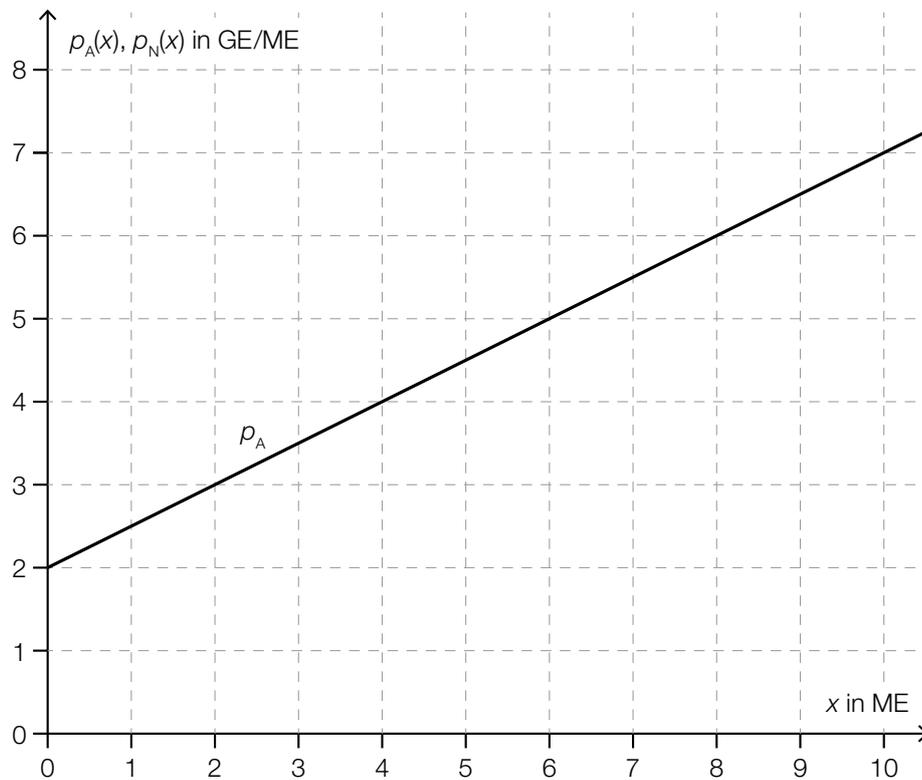
- b) In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Kostenfunktion K , der Graph der Erlösfunktion E und der Graph der Gewinnfunktion G für die Zeitschrift *Adventure* dargestellt.



Bei einer bestimmten Absatzmenge ist der Gewinn maximal.

- 1) Ermitteln Sie den Preis der Zeitschrift *Adventure* bei dieser Absatzmenge.

- c) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der linearen Preisfunktion des Angebots p_A für ein Produkt dargestellt.



Hinsichtlich der Nachfrage ist bekannt: Bei einem Preis von 6 GE/ME können 2 ME abgesetzt werden. Bei einem Preis von 3 GE/ME können 6 ME abgesetzt werden.

Die Preisfunktion der Nachfrage p_N soll durch eine lineare Funktion modelliert werden.

- 1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen von p_N ein.
- 2) Interpretieren Sie die 2. Koordinate des Schnittpunkts von p_A und p_N im gegebenen Sachzusammenhang.

d) Von einer linearen Preisfunktion der Nachfrage kennt man den Höchstpreis p_h und die Sättigungsmenge x_s .

1) Kreuzen Sie den zutreffenden Ausdruck für die Steigung der Preisfunktion der Nachfrage an. [1 aus 5]

$\frac{p_h}{x_s}$	<input type="checkbox"/>
$-\frac{p_h}{x_s}$	<input type="checkbox"/>
$\frac{x_s}{p_h}$	<input type="checkbox"/>
$-\frac{x_s}{p_h}$	<input type="checkbox"/>
$\frac{p_h - x_s}{x_s}$	<input type="checkbox"/>

Möglicher Lösungsweg

a1) $K'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

$$K(10) = 100$$

$$K'(10) = 1,5$$

oder:

$$10^3 \cdot a + 10^2 \cdot b + 10 \cdot c + 79 = 100$$

$$3 \cdot 10^2 \cdot a + 2 \cdot 10 \cdot b + c = 1,5$$

a2) Der Graph von K ist bei $x = 10$ rechtsgekrümmt (degressiv).

a3) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$a = 0,001$$

$$b = -0,08$$

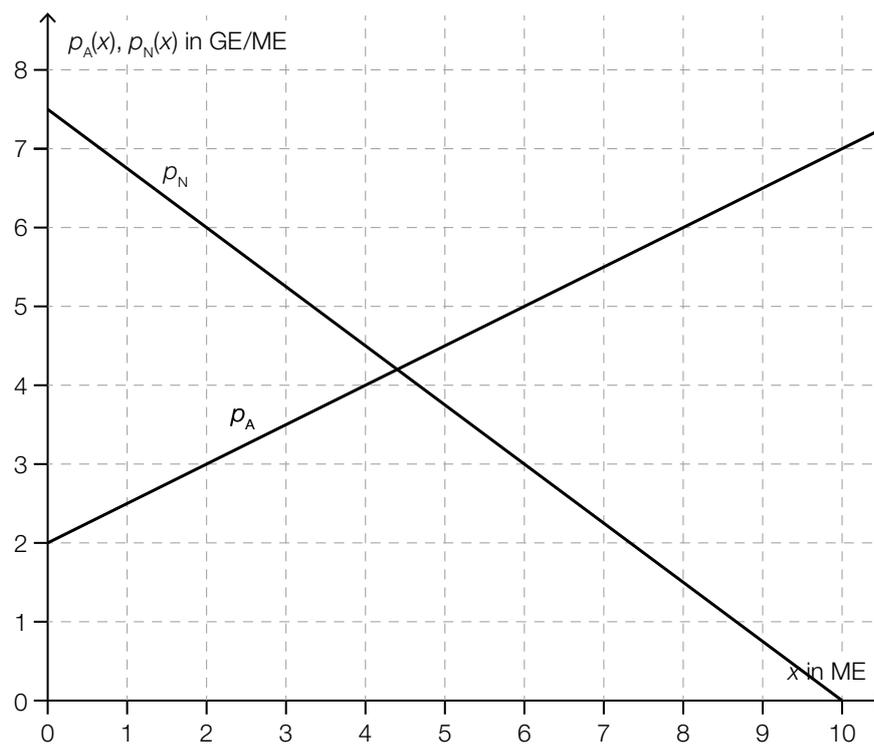
$$c = 2,8$$

b1) $\frac{E(40)}{40} = \frac{200}{40} = 5$

Toleranzbereich: $[4,8; 5,2]$

Der Preis bei dieser Absatzmenge beträgt 5 GE/ME.

c1)



c2) Die 2. Koordinate des Schnittpunkts ist der Gleichgewichtspreis.

d1)

$-\frac{p_h}{x_s}$	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel

- a1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichung mithilfe der Information zu den Gesamtkosten
 1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung mithilfe der Information zu den Grenzkosten
- a2) 1 × C: für die richtige Interpretation des Vorzeichens
- a3) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Koeffizienten
- b1) 1 × C: für das richtige Ermitteln des Preises (Toleranzbereich: [4,8; 5,2])
- c1) 1 × A: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Preisfunktion der Nachfrage
- c2) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
- d1) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

Zweistufige Produktionsprozesse*

Aufgabennummer: B_462

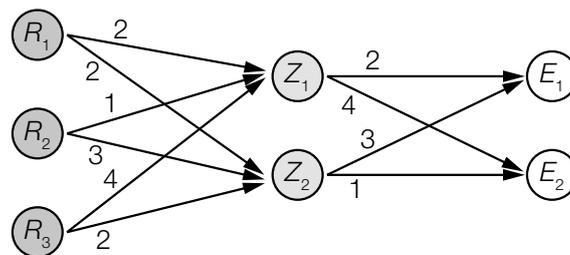
Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Ein Produktionsbetrieb stellt aus den 3 Rohstoffen R_1 , R_2 und R_3 zunächst die 2 Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 und aus diesen die 2 Endprodukte E_1 und E_2 her.

Der nachstehend dargestellte Gozinto-Graph beschreibt die Verflechtung von Rohstoffen, Zwischenprodukten und Endprodukten. Er gibt die Menge an Rohstoffen in ME an, die für jeweils 1 ME der Zwischenprodukte benötigt wird. Er gibt weiters die Menge an Zwischenprodukten in ME an, die für jeweils 1 ME der Endprodukte benötigt wird.



- a) 1) Erstellen Sie eine Matrix \mathbf{A} , die den Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der Zwischenprodukte beschreibt.

Der Mengenbedarf an Zwischenprodukten für die Herstellung der Endprodukte kann durch die Matrix \mathbf{B} beschrieben werden.

- 2) Beschreiben Sie, was mit dem Matrizenprodukt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird.

- b) Der Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der Endprodukte wird durch die Matrix $\begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 11 & 7 \\ 14 & 18 \end{pmatrix}$ beschrieben.

In einem Produktionsprozess sollen 10 ME von E_1 und x ME von E_2 hergestellt werden und es gilt:

$$\begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 11 & 7 \\ 14 & 18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 145 \\ 230 \end{pmatrix}$$

- 1) Interpretieren Sie die Zahl 230 im gegebenen Sachzusammenhang.
2) Ermitteln Sie x .

c) Eine andere Produktionsverflechtung hat folgende Eigenschaften:

Die Matrix \mathbf{C} beschreibt den Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der Zwischenprodukte.

Die Matrix \mathbf{D} beschreibt den Mengenbedarf an Zwischenprodukten für die Herstellung der Endprodukte.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Es werden e_1 ME von E_1 und e_2 ME von E_2 hergestellt.

Die Rohstoffe R_1, R_2, R_3 haben die Preise p_1, p_2, p_3 (in GE/ME).

1) Erstellen Sie mithilfe von Matrizen und Vektoren eine Formel zur Berechnung der Gesamtkosten K für diesen Produktionsprozess.

$$K = \underline{\hspace{15em}}$$

Es werden 5 ME von E_1 und 8 ME von E_2 hergestellt.

2) Ermitteln Sie die benötigten Mengen der jeweiligen Zwischenprodukte.

Möglicher Lösungsweg

$$\text{a1) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

a2) Das Matrizenprodukt gibt an, welche Menge an Rohstoffen man für jeweils 1 ME der Endprodukte benötigt.

b1) Es werden 230 ME von R_3 benötigt.

$$\text{b2) } 10 \cdot 10 + 10 \cdot x = 150$$

oder:

$$11 \cdot 10 + 7 \cdot x = 145$$

oder:

$$14 \cdot 10 + 18 \cdot x = 230$$

$$x = 5$$

$$\text{c1) } K = (p_1 \ p_2 \ p_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{c2) } \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 23 \end{pmatrix}$$

Es werden 34 ME von Z_1 und 23 ME von Z_2 benötigt.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Matrix \mathbf{A}

a2) 1 × C: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang

b1) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang

b2) 1 × B: für das richtige Ermitteln von x

c1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung der Gesamtkosten K

c2) 1 × B: für das richtige Ermitteln der benötigten Mengen der jeweiligen Zwischenprodukte

Goldener Schnitt

Aufgabennummer: B_291

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Eine Strecke (vgl. Abbildung 1) wird in die zwei Teile a und b geteilt ($a > b$).

Gilt $a : b = (a + b) : a$, dann bezeichnet man das Teilungsverhältnis $\phi = a : b$ als den *Goldenen Schnitt*.

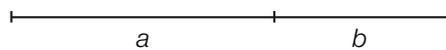


Abbildung 1

a) – Zeigen Sie, dass für $b = 1$ gilt: $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Wenn man von einem Rechteck, dessen Seitenverhältnis dem Goldenen Schnitt entspricht, ein Quadrat A abtrennt (Abbildung 2), dann entspricht das Seitenverhältnis des verbleibenden Rechtecks B ebenfalls dem Goldenen Schnitt.

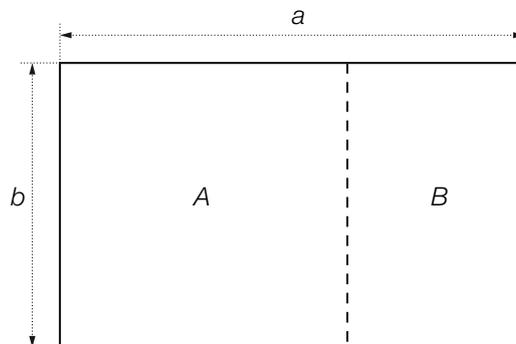


Abbildung 2

– Zeigen Sie diese Eigenschaft für den Fall $b = 1$.

- b) Ein Rechteck, dessen Seitenverhältnis dem Goldenen Schnitt entspricht, wird als *Goldenes Rechteck* bezeichnet. In Abbildung 3 wird ein Goldenes Rechteck fortlaufend durch Abtrennung eines Quadrats geteilt. Anschließend wird in den einzelnen Quadraten ein Viertelkreis gezeichnet. Dadurch entsteht eine sogenannte *Goldene Spirale*.

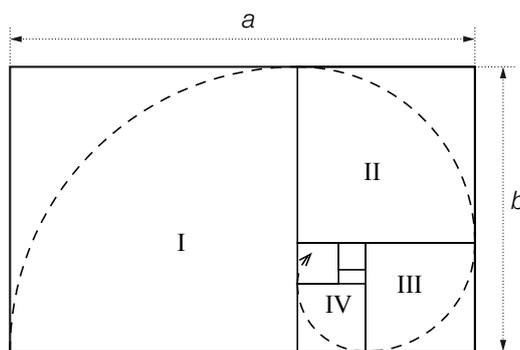


Abbildung 3

- Berechnen Sie die Länge dieser Spirale für die Quadrate I bis IV, wenn die Seitenlängen des Rechtecks $a = 144$ cm und $b = 89$ cm betragen.
- c) Schon nach dem antiken Schönheitsideal gilt ein Mensch als wohlproportioniert, wenn die Höhe des Nabels die Körpergröße im Goldenen Schnitt teilt. In einer Bevölkerungsgruppe entsprechen 87 % diesem Ideal.
- Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 5 zufällig ausgewählten Personen dieser Bevölkerungsgruppe mindestens 3 diesem Ideal entsprechen.

In einer anderen Bevölkerungsgruppe wurden die Daten von 5 Personen erhoben:

$x =$ Höhe bis zum Nabel in cm	105	115	108	121	114
$y =$ Körpergröße in cm	159	174	161	182	171

- Ermitteln Sie mithilfe der gegebenen Daten eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion.
- d) Das Seitenverhältnis eines rechteckigen digitalen Bilderrahmens mit einer Diagonale von $d = 10$ Zoll entspricht mit 1,6 in etwa dem Goldenen Schnitt.
- Berechnen Sie die Breite (= längere Rechteckseite) des Bildschirms in Zentimetern (1 Zoll = 2,54 cm).

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Für $b = 1$ gilt:

$$a : 1 = (a + 1) : a \Rightarrow a^2 = a + 1 \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Die zweite Lösung $a_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ kann aufgrund der Voraussetzung $a > 1$ nicht auftreten.

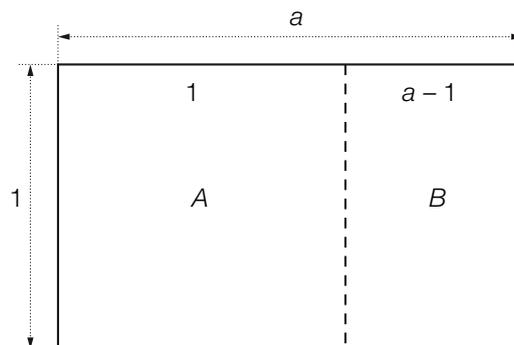
$$a : 1 = \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Für das ursprüngliche Rechteck gilt:

$$\frac{a}{1} = \frac{a+1}{a} \Rightarrow a - 1 = \frac{1}{a}$$

und durch den Kehrwert $1 : (a - 1) = a : 1$

Somit entspricht das Seitenverhältnis des Rechtecks B dem Goldenen Schnitt.



Alternativer Lösungsweg:

$$\text{Im ursprünglichen Rechteck gilt: } a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Das Seitenverhältnis des Rechtecks B entspricht genau dann dem Goldenen Schnitt, wenn gilt:

$$\frac{1}{a-1} = \frac{a}{1}$$

$$\frac{1}{a-1} = \frac{a}{1} \Leftrightarrow 1 = (a-1) \cdot a \Leftrightarrow a^2 - a - 1 = 0$$

Diese Gleichung ist für $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ laut Voraussetzung erfüllt.

b) Radien der Viertelkreise: $r_I = 89$, $r_{II} = 144 - 89 = 55$, $r_{III} = 89 - 55 = 34$, $r_{IV} = 55 - 34 = 21$

Länge der Spirale: $\frac{\pi}{2} \cdot 89 + \frac{\pi}{2} \cdot 55 + \frac{\pi}{2} \cdot 34 + \frac{\pi}{2} \cdot 21 = 99,5 \cdot \pi \approx 312,59$ cm

c) Binomialverteilung mit $p = 0,87$ und $n = 5$

$P(X \geq 3) = 0,9820\dots \approx 98,2$ %

Ermitteln der Gleichung mittels Technologieeinsatz:

$y = 1,5064 \cdot x - 0,2163$ (Parameter gerundet)

d) $d = 25,4$ cm; $\frac{\text{Breite}}{\text{Höhe}} = \frac{b}{h} = 1,6 \Rightarrow h = \frac{b}{1,6}$

Pythagoras: $d^2 = b^2 + h^2 = b^2 + \left(\frac{b}{1,6}\right)^2 \Rightarrow b^2 = \frac{d^2}{1 + \left(\frac{1}{1,6}\right)^2}$

Breite $b = 21,539\dots \approx 21,54$ cm

Klassifikation

Teil A Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 2 Algebra und Geometrie
- b) 2 Algebra und Geometrie
- c) 5 Stochastik
- d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —
- d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) D Argumentieren und Kommunizieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) B Operieren und Technologieeinsatz
- d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —
- d) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

- a) schwer
- b) mittel
- c) leicht
- d) mittel

Punkteanzahl:

- a) 2
- b) 1
- c) 2
- d) 2

Thema: Sonstiges

Quelle: Elam, Kimberley: *Proportion und Komposition. Geometrie im Design*. New York: Princeton Architectural Press 2006.

Parkgarage*

Aufgabennummer: B_485

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Eine Baugesellschaft errichtet eine Parkgarage.

Es wird eine Nutzungsdauer von 40 Jahren angenommen.

Die Baugesellschaft rechnet mit einem kalkulatorischen Zinssatz von 4 % p. a.

a) Die Baugesellschaft rechnet mit jährlich nachschüssigen Betriebskosten in Höhe von jeweils € 64.000.

1) Berechnen Sie den Barwert der Betriebskosten für die gesamte Nutzungsdauer.

b) Die Wartungskosten (in €) werden mit W_1 nach 10 Jahren, W_2 nach 20 Jahren und W_3 nach 30 Jahren veranschlagt.

1) Erstellen Sie mithilfe von W_1 , W_2 und W_3 eine Formel zur Berechnung des Barwerts B der gesamten Wartungskosten.

$B =$ _____

W_1 und W_2 werden mit jeweils € 60.000 veranschlagt. Der Barwert B beträgt € 92.582,56.

2) Berechnen Sie W_3 .

c) Die monatliche Miete für einen Parkgaragenplatz wird mit € 105 veranschlagt.

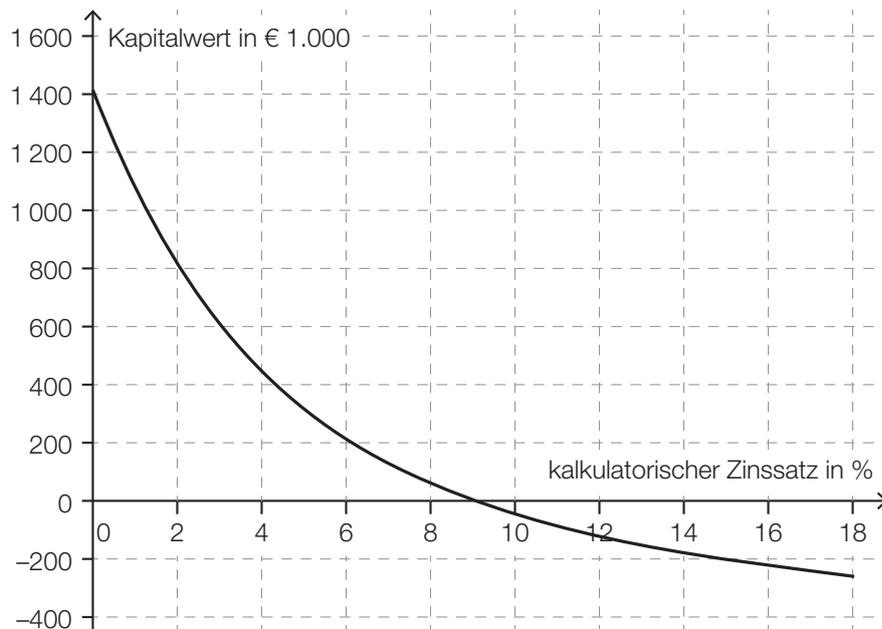
Die Parkgarage verfügt über 120 Plätze.

Die Baugesellschaft rechnet mit monatlichen Mieteinnahmen in Höhe von € 10.080.

Der Auslastungsgrad gibt an, wie viel Prozent der Parkgaragenplätze vermietet sind.

1) Ermitteln Sie den Auslastungsgrad der Parkgarage, mit dem die Baugesellschaft rechnet.

- d) In der nachstehenden Abbildung ist der Kapitalwert für die Parkgarage (in € 1.000) in Abhängigkeit vom kalkulatorischen Zinssatz (in Prozent) dargestellt:



- 1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Kapitalwert für den kalkulatorischen Zinssatz 4 % ab. Geben Sie das Ergebnis in Euro an.

Kapitalwert: € _____

Die Baugesellschaft senkt die Anschaffungskosten für die Parkgarage um € 200.000.

- 2) Argumentieren Sie, dass der interne Zinssatz dadurch auf über 10 % steigt.

Möglicher Lösungsweg

$$\text{a1) } B_{\text{nach}} = 64\,000 \cdot \frac{1,04^{40} - 1}{0,04} \cdot \frac{1}{1,04^{40}} = 1\,266\,737,528\dots$$

Der Barwert der Betriebskosten beträgt € 1.266.737,53.

$$\text{b1) } B = \frac{W_1}{1,04^{10}} + \frac{W_2}{1,04^{20}} + \frac{W_3}{1,04^{30}}$$

$$\text{b2) } 92\,582,56 = \frac{60\,000}{1,04^{10}} + \frac{60\,000}{1,04^{20}} + \frac{W_3}{1,04^{30}} \Rightarrow W_3 = 79\,999,9\dots$$

Die Wartungskosten W_3 betragen € 80.000.

$$\text{c1) } 105 \cdot 120 \cdot A = 10\,080 \Rightarrow A = 0,8$$

Der Auslastungsgrad beträgt 80 %.

d1) Kapitalwert: € 450.000

Toleranzbereich: [€ 410.000; € 490.000]

d2) Werden die Anschaffungskosten für die Parkgarage um € 200.000 gesenkt, wird die Kapitalwertkurve um diesen Betrag nach oben verschoben. Dadurch wird der Kapitalwert für 10 % positiv, der interne Zinssatz ist dann höher als 10 %.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für das richtige Berechnen des Barwerts

b1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel

b2) 1 × B: für das richtige Berechnen von W_3

c1) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Auslastungsgrads

d1) 1 × C: für das richtige Ablesen des Kapitalwerts in Euro

(Toleranzbereich: [€ 410.000; € 490.000])

d2) 1 × D: für das richtige Argumentieren

Lagerhalle*

Aufgabennummer: B_484

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Für den Kauf einer Lagerhalle benötigt ein Unternehmen € 180.000. Es werden verschiedene Möglichkeiten für die Finanzierung überprüft.

- a) Das Unternehmen konnte in den vergangenen Jahren Rücklagen bilden, die mit einem positiven jährlichen Zinssatz i verzinst werden:
Vor 4 Jahren konnte das Unternehmen € 50.000 zurücklegen, vor 3 Jahren konnte es € 70.000 zurücklegen.

Es soll derjenige Betrag X ermittelt werden, der für den Kauf der Lagerhalle heute noch fehlt.

- 1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Betrags X .

$X =$ _____

- 2) Berechnen Sie den Betrag X für den Zinssatz $i = 2,5 \%$ p. a.

- b) Das Unternehmen kann den Kauf der Lagerhalle mit einem Kredit in Höhe von € 180.000 finanzieren.

Der Kredit soll durch 40 nachschüssige Quartalsraten bei einem Zinssatz von 1% p. q. getilgt werden.

- 1) Berechnen Sie die Höhe einer Quartalsrate.

c) Ein anderes Kreditangebot enthält Sonderkonditionen für die Jahre 1 und 2.

Diese Sonderkonditionen können dem Tilgungsplan entnommen werden:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	---	---	---	€ 180.000
1	€ 5.400	€ -5.400	€ 0	€ 185.400
2	€ 5.562			€ 180.000

- 1) Ermitteln Sie den Jahreszinssatz für dieses Kreditangebot.
- 2) Erklären Sie mithilfe der Einträge im Tilgungsplan, warum der Tilgungsanteil im Jahr 1 negativ ist.
- 3) Vervollständigen Sie die Zeile für das Jahr 2 im obigen Tilgungsplan.

Möglicher Lösungsweg

a1) $X = 180\,000 - 50\,000 \cdot (1 + i)^4 - 70\,000 \cdot (1 + i)^3$

a2) $X = 180\,000 - 50\,000 \cdot 1,025^4 - 70\,000 \cdot 1,025^3 = 49\,427,011\dots$

Es fehlt ein Betrag in Höhe von € 49.427,01.

b1) $180\,000 = R \cdot \frac{1,01^{40} - 1}{0,01} \cdot \frac{1}{1,01^{40}} \Rightarrow R = 5\,482,007\dots$

Die Höhe einer Quartalsrate beträgt € 5.482,01.

c1) $i = \frac{5\,400}{180\,000} = 0,03$

Der Jahreszinssatz beträgt 3 %.

c2) Das Unternehmen bezahlt im Jahr 1 nichts, die Annuität ist gleich null.

Da die Summe aus Zinsanteil und Tilgungsanteil gleich null ist, muss der Tilgungsanteil negativ sein.

c3)

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
2	€ 5.562	€ 5.400	€ 10.962	€ 180.000

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel

a2) 1 × B: für das richtige Berechnen des Betrags X

b1) 1 × B: für das richtige Berechnen der Höhe einer Quartalsrate

c1) 1 × B1: für das richtige Ermitteln des Jahreszinssatzes

c2) 1 × D: für das richtige Erklären

c3) 1 × B2: für das richtige Vervollständigen der Zeile für das Jahr 2

Fruchtsaftproduktion*

Aufgabennummer: B_483

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Ein Unternehmen produziert den Fruchtsaft *Mangomix*.

- a) Die Kosten bei der Produktion des Fruchtsafts *Mangomix* können durch eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion K beschrieben werden:

$$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + 105 \cdot x + 1215$$

x ... Produktionsmenge in hl

$K(x)$... Kosten bei der Produktionsmenge x in €

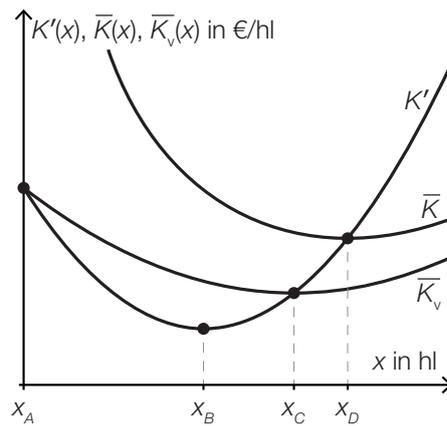
Von der Kostenfunktion ist bekannt:

I: Die Grenzkosten bei einer Produktionsmenge von 25 hl betragen 30 €/hl.

II: $K''(25) = 0$

- 1) Erstellen Sie eine Gleichung, die die Bedingung I beschreibt.
- 2) Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 25 in der Gleichung II im gegebenen Sachzusammenhang.
- 3) Berechnen Sie die Koeffizienten a und b .

- b) In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen der Grenzkostenfunktion K' , der Durchschnittskostenfunktion \bar{K} und der variablen Durchschnittskostenfunktion \bar{K}_V für den Fruchtsaft *Mangomix* dargestellt.
Vier Produktionsmengen, x_A bis x_D , sind auf der horizontalen Achse markiert.



- 1) Ordnen Sie den beiden Begriffen jeweils die zutreffende Produktionsmenge aus A bis D zu. [2 zu 4]

Kostenkehre	
Betriebsminimum	

A	Produktionsmenge x_A
B	Produktionsmenge x_B
C	Produktionsmenge x_C
D	Produktionsmenge x_D

- c) Der Erlös beim Verkauf des Fruchtsafts *Mangomix* kann durch eine quadratische Funktion E beschrieben werden:

$$E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x \text{ mit } x \geq 0$$

x ... Absatzmenge in hl

$E(x)$... Erlös bei der Absatzmenge x in €

- 1) Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen des jeweils richtigen Satzteils so, dass eine korrekte Aussage entsteht. [Lückentext]

Der Koeffizient a muss _____ ① _____ sein, weil der Graph von E _____ ② _____.

①	
positiv	<input type="checkbox"/>
negativ	<input type="checkbox"/>
gleich null	<input type="checkbox"/>

②	
durch den Ursprung geht	<input type="checkbox"/>
keinen Wendepunkt hat	<input type="checkbox"/>
nach unten geöffnet ist	<input type="checkbox"/>

- 2) Weisen Sie nach, dass der maximale Erlös bei der Absatzmenge $x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}$ erzielt wird.

- d) Der Grenzgewinn für den Fruchtsaft *Mangomix* kann durch die Funktion G' beschrieben werden:

$$G'(x) = -0,12 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 220$$

x ... Absatzmenge in hl

$G'(x)$... Grenzgewinn bei der Absatzmenge x in €/hl

- 1) Ermitteln Sie diejenige Absatzmenge, bei der der maximale Gewinn erzielt wird.

Die Fixkosten betragen 1.215 €.

- 2) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Gewinnfunktion G unter Berücksichtigung der Fixkosten.

Es soll derjenige Bereich für die Absatzmenge ermittelt werden, in dem der Gewinn mindestens 1.000 € beträgt.

- 3) Ermitteln Sie diesen Bereich.

Möglicher Lösungsweg

a1) $K'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + 105$

Gleichung: $K'(25) = 30$ oder $1875 \cdot a + 50 \cdot b + 105 = 30$

a2) Bei einer Produktionsmenge von 25 hl liegt die Kostenkehre.

oder:

Bei einer Produktionsmenge von 25 hl geht der Kostenverlauf von degressiv zu progressiv über.

a3) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = 0,04$; $b = -3$

b1)

Kostenkehre	B
Betriebsminimum	C

A	Produktionsmenge x_A
B	Produktionsmenge x_B
C	Produktionsmenge x_C
D	Produktionsmenge x_D

c1)

①	
negativ	<input checked="" type="checkbox"/>

②	
nach unten geöffnet ist	<input checked="" type="checkbox"/>

c2) $E'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$

$0 = 2 \cdot a \cdot x_0 + b$

$x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}$

oder:

Die Nullstellen der Erlösfunktion sind 0 und $-\frac{b}{a}$.

Die Stelle des Maximums liegt in der Mitte bei $-\frac{b}{2 \cdot a}$.

$$\text{d1) } G'(x) = 0 \quad \text{oder} \quad -0,12 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 220 = 0$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$x_1 = 29,280... \quad (x_2 = -62,613...)$$

Der maximale Gewinn wird bei einer Absatzmenge von rund 29,28 hl erzielt.

$$\text{d2) } G(x) = \int (-0,12 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 220) dx = -0,04 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 220 \cdot x + C$$

$$\text{Da } G(0) = -F, \text{ gilt: } G(x) = -0,04 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 220 \cdot x - 1215$$

$$\text{d3) } G(x) = 1000 \quad \text{oder} \quad -0,04 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 220 \cdot x - 1215 = 1000$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$x_1 = 11,565... \quad x_2 = 44,950... \quad (x_3 = -106,516...)$$

Im Bereich [11,57 hl; 44,95 hl] beträgt der Gewinn mindestens 1.000 €.

Lösungsschlüssel

- a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung
- a2) 1 × C: für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang
- a3) 1 × B: für das richtige Berechnen der Koeffizienten
- b1) 1 × C: für das richtige Zuordnen
- c1) 1 × C: für das richtige Ergänzen der beiden Textlücken
- c2) 1 × D: für das richtige Nachweisen
- d1) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Absatzmenge, bei der maximaler Gewinn erzielt wird
- d2) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Gewinnfunktion unter Berücksichtigung der Fixkosten
- d3) 1 × B2: für das richtige Ermitteln des Bereichs

Sozialausgaben (2)*

Aufgabennummer: B_482

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Sozialausgaben sind Geldleistungen, die der Staat Personen in bestimmten Lebenslagen zur Verfügung stellt.

Die Sozialausgaben in Österreich für ausgewählte Jahre im Zeitraum von 1990 bis 2015 sind in der nachstehenden Tabelle angegeben (Werte gerundet).

Jahr	Sozialausgaben in Milliarden Euro
1990	35,5
1995	51,0
2000	59,8
2005	71,2
2010	87,8
2015	102,5

Datenquelle: Statistik Austria (Hrsg.): *Statistisches Jahrbuch Österreichs 2017*. Wien: Verlag Österreich 2016, S. 224.

- a) Die Sozialausgaben sollen in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren ab 1990 näherungsweise durch eine lineare Funktion beschrieben werden.
- 1) Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion S_1 . Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 1990.
 - 2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung von S_1 im gegebenen Sachzusammenhang.
 - 3) Ermitteln Sie mithilfe von S_1 eine Prognose für die Sozialausgaben im Jahr 2020.

- b) 1) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang:

$$\sqrt[5]{\frac{87,8}{71,2}} - 1 \approx 0,043$$

Eine Sozialwissenschaftlerin geht von der Annahme aus, dass die Sozialausgaben in Österreich seit dem Jahr 2015 jährlich um 2,5 % bezogen auf das jeweilige Vorjahr steigen.

Dieses Modell soll durch eine Funktion S_2 beschrieben werden.

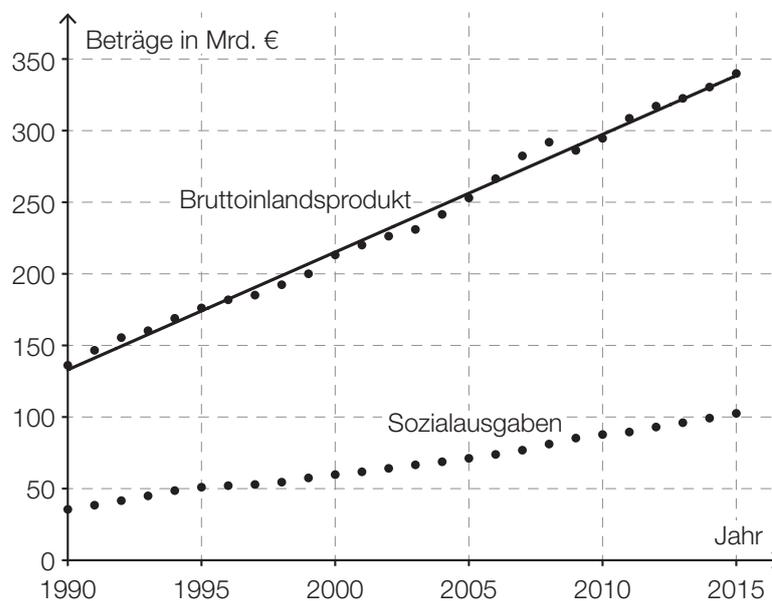
t ... Zeit ab 2015 in Jahren

$S_2(t)$... Sozialausgaben zur Zeit t in Milliarden Euro

- 2) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion S_2 .

Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2015.

- c) In der nachstehenden Abbildung sind das Bruttoinlandsprodukt und die Sozialausgaben Österreichs für den Zeitraum von 1990 bis 2015 dargestellt. Weiters ist die Regressionsgerade für das Bruttoinlandsprodukt für diesen Zeitraum eingezeichnet.

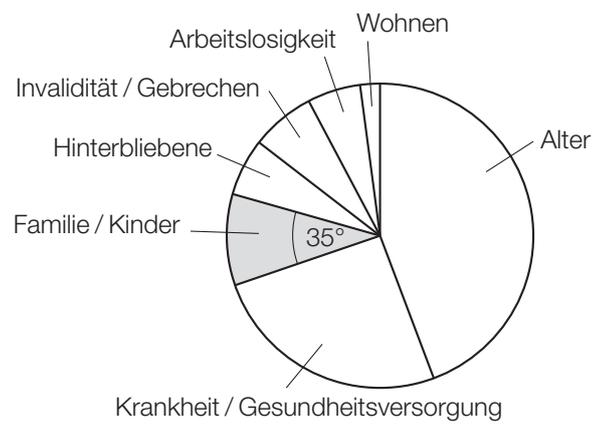


- 1) Ermitteln Sie den Wert der Steigung der Regressionsgeraden für das Bruttoinlandsprodukt.

Die Sozialquote ist das Verhältnis der Sozialausgaben zum Bruttoinlandsprodukt.

- 2) Ermitteln Sie die Sozialquote für das Jahr 2015.

- d) Die Verteilung der Sozialausgaben von insgesamt 102,5 Milliarden Euro für das Jahr 2015 ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt. Der Bereich „Familie/Kinder“ ist markiert.



- 1) Ermitteln Sie den Betrag, der im Jahr 2015 für den Bereich „Familie/Kinder“ ausgegeben worden ist.

Möglicher Lösungsweg

a1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$$S_1(t) = 2,61 \cdot t + 35,3 \quad (\text{Koeffizienten gerundet})$$

t ... Zeit in Jahren ($t = 0$ für das Jahr 1990)

$S_1(t)$... Sozialausgaben zur Zeit t in Milliarden Euro

a2) Gemäß diesem Modell steigen die Sozialausgaben um rund 2,61 Milliarden Euro pro Jahr.

a3) $S_1(30) = 2,61 \cdot 30 + 35,3 = 113,64\dots$

Für das Jahr 2020 sind Sozialausgaben in Höhe von rund 113,6 Milliarden Euro zu erwarten.

b1) Im Zeitraum von 2005 bis 2010 stiegen die Sozialausgaben um durchschnittlich rund 4,3 % pro Jahr.

b2) $S_2(t) = 102,5 \cdot 1,025^t$

c1) Steigung $k \approx \frac{340 - 140}{25} = 8$

Toleranzbereich: $[7; 9]$

c2) Sozialquote für 2015: $\frac{102,5}{340} = 0,301\dots$

Toleranzbereich: $[0,285; 0,320]$

d1) $102,5 \cdot \frac{35^\circ}{360^\circ} = 9,9\dots$

Für den Bereich „Familie/Kinder“ sind im Jahr 2015 rund 10 Mrd. Euro ausgegeben worden.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der Regressionsfunktion

a2) 1 × C: für das richtige Interpretieren des Wertes der Steigung der Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang

a3) 1 × B2: für das richtige Ermitteln der Prognose

b1) 1 × C: für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang

b2) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung

c1) 1 × A: für das richtige Ermitteln des Wertes der Steigung (Toleranzbereich: $[7; 9]$)

c2) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Sozialquote (Toleranzbereich: $[0,285; 0,320]$)

d1) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Betrags

Kfz-Bestand (1)*

Aufgabennummer: B_300

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Die nachstehende Tabelle gibt den Kraftfahrzeug-Bestand (Kfz-Bestand) in Österreich für ausgewählte Jahre im Zeitraum von 1992 bis 2012 jeweils zum Jahresende an.

Ende des Jahres ...	Kfz-Bestand in Millionen
1992	4,5
1997	5,2
2002	5,4
2007	5,8
2012	6,3

Datenquelle: Statistik Austria (Hrsg.): *Statistisches Jahrbuch Österreichs 2015*. Wien: Verlag Österreich 2014, S. 446.

- a) Die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands soll mit den Daten der obigen Tabelle durch eine lineare Regressionsfunktion K beschrieben werden.
- 1) Ermitteln Sie eine Gleichung dieser linearen Regressionsfunktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Ende des Jahres 1992.
 - 2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Funktion im gegebenen Sachzusammenhang.
 - 3) Berechnen Sie, nach welcher Zeit gemäß diesem Modell mit einem Kfz-Bestand von 8 Millionen zu rechnen ist.

- b) Um die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands mit einem anderen mathematischen Modell zu beschreiben, wurden, ausgehend von den Daten der obigen Tabelle, die nachstehenden Berechnungen durchgeführt.

$$\sqrt[20]{\frac{6,3}{4,5}} = 1,0169\dots$$

$$1,0169\dots - 1 = 0,0169\dots \approx 1,7 \%$$

- 1) Interpretieren Sie die Bedeutung der berechneten Zahl 1,7 % im gegebenen Sachzusammenhang.

Jemand berechnet weiters:

$$2 = 1,0169\dots^t$$

$$t = \frac{\ln(2)}{\ln(1,0169\dots)} = 41,20\dots \approx 41,2$$

- 2) Interpretieren Sie die Bedeutung der berechneten Zahl 41,2 im gegebenen Sachzusammenhang.

- c) Der Kfz-Bestand kann nicht unbeschränkt wachsen.

Die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands kann in einem Modell beschränkten Wachstums durch die Funktion K_B beschrieben werden:

$$K_B(t) = 9 - b \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ für das Ende des Jahres 1992

$K_B(t)$... Kfz-Bestand zur Zeit t in Millionen

Der Graph der Funktion K_B soll durch die Datenpunkte für die Jahre 1992 und 2012 verlaufen.

- 1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem die Parameter b und λ der Funktion K_B ermittelt werden können.
- 2) Ermitteln Sie die Parameter b und λ .
- 3) Ermitteln Sie mithilfe dieses Modells eine Prognose für den Kfz-Bestand am Ende des Jahres 2020.

- d) In einem logistischen Modell wird die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands durch die Funktion K_L beschrieben:

$$K_L(t) = \frac{22,5}{3 + 2 \cdot e^{-0,06264 \cdot t}}$$

t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ für das Ende des Jahres 1992

$K_L(t)$... Kfz-Bestand zur Zeit t in Millionen

- 1) Argumentieren Sie mathematisch, dass sich der Kfz-Bestand gemäß diesem Modell langfristig dem Wert 7,5 Millionen annähert.

Möglicher Lösungsweg

a1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$$K(t) = 0,084 \cdot t + 4,6$$

t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ für das Ende des Jahres 1992

$K(t)$... Kfz-Bestand zur Zeit t in Millionen

a2) Gemäß diesem Modell nimmt der Kfz-Bestand um 84 000 Kraftfahrzeuge pro Jahr zu.

a3) $K(t) = 8$ oder $0,084 \cdot t + 4,6 = 8$
 $t = 40,47\dots$

Gemäß diesem Modell ist nach etwa 40,5 Jahren mit einem Kfz-Bestand von 8 Millionen zu rechnen.

Die Lösung kann entweder als Zeit nach Ende des Jahres 1992 oder als Kalenderjahr angegeben werden.

b1) Gemäß diesem Modell nimmt der Kfz-Bestand pro Jahr um rund 1,7 % zu.

b2) Gemäß diesem Modell verdoppelt sich der Kfz-Bestand nach (jeweils) rund 41,2 Jahren.

c1) $K_B(0) = 4,5$
 $K_B(20) = 6,3$

oder:

$$9 - b = 4,5$$

$$9 - b \cdot e^{-\lambda \cdot 20} = 6,3$$

c2) $b = 9 - 4,5 = 4,5$
 $\lambda = \frac{\ln(4,5) - \ln(2,7)}{20} = 0,025541\dots$

c3) $K_B(28) = 6,79\dots$

Gemäß diesem Modell beträgt der Kfz-Bestand am Ende des Jahres 2020 rund 6,8 Millionen.

d1) Mit beliebig groß werdendem t geht $e^{-0,06264 \cdot t}$ gegen null, der Nenner also gegen 3 und damit der Funktionswert gegen 7,5.

Lösungsschlüssel

- a1) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der linearen Regressionsfunktion
- a2) 1 × C: für die richtige Interpretation des Wertes der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang
- a3) 1 × B2: für die richtige Berechnung derjenigen Zeit, nach der mit einem Kfz-Bestand von 8 Millionen zu rechnen ist
- b1) 1 × C1: für die richtige Interpretation der Zahl 1,7 % im gegebenen Sachzusammenhang
- b2) 1 × C2: für die richtige Interpretation der Zahl 41,2 im gegebenen Sachzusammenhang
- c1) 1 × A: für das richtige Erstellen des Gleichungssystems
- c2) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Parameter b und λ
- c3) 1 × B2: für das richtige Ermitteln der Prognose für den Kfz-Bestand am Ende des Jahres 2020
- d1) 1 × D: für die richtige mathematische Argumentation

Kredit und Sparbuch*

Aufgabennummer: B_469

Technologieeinsatz:

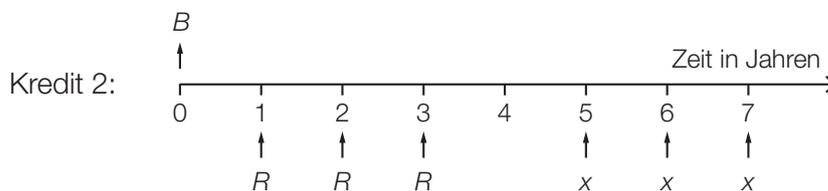
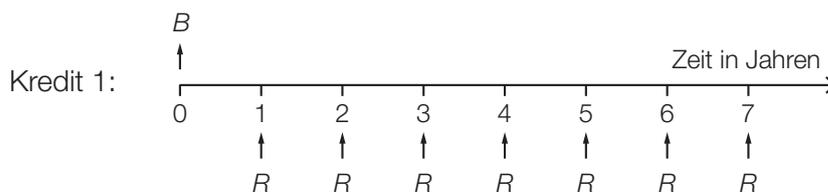
möglich

erforderlich

Die Begriffe *Kredit* und *Sparbuch* werden in dieser Aufgabe in vereinfachter Form ohne Berücksichtigung von Gebühren oder Steuern verwendet.

- a) Die unten stehenden Zeitachsen beschreiben die Rückzahlungen von 2 Krediten, die nach 7 Jahren vollständig getilgt sind.

Bei beiden Krediten sind der Zinssatz, die Kredithöhe B und die Ratenhöhe R jeweils gleich hoch.

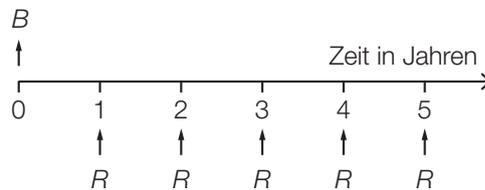


- 1) Argumentieren Sie, dass die Ratenhöhe x höher sein muss als die Ratenhöhe R .

Die Kredithöhe B beträgt € 10.000. Der Zinssatz beträgt 3 % p. a.

- 2) Berechnen Sie die Ratenhöhe R .
3) Berechnen Sie für Kredit 2 die Höhe der Restschuld zum Zeitpunkt $t = 4$ Jahre.

- b) Ein Kredit in der Höhe B wird mit einem Jahreszinssatz i verzinst.
Die Höhe der jährlichen Rate beträgt R .



Nachdem die erste Rate R zurückgezahlt wurde, beträgt die Restschuld B_1 .

- 1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung von B_1 aus B , R und i .

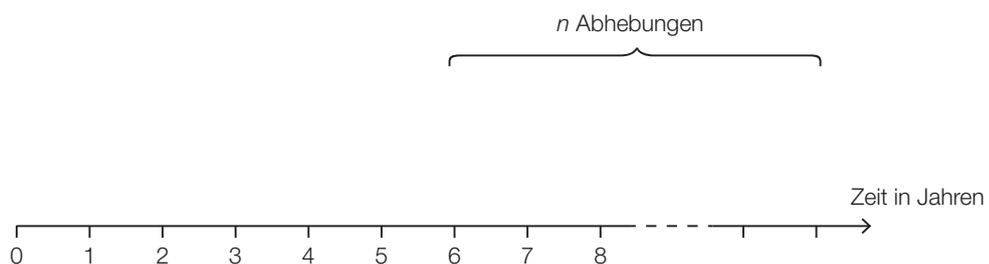
$$B_1 = \underline{\hspace{10cm}}$$

- c) Jemand zahlt in 4 aufeinanderfolgenden Jahren jeweils zu Jahresbeginn einen Betrag in Höhe von € 300 auf ein Sparbuch ein. Der Zinssatz beträgt 1,5 % p. a.

Beginnend 3 Jahre nach der letzten Einzahlung wird jeweils jährlich ein Betrag in Höhe von € 150 abgehoben.

Insgesamt finden n Abhebungen statt. Die letzte Abhebung setzt sich dabei aus den € 150 und einem Restbetrag x mit $€ 0 < x < € 150$ zusammen.

- 1) Vervollständigen Sie die nachstehende Zeitachse so, dass sie den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt.



Es wird folgende Berechnung durchgeführt:

$$K = 300 \cdot 1,015^6 + 300 \cdot 1,015^5 + 300 \cdot 1,015^4 + 300 \cdot 1,015^3 \approx 1283,33$$

- 2) Beschreiben Sie die Bedeutung von K im gegebenen Sachzusammenhang.
3) Berechnen Sie die Anzahl n der Abhebungen.

Möglicher Lösungsweg

a1) Bei Kredit 2 wird eine Ratenzahlung ausgesetzt, dadurch muss die verbleibende Ratenhöhe x größer sein als die ursprüngliche Ratenhöhe R .

$$\text{a2) } 10000 = R \cdot \frac{1,03^7 - 1}{0,03} \cdot \frac{1}{1,03^7}$$

$$R = 1605,063\dots$$

Die Ratenhöhe R beträgt € 1.605,06.

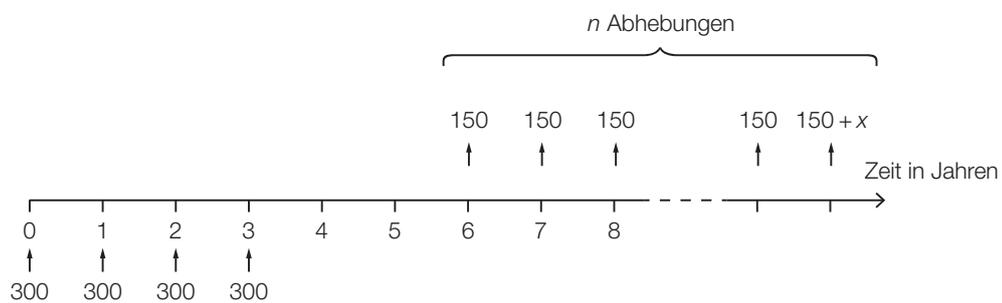
$$\text{a3) } 10000 \cdot 1,03^4 - 1605,06 \cdot 1,03^3 - 1605,06 \cdot 1,03^2 - 1605,06 \cdot 1,03 = 6145,175\dots$$

Die Höhe der Restschuld zum Zeitpunkt 4 beträgt € 6.145,18.

Wird bei der Berechnung der Höhe der Restschuld die ungerundete Ratenhöhe verwendet, so ist dies ebenfalls als richtig zu werten.

$$\text{b1) } B_1 = B \cdot (1 + i) - R$$

c1)



c2) K ist das angesparte Kapital nach 6 Jahren.

$$\text{c3) } 1283,33 = 150 \cdot \frac{1,015^n - 1}{0,015} \cdot \frac{1}{1,015^{n-1}}$$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $n = 9,0\dots$

Es finden 9 Abhebungen statt.

Lösungsschlüssel

- a1) 1 × D: für die richtige Argumentation
- a2) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Ratenhöhe R
- a3) 1 × B2: für die richtige Berechnung der Höhe der Restschuld zum Zeitpunkt $t = 4$ Jahre
- b1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung von B_1
- c1) 1 × A: für das richtige Vervollständigen der Zeitachse
- c2) 1 × C: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang
- c3) 1 × B: für die richtige Berechnung von n

Käseproduktion*

Aufgabennummer: B_468

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Der Produktionsleiter einer kleinen Käserei hat für eine bestimmte Käsesorte die täglichen Produktionskosten genauer untersucht.

a) Für die der Kostenfunktion K zugehörigen Grenzkostenfunktion K' gilt:

$$K'(x) = 0,03 \cdot x^2 - 0,5 \cdot x + 5$$

x ... Produktionsmenge in kg

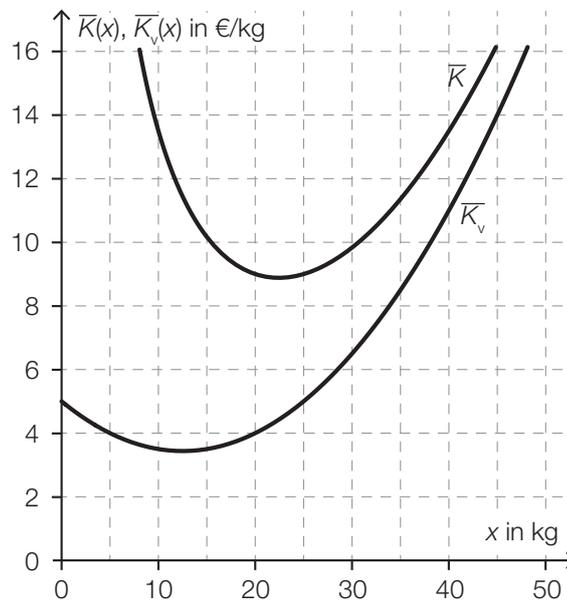
$K'(x)$... Grenzkosten bei der Produktionsmenge x in €/kg

Bei einer Produktionsmenge von 5 kg entstehen Gesamtkosten von € 120.

- 1) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K .
- 2) Berechnen Sie die Kostenkehre.
- 3) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

$$\frac{K(10) - K(5)}{10 - 5} = 3$$

- b) In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen der Stückkostenfunktion \bar{K} und der variablen Stückkostenfunktion \bar{K}_v dargestellt.



- 1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung das Betriebsoptimum ab. Geben Sie die zugehörige Einheit an.
 - 2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die kurzfristige Preisuntergrenze ab. Geben Sie die zugehörige Einheit an.
- c) Der Gewinn kann durch eine Polynomfunktion G beschrieben werden.

$$G(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

x ... Absatzmenge in kg

$G(x)$... Gewinn bei der Absatzmenge x in €

Bei einer Absatzmenge von 5 kg werden € 35 Verlust erzielt.

Bei einer Absatzmenge von 25 kg beträgt der Gewinn € 200.

Der maximale Gewinn wird bei einer Absatzmenge von 30 kg erzielt und beträgt € 215.

- 1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem die Koeffizienten von G ermittelt werden können.
- 2) Berechnen Sie diese Koeffizienten.

Möglicher Lösungsweg

a1) $K(x) = \int (0,03 \cdot x^2 - 0,5 \cdot x + 5) dx = 0,01 \cdot x^3 - 0,25 \cdot x^2 + 5 \cdot x + F$
 $K(5) = 120$ oder $0,01 \cdot 5^3 - 0,25 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 + F = 120 \Rightarrow F = 100$

$$K(x) = 0,01 \cdot x^3 - 0,25 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 100$$

x ... Produktionsmenge in kg

$K(x)$... Kosten bei der Produktionsmenge x in €

a2) $K''(x) = 0,06 \cdot x - 0,5$

$$K''(x) = 0 \Rightarrow x = 8,33\dots$$

Die Kostenkehre liegt bei rund 8,3 kg.

a3) Wird die Produktion von 5 kg auf 10 kg gesteigert, so nehmen die Gesamtkosten um durchschnittlich € 3 pro kg zu.

b1) Betriebsoptimum: 22 kg

Toleranzbereich: [21 kg; 23 kg]

b2) kurzfristige Preisuntergrenze: 3,40 €/kg

Toleranzbereich: [3,10 €/kg; 3,70 €/kg]

c1) $G(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

$$G'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$$

I: $G(5) = -35$

II: $G(25) = 200$

III: $G(30) = 215$

IV: $G'(30) = 0$

oder:

I: $5^3 \cdot a + 5^2 \cdot b + 5 \cdot c + d = -35$

II: $25^3 \cdot a + 25^2 \cdot b + 25 \cdot c + d = 200$

III: $30^3 \cdot a + 30^2 \cdot b + 30 \cdot c + d = 215$

IV: $3 \cdot 30^2 \cdot a + 2 \cdot 30 \cdot b + c = 0$

c2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$a = -0,01; b = 0,25; c = 12; d = -100$$

Lösungsschlüssel

- a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Kostenfunktion (mit Integrationskonstante)
- a2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Kostenkehre
- a3) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
- b1) 1 × C1: für das richtige Ablesen des Betriebsoptimums im Toleranzbereich [21 kg; 23 kg] mit der Angabe der richtigen Einheit
- b2) 1 × C2: für das richtige Ablesen der kurzfristigen Preisuntergrenze im Toleranzbereich [3,10 €/kg; 3,70 €/kg] mit der Angabe der richtigen Einheit
- c1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichungen mithilfe der Informationen zum Gewinn bei den Absatzmengen 5 kg, 25 kg und 30 kg
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung mithilfe der Ableitungsfunktion G'
- c2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten

Obsthändler*

Aufgabennummer: B_489

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Ein Obsthändler plant die Renovierung seiner Geschäftsräume.

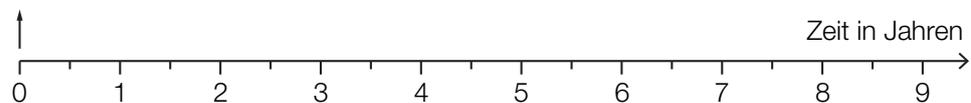
a) Die Renovierung soll durch einen Kredit in Höhe von € 60.000 finanziert werden.

Das Angebot einer Bank sieht folgende Rückzahlungen vor:

- eine Einmalzahlung in Höhe von € 15.000 am Ende des 1. Jahres
- eine weitere Einmalzahlung in Höhe von € 20.000 am Ende des 3. Jahres
- 6 Halbjahresraten in Höhe von jeweils R , die erste Rate ist am Ende des 4. Jahres fällig

1) Veranschaulichen Sie diese Rückzahlungen auf der nachstehenden Zeitachse.

Auszahlung: € 60.000



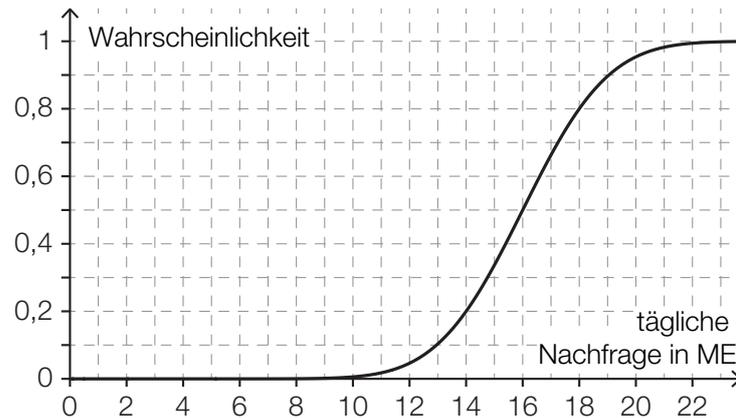
Rückzahlungen:

2) Berechnen Sie die Ratenhöhe R bei einem Semesterzinssatz von 3 % p. s.

b) Der Obsthändler überlegt, die Renovierung erst in 2 Jahren durchzuführen, um bis dahin Geld anzusparen. Er geht davon aus, dass er monatlich nachschüssig € 2.400 auf ein Konto einzahlen könnte. Dadurch möchte er innerhalb von 2 Jahren € 60.000 ansparen.

- 1) Berechnen Sie denjenigen effektiven Jahreszinssatz i , bei dem der Obsthändler sein Sparziel genau erreichen würde.
- 2) Begründen Sie ohne Berechnung, warum der zugehörige effektive Jahreszinssatz niedriger ist, wenn die monatlichen Einzahlungen vorschüssig erfolgen.

- c) Die tägliche Nachfrage X nach einer bestimmten Obstsorte ist bei diesem Obsthändler annähernd normalverteilt. Der Graph der zugehörigen Verteilungsfunktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



- 1) Lesen Sie aus der Abbildung den Erwartungswert μ und die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 14)$ ab.

$$\mu = \underline{\hspace{2cm}} \text{ ME}$$

$$P(X \leq 14) = \underline{\hspace{2cm}}$$

- 2) Ermitteln Sie mithilfe der abgelesenen Werte die Standardabweichung von X .

Der Obsthändler möchte herausfinden, welche Menge dieser Obstsorte er lagern sollte (Bestandsmenge). Zur Ermittlung der optimalen Bestandsmenge kann das sogenannte *Zeitungsjungen-Modell* verwendet werden.

Laut diesem Modell ist die Bestandsmenge q dann optimal, wenn Folgendes gilt:

Die Wahrscheinlichkeit, dass die tägliche Nachfrage höchstens q ist, beträgt $\frac{p-c}{p}$, also:

$$P(X \leq q) = \frac{p-c}{p}$$

q ... optimale Bestandsmenge in ME

c ... Einkaufspreis in GE/ME

p ... Verkaufspreis in GE/ME

- 3) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung für $c = 2$ GE/ME und $p = 5$ GE/ME die zugehörige optimale Bestandsmenge.

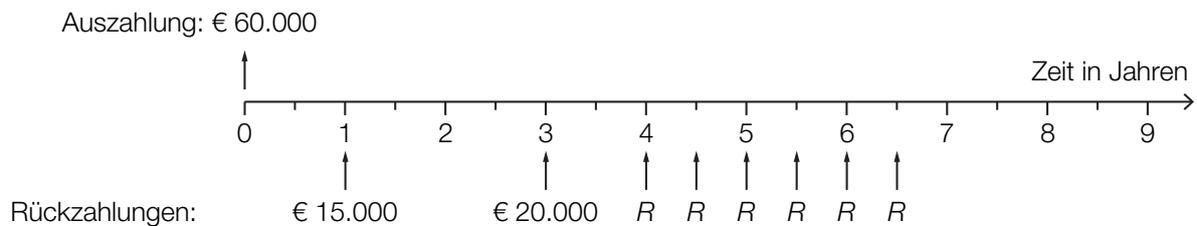
Man betrachtet den Ausdruck $\frac{p-c}{p}$ mit $p \neq 0$.

4) Kreuzen Sie die auf diesen Ausdruck zutreffende Aussage an. [1 aus 5]

Wenn man für p und c die gleiche positive Zahl einsetzt, ist der Ausdruck $\frac{p-c}{p}$ nicht definiert.	<input type="checkbox"/>
Der Ausdruck $\frac{p-c}{p}$ kann auch in der Form $p - c : p$ angeschrieben werden.	<input type="checkbox"/>
Wenn sowohl p als auch c verdoppelt werden, bleibt der Wert des Ausdrucks $\frac{p-c}{p}$ unverändert.	<input type="checkbox"/>
Wenn p das Doppelte von c ist, dann hat der Ausdruck $\frac{p-c}{p}$ den Wert $\frac{1}{3}$.	<input type="checkbox"/>
Der Ausdruck $\frac{p-c}{p}$ kann für $p \neq 1$ zu $1 - c$ vereinfacht werden.	<input type="checkbox"/>

Möglicher Lösungsweg

a1)



$$\text{a2) } 60\,000 = \frac{15\,000}{1,03^2} + \frac{20\,000}{1,03^6} + R \cdot \frac{1,03^6 - 1}{0,03} \cdot \frac{1}{1,03^{13}} \Rightarrow R = 6\,609,203\dots$$

Die Ratenhöhe beträgt € 6.609,20.

b1) q_{12} ... monatlicher Aufzinsungsfaktor

$$60\,000 = 2\,400 \cdot \frac{q_{12}^{24} - 1}{q_{12} - 1}$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz: $q_{12} = 1,00353\dots$

$$i = q_{12}^{12} - 1 = 0,04319\dots$$

Der effektive Jahreszinssatz beträgt rund 4,32 %.

b2) Im Falle vorschüssiger Einzahlungen wird jede Einzahlung 1 Monat länger verzinst. Da der Endwert gleich hoch ist, muss im Vergleich zu nachschüssigen Einzahlungen der zugehörige effektive Jahreszinssatz niedriger sein.

c1) $\mu = 16 \text{ ME}$
 $P(X \leq 14) = 0,2$

c2) Berechnung mittels Technologieeinsatz: $\sigma = 2,376\dots$
 Die Standardabweichung beträgt rund 2,38 ME.

c3) $\frac{5-2}{5} = 0,6$

Ablesen derjenigen Menge q , für die gilt: $P(X \leq q) = 0,6$
 $q \approx 16,6 \text{ ME}$
 Toleranzbereich: $[16,4; 16,8]$

c4)

Wenn sowohl p als auch c verdoppelt werden, bleibt der Wert des Ausdrucks $\frac{p-c}{p}$ unverändert.	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel

- a1) 1 × A1: für das richtige Veranschaulichen der Rückzahlungen
 a2) 1 × A2: für den richtigen Ansatz
 1 × B: für das richtige Berechnen der Ratenhöhe
 b1) 1 × B: für das richtige Berechnen des effektiven Jahreszinssatzes
 b2) 1 × D: für das richtige Begründen
 c1) 1 × C1: für das richtige Ablesen des Erwartungswerts und der Wahrscheinlichkeit
 c2) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Standardabweichung
 c3) 1 × C2: für das richtige Ermitteln der optimalen Bestandsmenge
 (Toleranzbereich: $[16,4; 16,8]$)
 c4) 1 × C3: für das richtige Ankreuzen

Produktion von CD-Rohlingen und DVD-Rohlingen*

Aufgabennummer: B_490

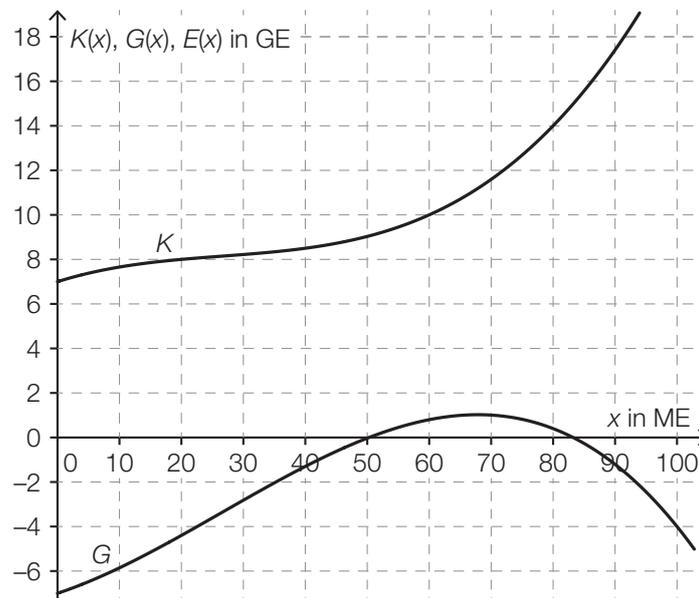
Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Unbeschriebene CDs und DVDs werden als *Rohlinge* bezeichnet.

- a) In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Kostenfunktion K und der Graph der Gewinnfunktion G für die Produktion von CD-Rohlingen dargestellt.



- 1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der zugehörigen linearen Erlösfunktion E ein.
- 2) Ermitteln Sie den Preis, zu dem die CD-Rohlinge verkauft werden.
- 3) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den maximalen Gewinn G_{\max} ab.

$G_{\max} \approx$ _____ GE

b) Für bestimmte hochwertige DVD-Rohlinge ist das Unternehmen Monopolist.

Für die Preisfunktion der Nachfrage p_N gilt:

$$p_N(x) = a \cdot x + b$$

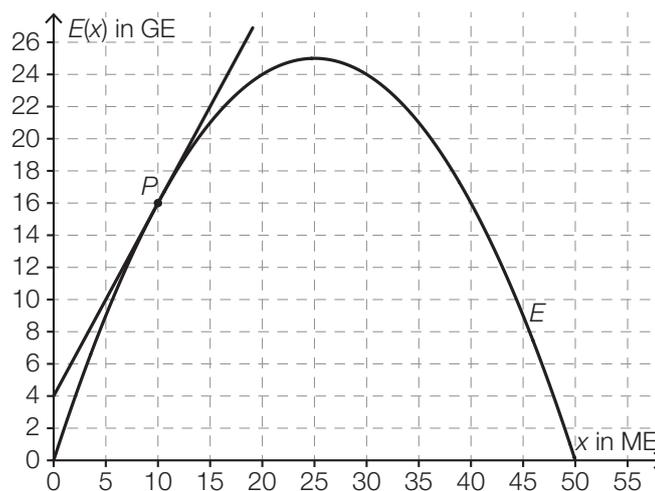
x ... nachgefragte Menge in ME

$p_N(x)$... Preis bei der nachgefragten Menge x in GE/ME

1) Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der die Sättigungsmenge angibt. [1 aus 5]

$\frac{a}{b}$	<input type="checkbox"/>
$\frac{b}{a}$	<input type="checkbox"/>
$-\frac{a}{b}$	<input type="checkbox"/>
$-\frac{b}{a}$	<input type="checkbox"/>
$-b - a$	<input type="checkbox"/>

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Erlösfunktion E für spezielle DVD-Rohlinge dargestellt. Zusätzlich ist die Tangente an den Graphen von E in einem Punkt P eingezeichnet.



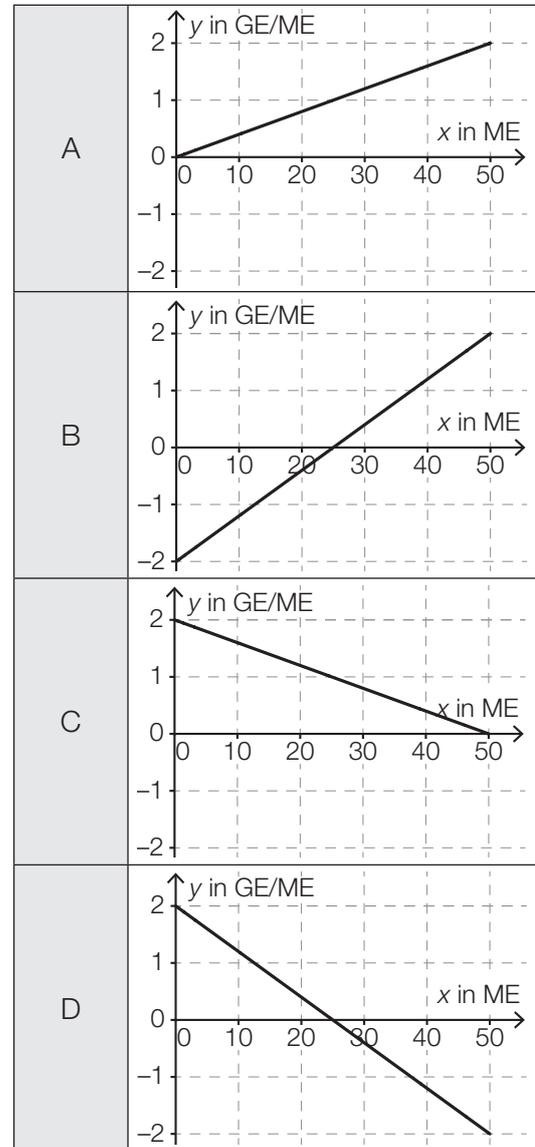
1) Bestimmen Sie mithilfe der obigen Abbildung die Steigung k der Tangente.

$k =$ _____ GE/ME

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung der Tangente im gegebenen Sachzusammenhang.

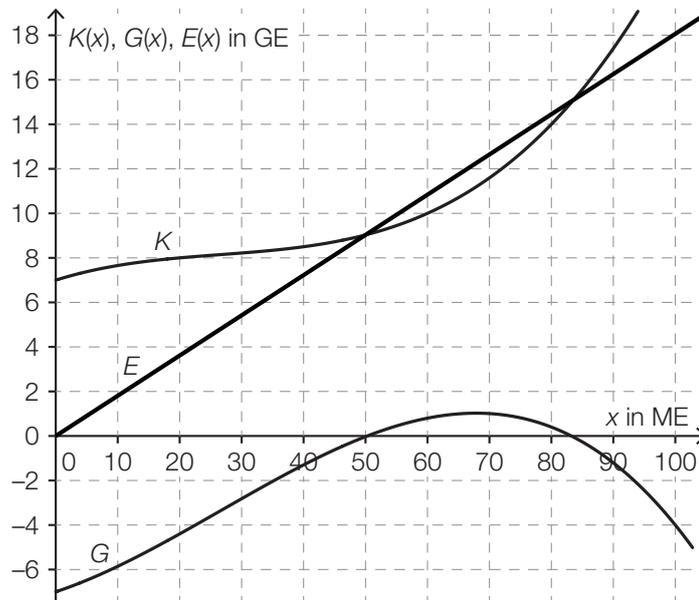
3) Ordnen Sie den beiden Funktionen jeweils den zugehörigen Graphen aus A bis D zu.
 [2 zu 4]

Grenzerlösfunktion E'	
Preisfunktion der Nachfrage p_N	



Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) $\rho = \frac{E(100)}{100} = \frac{18}{100} = 0,18$

Der Preis beträgt 0,18 GE/ME.

Toleranzbereich: $[0,16; 0,20]$

a3) $G_{\max} \approx 1$ GE

Toleranzbereich: $[0,8; 1,2]$

b1)

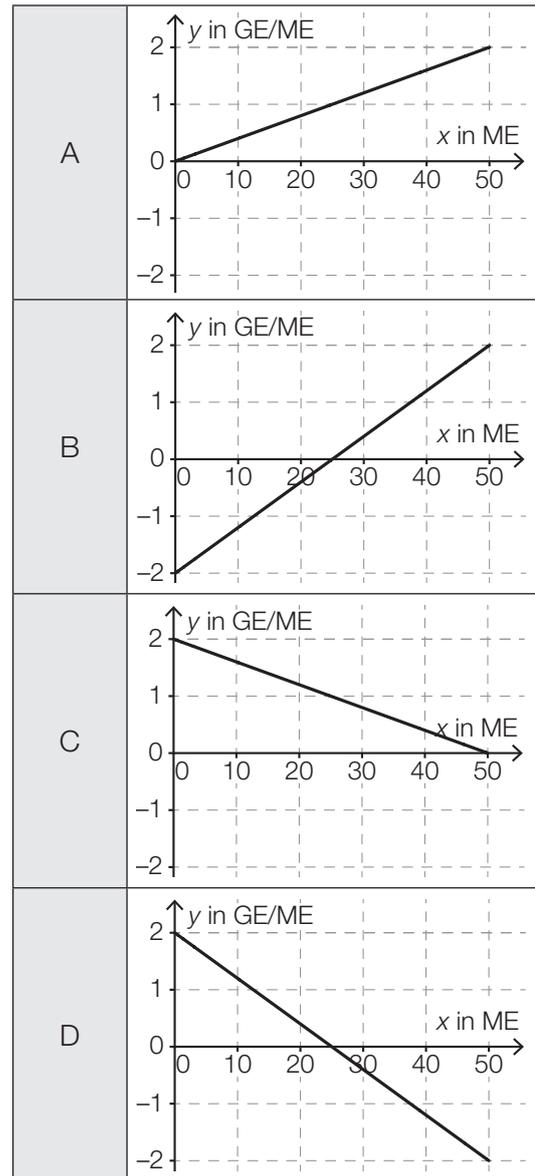
$-\frac{b}{a}$	<input checked="" type="checkbox"/>

c1) $k = 1,2 \text{ GE/ME}$

c2) Wird bei einem Absatz von 10 ME der Absatz um 1 ME erhöht, dann steigt der Erlös um rund 1,2 GE.

c3)

Grenzerlösfunktion E'	D
Preisfunktion der Nachfrage p_N	C



Lösungsschlüssel

- a1) 1 × B1: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Erlösfunktion
- a2) 1 × B2: für das richtige Ermitteln des Preises (Toleranzbereich: $[0,16; 0,20]$)
- a3) 1 × C: für das richtige Ablesen des maximalen Gewinns (Toleranzbereich: $[0,8; 1,2]$)
- b1) 1 × C: für das richtige Ankreuzen
- c1) 1 × C1: für das richtige Bestimmen der Steigung
- c2) 1 × C2: für das richtige Interpretieren des Wertes der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang
- c3) 1 × C3: für das richtige Zuordnen

Seifenherstellung*

Aufgabennummer: B_491

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

In einem Betrieb werden Seifen hergestellt und verpackt. Zur Herstellung von Seife werden die Rohstoffe *Sheabutter* (R_1), *verschiedene Öle* (R_2) und *Natronlauge* (R_3) verwendet.

a) In einer Produktionsschiene werden die beiden Seifen S_1 und S_2 hergestellt.

1. Produktionsstufe:

Für 1 ME von S_1 benötigt man 35 ME von R_1 , 80 ME von R_2 und 15 ME von R_3 .

Für 1 ME von S_2 benötigt man 50 ME von R_2 und 6 ME von R_3 .

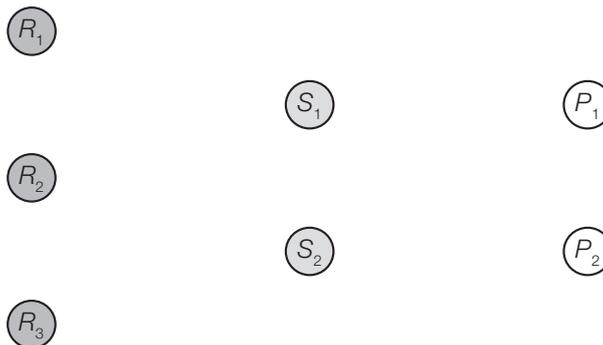
2. Produktionsstufe:

Beide Seifen werden in den 2 unterschiedlichen Packungen P_1 und P_2 zum Kauf angeboten.

In 1 Packung P_1 befinden sich 2 ME von S_1 und 1 ME von S_2 .

In 1 Packung P_2 befinden sich 2 ME von S_1 und 3 ME von S_2 .

1) Veranschaulichen Sie die Produktionsverflechtung von den Rohstoffen bis zu den Packungen als Gozinto-Graph.



2) Erstellen Sie die beiden Matrizen, die die einzelnen Produktionsstufen beschreiben.

3) Ermitteln Sie die Matrix \mathbf{A} , die den Mengenbedarf an Rohstoffen für die Zusammenstellung der Packungen beschreibt.

Ein Kunde bestellt 20 Packungen P_1 und 30 Packungen P_2 .

4) Ermitteln Sie den Mengenbedarf an Rohstoffen für diese Bestellung.

- b) In einer anderen Produktionsschiene werden aus den 3 Rohstoffen R_1 , R_2 und R_3 die Seifen S_3 und S_4 hergestellt. Die Seifen werden in Form einer Geschenkpackung P verkauft.

Die Produktionsverflechtung wird durch die nachstehende Tabelle beschrieben. Die eingetragenen Werte entsprechen den ME im Produktionsprozess.

	R_1	R_2	R_3	S_3	S_4	P
R_1	0	0	0	15	10	0
R_2	0	0	0	75	52	0
R_3	0	0	0	9,6	8,5	0
S_3	0	0	0	0	0	2
S_4	0	0	0	0	0	2
P	0	0	0	0	0	0

Die Summe der Einträge in der 3. Zeile beträgt 18,1.

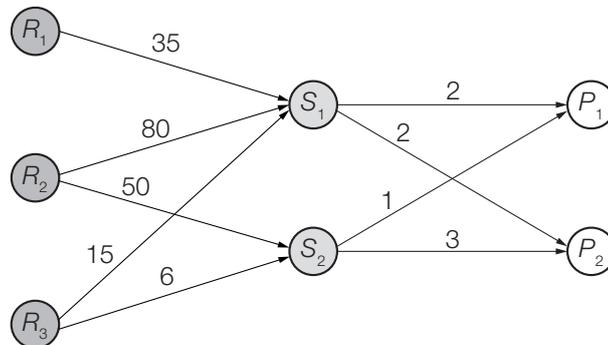
- 1) Interpretieren Sie den Wert 18,1 im Zusammenhang mit der Produktion der beiden Seifen.
- 2) Lesen Sie aus der obigen Tabelle ab, wie viele ME Seife sich in einer Geschenkpackung befinden.

Im Lager befinden sich 1 260 ME von R_1 und 6 340 ME von R_2 .

- 3) Überprüfen Sie nachweislich, ob bei diesem Lagerstand jeweils 50 ME von den beiden Seifen S_3 und S_4 hergestellt werden können.

Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) Matrix für 1. Produktionsstufe: $\begin{pmatrix} 35 & 0 \\ 80 & 50 \\ 15 & 6 \end{pmatrix}$

Matrix für 2. Produktionsstufe: $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

a3) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 35 & 0 \\ 80 & 50 \\ 15 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 & 70 \\ 210 & 310 \\ 36 & 48 \end{pmatrix}$

a4) $\begin{pmatrix} 70 & 70 \\ 210 & 310 \\ 36 & 48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3500 \\ 13500 \\ 2160 \end{pmatrix}$

Für diese Bestellung benötigt man 3500 ME von R_1 , 13500 ME von R_2 und 2160 ME von R_3 .

b1) Für 1 ME von S_3 und 1 ME von S_4 benötigt man insgesamt 18,1 ME von R_3 (Natronlauge).

b2) In einer Geschenkpackung befinden sich 4 ME Seife.

b3) Rohstoffbedarf R_1 : $15 \cdot 50 + 10 \cdot 50 = 1250$

Rohstoffbedarf R_2 : $75 \cdot 50 + 52 \cdot 50 = 6350 > 6340$

Nein, diese Mengen können nicht hergestellt werden, da von R_2 zu wenig auf Lager ist.

Lösungsschlüssel

- a1) 1 × A1: für das richtige Veranschaulichen als Gozinto-Graph
- a2) 1 × A2: für das richtige Erstellen der beiden Matrizen
- a3) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Matrix **A**
- a4) 1 × B2: für das richtige Ermitteln des Mengenbedarfs
- b1) 1 × C1: für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang
- b2) 1 × C2: für das richtige Ablesen
- b3) 1 × D: für das richtige nachweisliche Überprüfen

Schlafdauer*

Aufgabennummer: B_492

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Es wurden verschiedene Untersuchungen zur durchschnittlichen täglichen Schlafdauer unterschiedlicher Personengruppen durchgeführt.

- a) Das Ergebnis einer Befragung von 50 Personen zur Schlafdauer ist in der nachstehenden Tabelle angegeben.

Schlafdauer in Stunden	6	7	8	9	10
Anzahl der Personen	3	16	20	10	1

- 1) Berechnen Sie das arithmetische Mittel der Schlafdauer dieser 50 Personen.

Bei 9 Personen wurden die Schlafdauer und die Fernsehzeit erhoben:

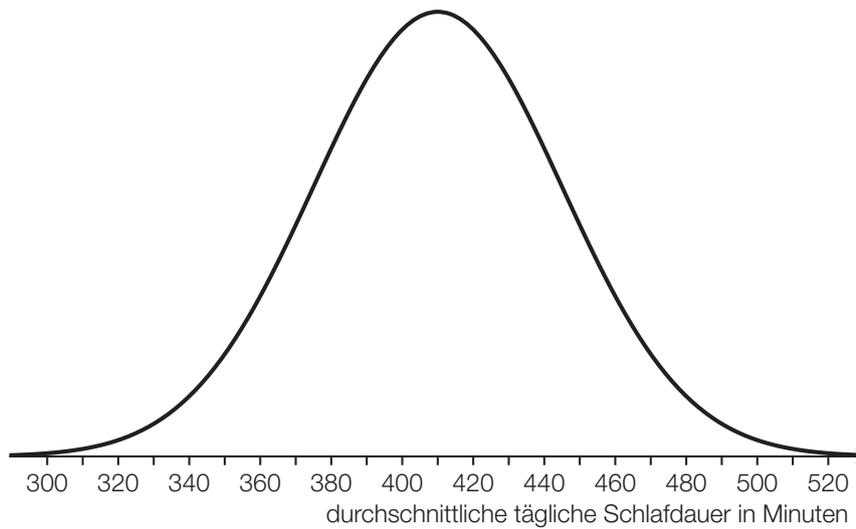
Schlafdauer in Stunden	6	7	7	8	8	9	9	10	10
Fernsehzeit in Stunden	4	4	2	3	3	2	2	1	2

Die Fernsehzeit soll in Abhängigkeit von der Schlafdauer beschrieben werden.

- 2) Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion.
- 3) Interpretieren Sie das Vorzeichen der Steigung der Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.
- 4) Berechnen Sie gemäß diesem Modell die Fernsehzeit bei einer Schlafdauer von 7,5 h.
- b) Die durchschnittliche tägliche Schlafdauer X von älteren Personen ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 364$ min und der Standardabweichung $\sigma = 50$ min.
- 1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte ältere Person eine durchschnittliche tägliche Schlafdauer zwischen 300 min und 480 min hat.
- 2) Tragen Sie in der nachstehenden Gleichung die fehlende Zahl in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

$$P(X \geq 400) = P\left(X \leq \boxed{}\right)$$

- c) Für die Altersgruppe von 19 bis 39 Jahren ist die durchschnittliche tägliche Schlafdauer annähernd normalverteilt. Die zugehörige Dichtefunktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



- 1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Erwartungswert μ ab.

$$\mu = \underline{\hspace{2cm}} \text{ min}$$

Für eine andere Altersgruppe beträgt der Erwartungswert 399 min. Die Standardabweichung ist die gleiche wie in der Altersgruppe von 19 bis 39 Jahren.

- 2) Beschreiben Sie, wie sich der Graph der Dichtefunktion für diese Altersgruppe vom oben abgebildeten Graphen unterscheidet.

Möglicher Lösungsweg

a1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$\bar{x} = 7,8 \text{ h}$$

a2) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$$f(x) = -0,5857 \cdot x + 7,3714 \quad (\text{Koeffizienten gerundet})$$

x ... Schlafdauer in Stunden

$f(x)$... Fernsehzeit bei der Schlafdauer x in Stunden

a3) Wird die Schlafdauer erhöht, so sinkt die Fernsehzeit.

a4) $f(7,5) = 2,9\dots$

Bei einer Schlafdauer von 7,5 h beträgt die Fernsehzeit gemäß diesem Modell rund 3 h.

b1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$P(300 < X < 480) = 0,889\dots$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 89 %.

b2) $P(X \geq 400) = P(X \leq \boxed{328})$

c1) $\mu = 410 \text{ min}$

Toleranzbereich: [405; 415]

c2) Der Graph der zugehörigen Dichtefunktion ist im Vergleich zum abgebildeten Graphen nach links verschoben.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B1: für das richtige Berechnen des arithmetischen Mittels

a2) 1 × B2: für das richtige Ermitteln der Gleichung der linearen Regressionsfunktion

a3) 1 × C: für das richtige Interpretieren des Vorzeichens der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang

a4) 1 × B3: für das richtige Berechnen der Fernsehzeit

b1) 1 × B: für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit

b2) 1 × A: für das richtige Eintragen der fehlenden Zahl

c1) 1 × C1: für das richtige Ablesen des Erwartungswerts (Toleranzbereich: [405; 415])

c2) 1 × C2: für das richtige Beschreiben

Streaming*

Aufgabennummer: B_501

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Ein Fernsehsender entschließt sich, einen Streaming-Dienst für Filme auf den Markt zu bringen. Damit können Filme über das Internet abgespielt werden.

Die Zeit nach der Markteinführung in Monaten wird mit t bezeichnet.

a) Bei der Markteinführung ($t = 0$) nutzen 1 000 Kunden dieses Angebot.

Die Anzahl der Kunden steigt im 1. Jahr nach der Markteinführung pro Monat jeweils um etwa 20 % bezogen auf die Anzahl des jeweiligen Vormonats.

Die Anzahl der Kunden soll in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.

- 1) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Funktion.
- 2) Berechnen Sie die Anzahl der Kunden für $t = 7$.
- 3) Berechnen Sie, wie lange es nach der Markteinführung dauert, bis die Anzahl der Kunden erstmals 8 000 übersteigt.

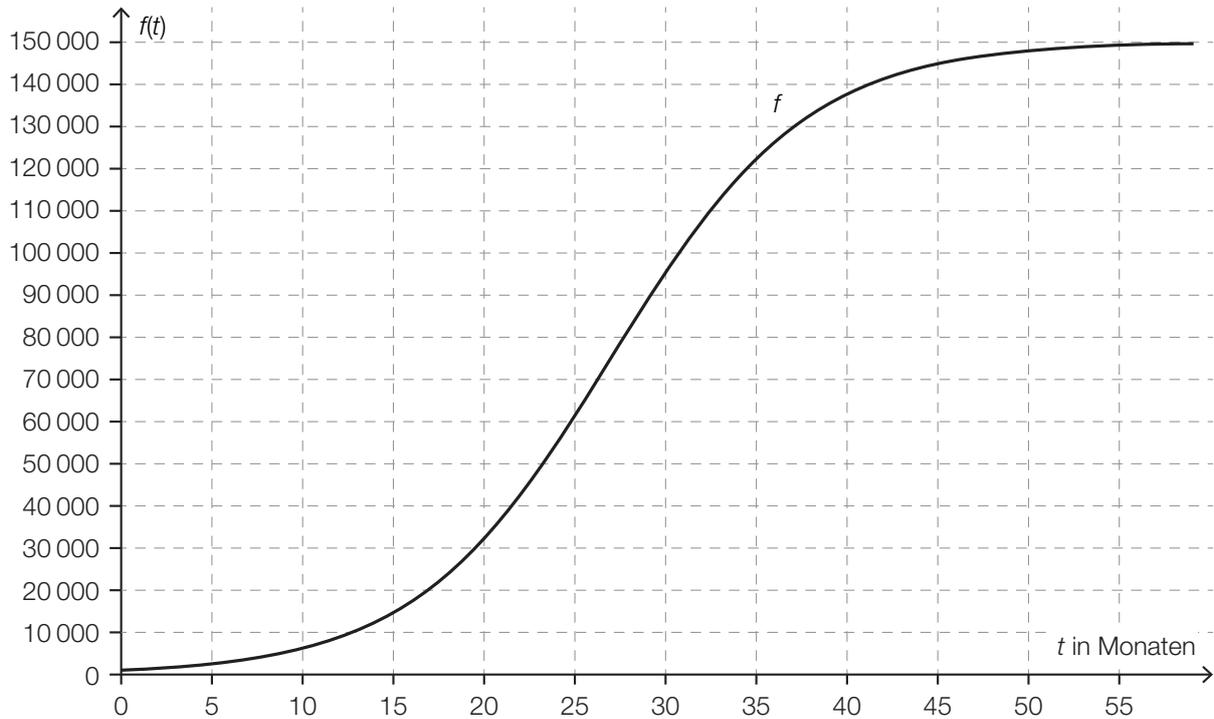
b) In der nachstehenden Tabelle ist die Anzahl der Kunden für einen bestimmten Zeitraum angegeben.

Zeit t in Monaten	18	20	24	26	28
Anzahl der Kunden	23 800	32 200	54 600	68 000	81 900

Die Anzahl der Kunden soll in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.

- 1) Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion.

- c) Die über einen längeren Zeitraum betrachtete zeitliche Entwicklung der Anzahl der Kunden kann näherungsweise durch die logistische Funktion f beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



- 1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Zeitpunkt des stärksten Wachstums der Anzahl der Kunden ab.

Für die Funktion f gilt: $f(t) = \frac{150\,000}{1 + c \cdot e^{-\lambda \cdot t}}$

Bei der Markteinführung ($t = 0$) nutzen 1 000 Kunden dieses Angebot.

- 2) Ermitteln Sie die Parameter c und λ der Funktion f .

Möglicher Lösungsweg

a1) $N(t) = 1000 \cdot 1,2^t$

a2) $N(7) = 3583,1\dots$

Zur Zeit $t = 7$ nutzen rund 3583 Kunden das Angebot.

a3) $N(t) = 8000$ oder $1000 \cdot 1,2^t = 8000$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
 $t = 11,40\dots$

b1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:
 $A(t) = 5820 \cdot t - 82919$ (Koeffizienten gerundet)

c1) 27 Monate nach der Markteinführung wächst die Anzahl der Kunden am stärksten.
 Toleranzbereich: $[25; 29]$

c2) $f(0) = 1000$ oder $\frac{150000}{1+c} = 1000 \Rightarrow c = 149$

$$f(27) = 75000 \text{ oder } \frac{150000}{1 + 149 \cdot e^{-\lambda \cdot 27}} = 75000$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
 $\lambda = 0,185\dots$

Die Verwendung anderer Punkte auf dem Graphen von f für das Ermitteln des Parameters λ ist ebenfalls als richtig zu werten.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung

a2) 1 × B1: für das richtige Berechnen der Anzahl der Kunden

a3) 1 × B2: für das richtige Berechnen der Zeitdauer

b1) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Gleichung der Regressionsfunktion

c1) 1 × C1: für das richtige Ablesen des Zeitpunkts des stärksten Wachstums (Toleranzbereich: $[25; 29]$)

c2) 1 × B1: für das richtige Ermitteln des Parameters c

1 × B2: für das richtige Ermitteln des Parameters λ

Wohnanlage*

Aufgabennummer: B_502

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Eine Wohnanlage wird saniert.

- a) Die Kosten für die Sanierung in Höhe von € 52.647,60 werden proportional zur Wohnungsgröße aufgeteilt.
Die jeweiligen Größen der 4 Wohnungen sind: 52 m², 60 m², 78 m² und 102 m².

1) Berechnen Sie den Kostenanteil für die Sanierung der größten Wohnung in Euro.

- b) Zur Finanzierung der Sanierung nehmen die Wohnungseigentümer einen Kredit in Höhe von € 20.000 auf.

Sie vereinbaren mit der Bank, den Kredit durch 6 vorschüssige Jahresraten R zu tilgen. Die erste Jahresrate ist nach 3 Jahren fällig. Für die Rückzahlung wird der Jahreszinssatz i vereinbart.

1) Veranschaulichen Sie diesen Zahlungsstrom (Kreditbetrag und Jahresraten) auf einer Zeitachse.

2) Erstellen Sie eine Gleichung zur Berechnung von R . Verwenden Sie dabei den Jahreszinssatz i .

Unmittelbar vor dem Bezahlen der 1. Jahresrate entscheiden sich die Wohnungseigentümer dafür, bei ansonsten gleichbleibenden Bedingungen den Kredit mit nur 3 Jahresraten zu tilgen.

3) Argumentieren Sie, dass diese neuen Jahresraten weniger als doppelt so hoch wie die zuvor vereinbarten Jahresraten sind.

- c) Eine andere Bank unterbreitet den Wohnungseigentümern zur Rückzahlung eines Kredits ein Angebot, bei dem der Kredit bei einem fixen Jahreszinssatz in 5 Jahren vollständig getilgt wird.

Im Folgenden ist ein Teil des Tilgungsplans dargestellt.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	---	---	---	€ 20.000,00
1	€ 600,00		€ 600,00	
2	€ 600,00		€ 5.500,00	€ 15.100,00
3			€ 5.500,00	€ 10.053,00
4			€ 5.500,00	€ 4.854,59
5				€ 0,00

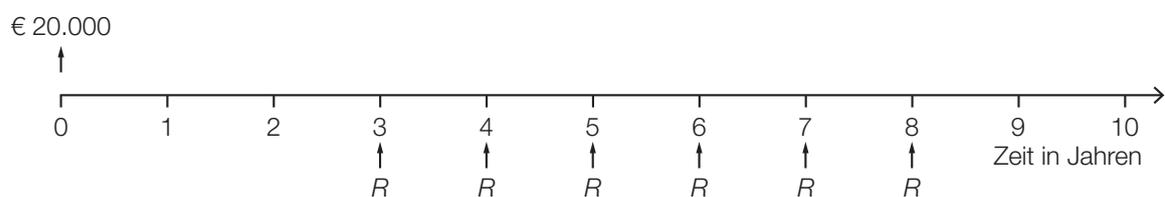
- 1) Berechnen Sie den Jahreszinssatz des Kredits.
- 2) Tragen Sie im obigen Tilgungsplan die fehlenden Beträge in die grau markierten Zellen ein.

Möglicher Lösungsweg

$$\text{a1) } 52647,60 \cdot \frac{102}{52 + 60 + 78 + 102} = 18390,60$$

Der Kostenanteil für die Sanierung der größten Wohnung beträgt € 18.390,60.

b1)



$$\text{b2) } 20000 \cdot (1+i)^3 = R \cdot \frac{(1+i)^6 - 1}{i} \cdot \frac{1}{(1+i)^5}$$

Auch eine Verwendung des Aufzinsungsfaktors $q = 1 + i$ ist als richtig zu werten.

b3) Da das Geld früher zurückgezahlt wird, fallen weniger Zinsen an, und damit sind die Raten weniger als doppelt so hoch.

$$\text{c1) } i = \frac{600}{20000} = 0,03 = 3\%$$

c2)

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	---	---	---	€ 20.000,00
1	€ 600,00	€ 0,00	€ 600,00	
2	€ 600,00		€ 5.500,00	€ 15.100,00
3			€ 5.500,00	€ 10.053,00
4			€ 5.500,00	€ 4.854,59
5	€ 145,64	€ 4.854,59	€ 5.000,23	€ 0,00

Lösungsschlüssel

- a1) 1 × B: für das richtige Berechnen des Kostenanteils
- b1) 1 × A1: für das richtige Veranschaulichen des Zahlungsstroms auf der Zeitachse
- b2) 1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung
- b3) 1 × D: für das richtige Argumentieren
- c1) 1 × B1: für das richtige Berechnen des Jahreszinssatzes
- c2) 1 × A: für das richtige Eintragen des Tilgungsanteils im Jahr 1
1 × B2: für das richtige Eintragen der 3 Beträge in die letzte Zeile des Tilgungsplans

Scharniere*

Aufgabennummer: B_503

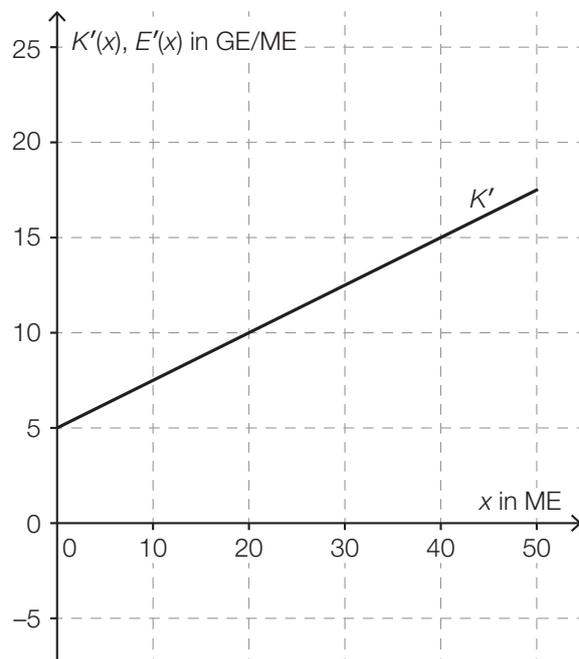
Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Ein Unternehmen stellt Scharniere her.

- a) In der nebenstehenden Abbildung ist der Graph der linearen Grenzkostenfunktion K' für die Herstellung von *Clip*-Scharnieren dargestellt.



- 1) Erstellen Sie eine Gleichung der Grenzkostenfunktion K' .

Die Fixkosten für die Herstellung von *Clip*-Scharnieren betragen 50 GE.

- 2) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K .

Die Grenzerlösfunktion E' für *Clip*-Scharniere ist gegeben durch:

$$E'(x) = -0,5 \cdot x + 20$$

x ... Absatzmenge in ME

$E'(x)$... Grenzerlös bei der Absatzmenge x in GE/ME

- 3) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Grenzerlösfunktion E' im Intervall $[0; 50]$ ein.

- 4) Interpretieren Sie die Nullstelle der Grenzerlösfunktion E' in Bezug auf den Erlös.

- b) Die Durchschnittskosten für die Herstellung des Scharniers *Modul* lassen sich durch die Durchschnittskostenfunktion \bar{K} mit $\bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$ beschreiben:

$$\bar{K}(x) = 0,25 \cdot x + 3 + \frac{1}{x}$$

x ... Produktionsmenge in ME

$\bar{K}(x)$... Durchschnittskosten bei der Produktionsmenge x in GE/ME

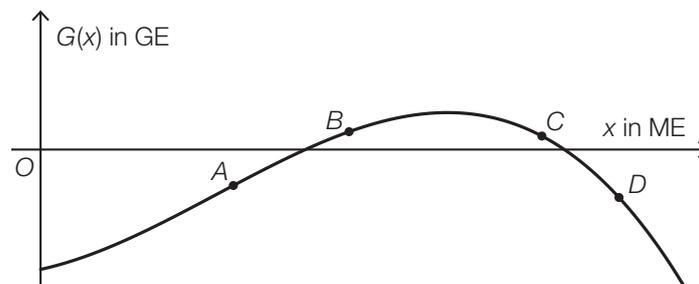
Es werden folgende Rechenschritte ausgeführt:

$$\bar{K}'(x) = 0,25 - \frac{1}{x^2}$$

$$0,25 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{0,25}}$$

$$x_1 = 2, \quad (x_2 = -2)$$

- 1) Interpretieren Sie die Lösung $x_1 = 2$ im gegebenen Sachzusammenhang.
 - 2) Zeigen Sie mithilfe der Regel zum Ableiten von Potenzfunktionen, dass man als Ableitung von $\frac{1}{x}$ den Ausdruck $-\frac{1}{x^2}$ erhält.
- c) In der unten stehenden Abbildung ist der Graph der Gewinnfunktion G für das Scharnier *Top* dargestellt.
Auf dem Graphen der Gewinnfunktion G sind die Punkte A , B , C und D eingezeichnet.



- 1) Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils den zutreffenden Punkt aus A bis D zu. [2 zu 4]

$G(x) > 0$ und $G'(x) > 0$	
$G(x) < 0$ und $G'(x) < 0$	

A	Punkt A
B	Punkt B
C	Punkt C
D	Punkt D

d) Der Gewinn für das Scharnier *Cardo* kann durch die Funktion G beschrieben werden:

$$G(x) = -0,01 \cdot x^3 + 0,28 \cdot x^2 + 1,75 \cdot x - 50$$

x ... Absatzmenge in ME

$G(x)$... Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

- 1) Ermitteln Sie die untere Gewinngrenze.
- 2) Ermitteln Sie den maximalen Gewinn.

Möglicher Lösungsweg

a1) $K'(x) = 0,25 \cdot x + 5$

x ... Produktionsmenge in ME

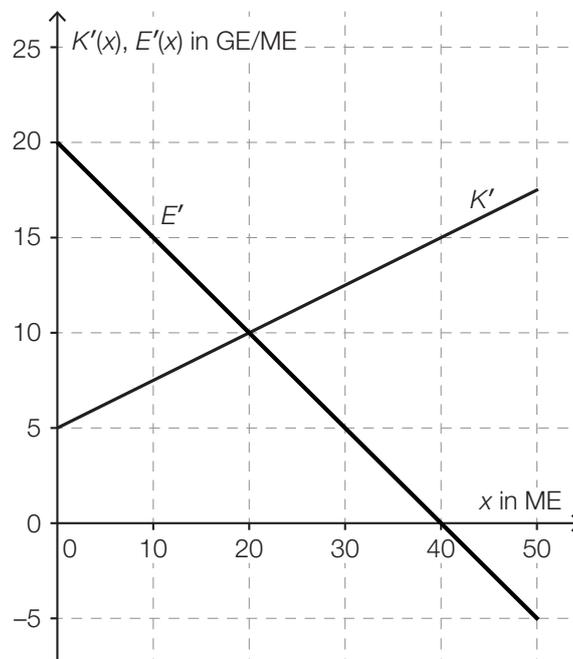
$K'(x)$... Grenzkosten bei der Produktionsmenge x in GE

a2) $K(x) = \int (0,25 \cdot x + 5) dx = 0,125 \cdot x^2 + 5 \cdot x + C$

$K(0) = 50 \Rightarrow C = 50$

$K(x) = 0,125 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 50$

a3)



a4) Die Nullstelle der Grenzerlösfunktion ist diejenige Absatzmenge, bei der der Erlös maximal ist.

b1) Bei dieser Produktionsmenge handelt es sich um das Betriebsoptimum.

oder:

Bei dieser Produktionsmenge sind die Durchschnittskosten minimal.

b2) $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

c1)

$G(x) > 0$ und $G'(x) > 0$	B
$G(x) < 0$ und $G'(x) < 0$	D

A	Punkt A
B	Punkt B
C	Punkt C
D	Punkt D

d1) $G(x) = 0$ oder $-0,01 \cdot x^3 + 0,28 \cdot x^2 + 1,75 \cdot x - 50 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$x_1 = 13,48... \quad (x_2 = 27,83...; x_3 = -13,31...)$$

Die untere Gewinnngrenze liegt bei rund 13,5 ME.

d2) $G'(x) = 0$ oder $-0,03 \cdot x^2 + 0,56 \cdot x + 1,75 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$x_1 = 21,39... \quad (x_2 = -2,72...)$$

$$G(21,39...) = 17,67...$$

Der maximale Gewinn beträgt rund 17,7 GE.

Lösungsschlüssel

- a1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichung der Grenzkostenfunktion
a2) 1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung der Kostenfunktion
a3) 1 × A3: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Grenzerlösfunktion
a4) 1 × C: für das richtige Interpretieren der Nullstelle der Grenzerlösfunktion in Bezug auf den Erlös
b1) 1 × C: für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang
b2) 1 × D: für das richtige Zeigen
c1) 1 × C: für das richtige Zuordnen
d1) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der unteren Gewinnngrenze
d2) 1 × B2: für das richtige Ermitteln des maximalen Gewinns

Scheiben für PKWs*

Aufgabennummer: B_527

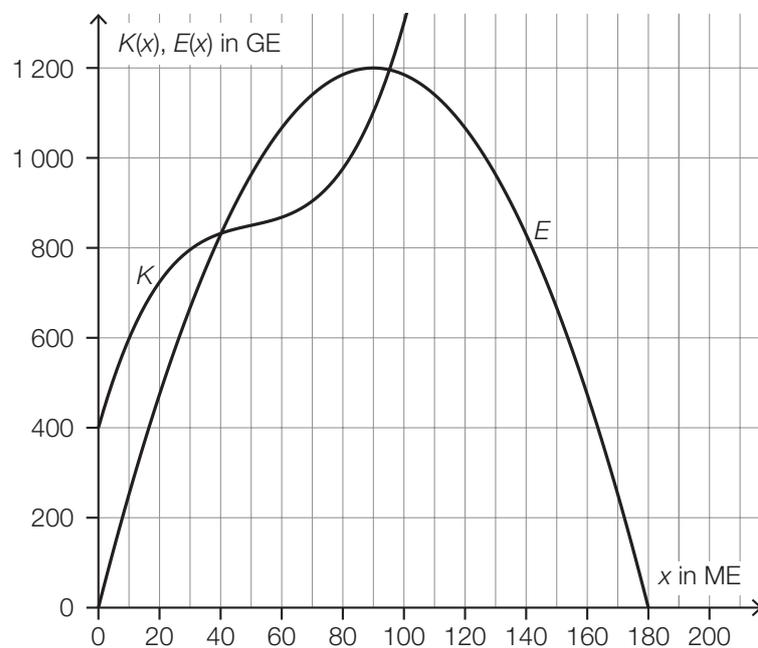
Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Ein Betrieb stellt Frontscheiben und Heckscheiben für PKWs her.

- a) In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Kostenfunktion K und der Graph der quadratischen Erlösfunktion E für Frontscheiben eines bestimmten Typs dargestellt.



- 1) Stellen Sie eine Gleichung der quadratischen Erlösfunktion E auf.
- 2) Stellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Preisfunktion der Nachfrage auf.
- 3) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die Gewinnzone ab.

[_____ ; _____]

- b) Die variablen Kosten bei der Produktion von Heckscheiben eines bestimmten Typs können durch die Funktion K_v beschrieben werden.

$$K_v(x) = 0,0029 \cdot x^3 - 0,45 \cdot x^2 + 24 \cdot x$$

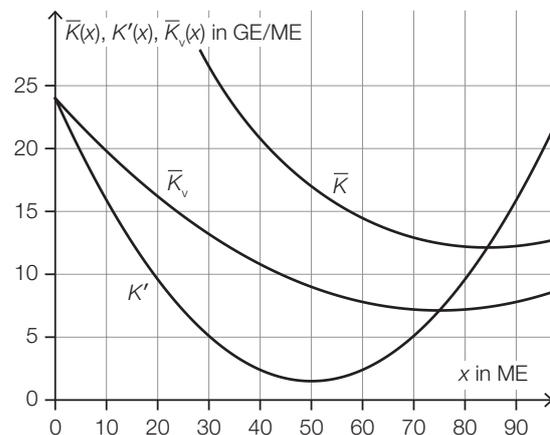
x ... produzierte Menge in ME

$K_v(x)$... variable Kosten bei der produzierten Menge x in GE

Die Fixkosten betragen 450 GE.

- 1) Berechnen Sie die langfristige Preisuntergrenze.

In der nebenstehenden Abbildung sind der Graph der Durchschnittskostenfunktion \bar{K} , der Graph der Grenzkostenfunktion K' und der Graph der variablen Durchschnittskostenfunktion \bar{K}_v dargestellt.



- 2) Kreuzen Sie diejenige Größe an, die nicht unmittelbar aus der obigen Abbildung abgelesen werden kann. [1 aus 5]

Kostenkehre	<input type="checkbox"/>
Fixkosten	<input type="checkbox"/>
Betriebsminimum	<input type="checkbox"/>
Betriebsoptimum	<input type="checkbox"/>
kurzfristige Preisuntergrenze	<input type="checkbox"/>

Die Preisfunktion der Nachfrage p_N für Heckscheiben dieses Typs ist gegeben durch:

$$p_N(x) = -0,16 \cdot x + 30$$

x ... nachgefragte Menge in ME

$p_N(x)$... Preis bei der nachgefragten Menge x in GE/ME

- 3) Geben Sie den Höchstpreis an.
4) Berechnen Sie den Cournot'schen Preis.

Möglicher Lösungsweg

a1) $E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$

$$E(180) = 0$$

$$E(90) = 1200$$

oder:

$$a \cdot 180^2 + b \cdot 180 = 0$$

$$a \cdot 90^2 + b \cdot 90 = 1200$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$a = -\frac{4}{27} = -0,148\dots$$

$$b = \frac{80}{3} = 26,6\dots$$

$$E(x) = -\frac{4}{27} \cdot x^2 + \frac{80}{3} \cdot x$$

a2) $p_N(x) = -\frac{4}{27} \cdot x + \frac{80}{3}$

a3) [40; 95]

Toleranzbereich für die obere Gewinngrenze: [93; 97]

b1) $\bar{K}(x) = 0,0029 \cdot x^2 - 0,45 \cdot x + 24 + \frac{450}{x}$

$$\bar{K}'(x) = 0$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$x = 87,678\dots$$

$$\bar{K}(87,678\dots) = 11,970\dots$$

Die langfristige Preisuntergrenze beträgt rund 11,97 GE/ME.

b2)

Fixkosten	<input checked="" type="checkbox"/>

b3) Höchstpreis: 30 GE/ME

b4) $G(x) = p_N(x) \cdot x - K(x) = -0,0029 \cdot x^3 + 0,29 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 450$

$$G'(x) = -0,0087 \cdot x^2 + 0,58 \cdot x + 6$$

$$G'(x) = 0 \quad \text{oder} \quad -0,0087 \cdot x^2 + 0,58 \cdot x + 6 = 0$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$(x_1 = -9,102\dots), x_2 = 75,768\dots$$

$$p_N(75,768\dots) = 17,876\dots$$

Der Cournot'sche Preis beträgt rund 17,88 GE/ME.

Lösungsschlüssel

- a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Erlösfunktion E .
- a2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage p_N .
- a3) Ein Punkt für das Ablesen der richtigen Gewinnzone.
- b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der langfristigen Preisuntergrenze.
- b2) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.
- b3) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Höchstpreises.
- b4) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Cournot'schen Preises.

Zinsentwicklung*

Aufgabennummer: B_528

Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Die Zinssätze für Kredite und Spareinlagen unterliegen zeitabhängigen Schwankungen.

- a) Der Zinssatz für einen Kredit bei einer Bank ist unter anderem auch davon abhängig, welchen Verwendungszweck dieser hat.
Konsumkredite dienen der Finanzierung von Konsumgütern oder Dienstleistungen.
Immobilienkredite dienen der Wohnbaufinanzierung.

In der nachstehenden Tabelle ist die Entwicklung der Zinssätze für beide Verwendungszwecke im Zeitraum von 2000 bis 2004 in Österreich dargestellt.

Jahr	2000	2001	2002	2003	2004
Zinssatz für Konsumkredite in % p. a.	6,63	6,69	6,06	5,42	5,18
Zinssatz für Immobilienkredite in % p. a.	5,87	5,93	5,35	4,41	3,90

Datenquelle: <https://www.oenb.at/Statistik/Standardisierte-Tabellen/zinssaetze-und-wechselkurse/Zinssaetze-der-Kreditinstitute.html> [04.08.2021].

- 1) Stellen Sie eine Gleichung der Regressionsgeraden für den Zusammenhang zwischen dem Zinssatz für Konsumkredite x und dem Zinssatz für Immobilienkredite y im angegebenen Zeitraum auf.
- 2) Beurteilen Sie mithilfe des Korrelationskoeffizienten, ob die Regressionsgerade ein geeignetes Modell darstellt, um diesen Zusammenhang zu beschreiben.

Der Zinssatz im Jahr 2005 betrug für Konsumkredite 4,89 % p. a. und für Immobilienkredite 3,58 % p. a.

- 3) Berechnen Sie die Differenz zwischen dem tatsächlichen Zinssatz für Immobilienkredite im Jahr 2005 und dem mithilfe der Regressionsgeraden ermittelten entsprechenden Zinssatz.

- b) Bei Abschluss eines Kreditvertrags kann festgelegt werden, ob der Zinssatz während der gesamten Laufzeit konstant bleibt oder ob sich der Zinssatz entsprechend der aktuellen Marktlage immer wieder verändert.

In der nachstehenden Tabelle ist ein Ausschnitt aus einem Tilgungsplan dargestellt.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 50.000,00
1	€ 2.100,00	€ 4.900,00	€ 7.000,00	€ 45.100,00
2	€ 1.894,20	€ 5.105,80	€ 7.000,00	€ 39.994,20
3	€ 1.399,80		€ 7.000,00	

- 1) Überprüfen Sie nachweislich, ob sich der Zinssatz innerhalb der dargestellten 3 Jahre verändert hat.
 - 2) Tragen Sie in der obigen Tabelle die beiden fehlenden Beträge im Jahr 3 ein.
- c) Ein Geldbetrag B wird 2 Jahre lang mit dem Jahreszinssatz i_0 verzinst, danach weitere 3 Jahre mit einem geänderten Jahreszinssatz i_1 .

- 1) Stellen Sie eine Formel für den Endwert E am Ende dieser 5 Jahre auf. Verwenden Sie dabei B , i_0 und i_1 .

$$E = \underline{\hspace{10cm}}$$

- 2) Berechnen Sie für $i_0 = 3\%$ und $i_1 = 1\%$ denjenigen gleichbleibenden Jahreszinssatz i , bei dem der Betrag B innerhalb von 5 Jahren auf den gleichen Endwert E anwächst.

Möglicher Lösungsweg

a1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$y = 1,3031 \cdot x - 2,7216 \quad (\text{Koeffizienten gerundet})$$

x ... Zinssatz für Konsumkredite in % p. a.

y ... Zinssatz für Immobilienkredite in % p. a.

a2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$r = 0,9909\dots$$

Der Korrelationskoeffizient liegt sehr nahe bei 1, daher besteht ein starker positiver linearer Zusammenhang zwischen dem Zinssatz für Konsumkredite und dem Zinssatz für Immobilienkredite.

a3) Mit $x = 4,89$ erhält man:

$$1,3031\dots \cdot 4,89 - 2,7216\dots = 3,65\dots$$

tatsächlicher Zinssatz: 3,58

$$\text{Differenz der Zinssätze: } 3,65\dots - 3,58 = 0,07\dots$$

Auch $-0,07\dots$ ist als richtig zu werten.

b1) Zinssatz im Jahr 1: $\frac{2100}{50000} = 0,042$

$$\text{Zinssatz im Jahr 2: } \frac{1894,2}{45100} = 0,042$$

$$\text{Zinssatz im Jahr 3: } \frac{1399,8}{39994,2} = 0,035\dots$$

Der Zinssatz hat sich im Jahr 3 verändert.

b2)

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 50.000,00
1	€ 2.100,00	€ 4.900,00	€ 7.000,00	€ 45.100,00
2	€ 1.894,20	€ 5.105,80	€ 7.000,00	€ 39.994,20
3	€ 1.399,80	€ 5.600,20	€ 7.000,00	€ 34.394,00

c1) $E = B \cdot (1 + i_0)^2 \cdot (1 + i_1)^3$

c2) $B \cdot 1,03^2 \cdot 1,01^3 = B \cdot (1 + i)^5$

$$i = 0,01795\dots = 1,795\dots \%$$

Eine Berechnung von i mithilfe eines arithmetischen Mittels ist als falsch zu werten.

Lösungsschlüssel

- a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Regressionsgeraden.
- a2) Ein Punkt für das richtige Beurteilen mithilfe des Korrelationskoeffizienten.
- a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Differenz.
- b1) Ein Punkt für das richtige nachweisliche Überprüfen.
- b2) Ein Punkt für das Eintragen der beiden richtigen Beträge.
- c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
- c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Jahreszinssatzes i .

Puddingmischungen*

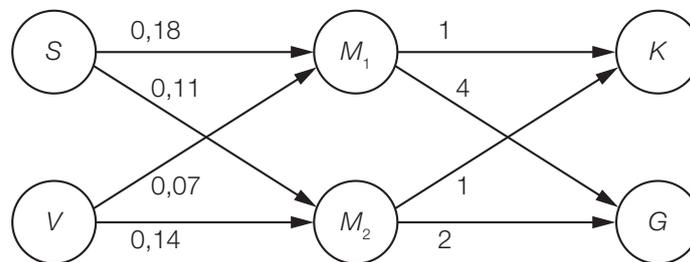
Aufgabennummer: B_529

Technologieeinsatz:

möglich

erforderlich

Aus reinen Puddingsorten werden verschiedene Mischsorten produziert. Diese werden in verschiedenen Packungen verkauft. Der nachstehende Gozinto-Graph bildet diesen Produktionsprozess ab.



S ... reiner Schokoladepudding (in Litern)

V ... reiner Vanillepudding (in Litern)

M_1 ... Mischsorte 1: Schokoladepudding mit Vanille-Sprenkeln (in Bechern)

M_2 ... Mischsorte 2: Vanillepudding mit Schoko-Sprenkeln (in Bechern)

K ... Kleinpackungen (in Stück)

G ... Großpackungen (in Stück)

- a)
- 1) Ermitteln Sie den Prozentsatz an Schokoladepudding in einem Becher M_1 .
 - 2) Übertragen Sie den Gozinto-Graphen in 2 Matrizen, die den Mengenbedarf an reinen Puddingsorten für die Mischsorten bzw. den Mengenbedarf an Mischsorten für die Packungen beschreiben.

Ein Supermarkt bestellt 300 Klein- und 200 Großpackungen.

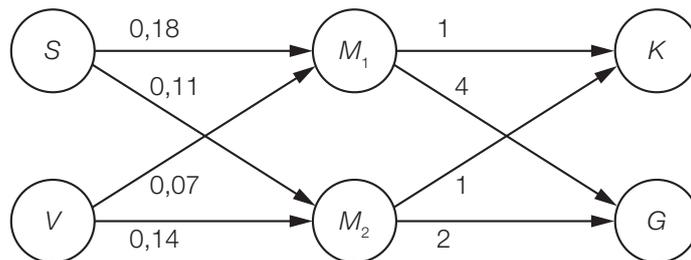
- 3) Ermitteln Sie die dafür jeweils benötigte Menge an Schokolade- und Vanillepudding in Litern.

- b) Der Produktionsablauf wird verändert. Die quadratische Matrix \mathbf{A} beschreibt die Produktionsverflechtungen zwischen den reinen Puddingsorten, den Mischsorten und den Packungen (in der Reihenfolge S, V, M_1, M_2, K, G).

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,18 & 0,11 & 0 & 0,50 \\ 0 & 0 & 0,07 & 0,14 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Neu dabei sind: $a_{16} = 0,50$ und $a_{26} = 0,25$.

- 1) Zeichnen Sie diese beiden neuen Verflechtungen im nachstehenden Gozinto-Graphen ein.



Der Vektor \vec{x} soll die benötigten Mengen an reinen Puddingsorten, Mischsorten und Packungen (in der Reihenfolge S, V, M_1, M_2, K, G) beschreiben.

- 2) Ermitteln Sie diesen Vektor \vec{x} für eine Nachfrage von 300 Klein- und 200 Großpackungen.

Für eine andere Nachfrage ergibt sich anstelle von \vec{x} der Vektor $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 461 \\ 264 \\ 1300 \\ 700 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}$.

- 3) Interpretieren Sie den Eintrag 700 dieses Vektors im gegebenen Sachzusammenhang.
- 4) Beschreiben Sie, wie sich eine zusätzliche direkte Nachfrage nach reinem Schokoladepudding im Ausmaß von 100 Litern auf den Vektor \vec{x}_1 auswirkt.

c) Der Produktionsprozess wird auf andere Puddingsorten erweitert. Aus a reinen Puddingsorten werden b verschiedene Mischsorten produziert, die wiederum in c verschiedenen Packungsgrößen abgepackt werden. Die quadratische Matrix \mathbf{B} beschreibt die Produktionsverflechtungen zwischen den reinen Puddingsorten, den Mischsorten und den Packungen.

1) Ordnen Sie den beiden Eigenschaften von \mathbf{B} jeweils die zutreffende Berechnung aus A bis D zu.

Anzahl der Matrixelemente von \mathbf{B}	
Anzahl der Zeilen von \mathbf{B}	

A	$a \cdot b \cdot c$
B	$a + b + c$
C	$(a + b + c) \cdot 2$
D	$(a + b + c)^2$

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{0,18}{0,18 + 0,07} = 0,72$

In einem Becher M_1 sind 72 % Schokoladepudding enthalten.

a2) Matrix für den Mengenbedarf an reinen Puddingsorten für die Mischsorten:

$$\begin{pmatrix} 0,18 & 0,11 \\ 0,07 & 0,14 \end{pmatrix}$$

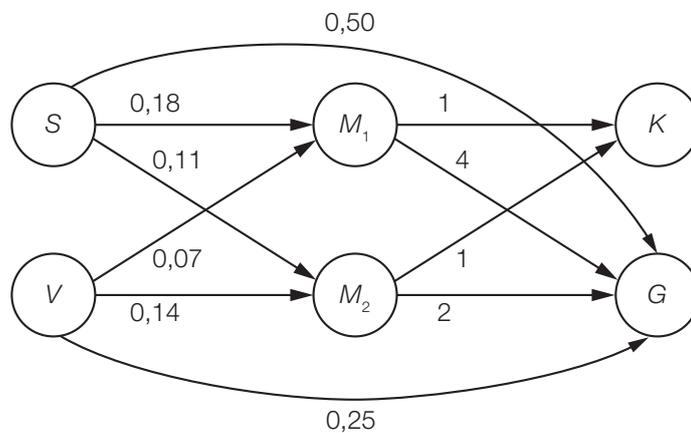
Matrix für den Mengenbedarf an Mischsorten für die Packungen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a3) $\begin{pmatrix} 0,18 & 0,11 \\ 0,07 & 0,14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 275 \\ 175 \end{pmatrix}$

Für diese Bestellung werden 275 L Schokoladepudding und 175 L Vanillepudding benötigt.

b1)



b2) $\vec{x} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 375 \\ 225 \\ 1100 \\ 700 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix}$

b3) Für diese Nachfrage werden 700 Becher M_2 benötigt.

b4) Zum 1. Eintrag des Vektors \vec{x}_1 wird 100 addiert.

c1)

Anzahl der Matrixelemente von B	D
Anzahl der Zeilen von B	B

A	$a \cdot b \cdot c$
B	$a + b + c$
C	$(a + b + c) \cdot 2$
D	$(a + b + c)^2$

Lösungsschlüssel

- a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Prozentsatzes.
- a2) Ein Punkt für das richtige Übertragen des Gozinto-Graphen in 2 Matrizen.
- a3) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der jeweils benötigten Menge in Litern.
- b1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen der beiden neuen Verflechtungen.
- b2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Vektors \vec{x} .
- b3) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.
- b4) Ein Punkt für das richtige Beschreiben.
- c1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

Abfindung

Vier Geschwister haben gemeinsam ein Haus geerbt.

Martha übernimmt das Haus und muss dafür ihren Geschwistern Andreas, Beate und Christian zum Zeitpunkt der Übernahme Geldbeträge in Höhe von jeweils € 80.000 auszahlen. Ein solcher Geldbetrag wird *Abfindung* genannt.

- a) Die Auszahlung der Abfindung in Höhe von € 80.000 an Andreas soll durch 3 Zahlungen erfolgen:

€ 25.000 nach 3 Jahren,
€ 30.000 nach 6 Jahren und
€ 35.000 nach 9 Jahren.

1) Stellen Sie eine Gleichung zur Berechnung des zugehörigen Jahreszinssatzes i auf. [0/1 P.]

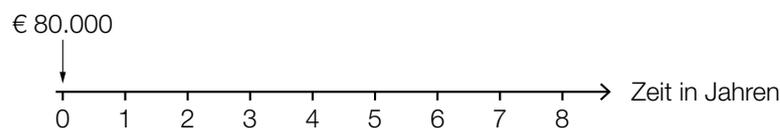
2) Berechnen Sie diesen Jahreszinssatz i . [0/1 P.]

- b) Die Auszahlung der Abfindung in Höhe von € 80.000 an Beate soll durch Zahlungen erfolgen, die durch die nachstehende Gleichung beschrieben werden. Der Zinssatz beträgt 2 % p. a.

$$80\,000 = 20\,000 + R \cdot \frac{1,02^4 - 1}{1,02 - 1} \cdot \frac{1}{1,02^6}$$

1) Stellen Sie den Betrag € 20.000 und die Raten R auf der nachstehenden Zeitachse dar.

[0/1 P.]



c) Die Auszahlung der Abfindung in Höhe von € 80.000 an Christian soll durch Quartalsraten in Höhe von jeweils € 4.000 und eine Restzahlung erfolgen. Die erste Zahlung erfolgt nach 1 Jahr. Der Zinssatz beträgt 2 % p. a.

1) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang. [0/1 P.]

$$1,02^{\frac{1}{4}} - 1 = 0,004962\dots$$

2) Berechnen Sie die Anzahl der vollen Quartalsraten. [0/1 P.]

3) Berechnen Sie die Höhe der Restzahlung, die 1 Quartal nach der letzten vollen Quartalsrate ausgezahlt wird. [0/1 P.]

d) Zur Finanzierung der Hausübernahme nimmt Martha einen Kredit auf.

Die vorletzte Zeile des Tilgungsplans lautet:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
15	€ 319,43	€ 9.680,57	€ 10.000,00	€ 966,95

1) Zeigen Sie, dass der Zinssatz 3 % p. a. beträgt. [0/1 P.]

2) Vervollständigen Sie die nachstehende letzte Zeile des Tilgungsplans. [0/1 P.]

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
16				€ 0,00

Möglicher Lösungsweg

$$a1) 80\,000 = \frac{25\,000}{(1+i)^3} + \frac{30\,000}{(1+i)^6} + \frac{35\,000}{(1+i)^9}$$

a2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

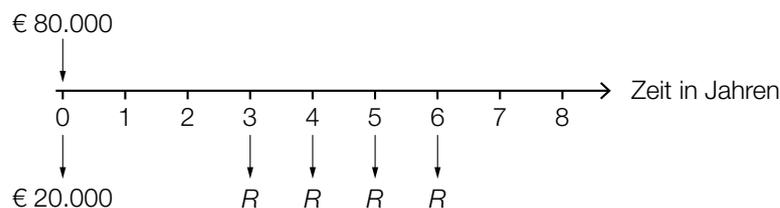
$$i = 0,01893\dots$$

Der Jahreszinssatz beträgt rund 1,89 %.

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung.

a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Jahreszinssatzes.

b1)



b1) Ein Punkt für das richtige Darstellen auf der Zeitachse.

c1) Der (äquivalente) Quartalszinssatz beträgt rund 0,4962... %.

c2) Quartalsaufzinsungsfaktor $q_4 = 1,02^{\frac{1}{4}}$

$$80\,000 \cdot 1,02 = 4\,000 \cdot \frac{q_4^n - 1}{q_4 - 1} \cdot \frac{1}{q_4^{n-1}}$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$n = 21,4\dots$$

Es werden 21 volle Quartalsraten ausgezahlt.

c3) $\left(80\,000 \cdot 1,02 - 4\,000 \cdot \frac{q_4^{21} - 1}{q_4 - 1} \cdot \frac{1}{q_4^{20}}\right) \cdot q_4^{21} = 1\,799,003\dots$

Die Höhe der Restzahlung beträgt € 1.799,00.

c1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Anzahl der vollen Quartalsraten.

c3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Höhe der Restzahlung.

d1) Restschuld im Jahr 14: $966,95 + 9680,57 = 10647,52$

$$\text{Zinssatz: } i = \frac{319,43}{10647,52} = 0,030\dots \approx 3 \%$$

d2)

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
16	€ 29,01	€ 966,95	€ 995,96	€ 0,00

d1) Ein Punkt für das richtige Zeigen.

d2) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen der letzten Zeile des Tilgungsplans.

Farben und Lacke

Ein Unternehmen stellt verschiedene Farben und Lacke her.

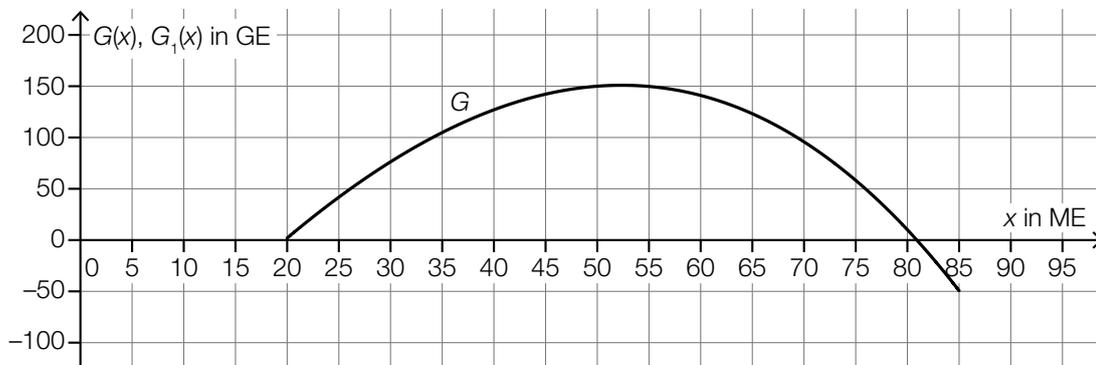
- a) Die Gesamtkosten für die Produktion von Acrylfarbe werden durch eine Kostenfunktion K mit $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschrieben.

- 1) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. [0/1 P.]

Wenn ① ist, dann kann K keine ertragsgesetzliche Kostenfunktion sein, weil in diesem Fall ②.

①		②	
$b < 0$	<input type="checkbox"/>	die Fixkosten negativ sind	<input type="checkbox"/>
$c < 0$	<input type="checkbox"/>	keine Kostenkehre existiert	<input type="checkbox"/>
$b < c$	<input type="checkbox"/>	die Grenzkosten bei der Produktionsmenge 0 negativ sind	<input type="checkbox"/>

- b) Der Graph der Gewinnfunktion G für Acrylfarbe ist in der nachstehenden Abbildung im Intervall $[20; 85]$ dargestellt.



x ... Absatzmenge in ME

$G(x)$... Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

Die Fixkosten steigen um 50 GE. Die variablen Kosten und der Erlös bleiben unverändert. Der Gewinn unter diesen veränderten Bedingungen wird durch die Gewinnfunktion G_1 beschrieben.

- 1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der neuen Gewinnfunktion G_1 im Intervall $[20; 85]$ ein. [0/1 P.]
- 2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die untere Gewinngrenze ab, die sich unter diesen veränderten Bedingungen ergibt. [0/1 P.]

- c) Für einen bestimmten Kunstharzlack beträgt der Höchstpreis 60 €/L. Bei einem Preis von 20 €/L können 200 L dieses Lacks abgesetzt werden.
Der Zusammenhang zwischen dem Preis und der Absatzmenge kann für diesen Lack durch die lineare Preis-Absatz-Funktion p beschrieben werden.

x ... Absatzmenge in L

$p(x)$... Preis bei der Absatzmenge x in €/L

- 1) Stellen Sie eine Gleichung der linearen Preis-Absatz-Funktion p auf. [0/1 P.]
- 2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Preis-Absatz-Funktion p im gegebenen Sachzusammenhang. [0/1 P.]
- 3) Berechnen Sie die Sättigungsmenge. [0/1 P.]

- d) Das Unternehmen stellt auch Wandfarbe her.
In einem Heimwerker-Ratgeber wird empfohlen, mehr Farbe als vom Hersteller angegeben zu kaufen. Konkret werden dort folgende Empfehlungen gegeben:

- Für die zusätzlichen Flächen bei Tür- und Fensterrahmen sollten um insgesamt 10 % mehr Farbe als vom Hersteller angegeben gekauft werden.
- Um ganz sicher genug Farbe zu haben, sollte diese berechnete Menge anschließend nochmals um 20 % erhöht werden.

Auf den Farbkübeln ist angegeben, dass für 1 m² Wandfläche 0,14 L Farbe benötigt werden.

Es soll eine Formel für die Farbmenge M (in Litern) aufgestellt werden, die man für eine Wandfläche von A Quadratmetern benötigt. Dabei sollen die obigen Empfehlungen des Heimwerker-Ratgebers berücksichtigt werden.

- 1) Stellen Sie diese Formel auf.

$M =$ _____ [0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

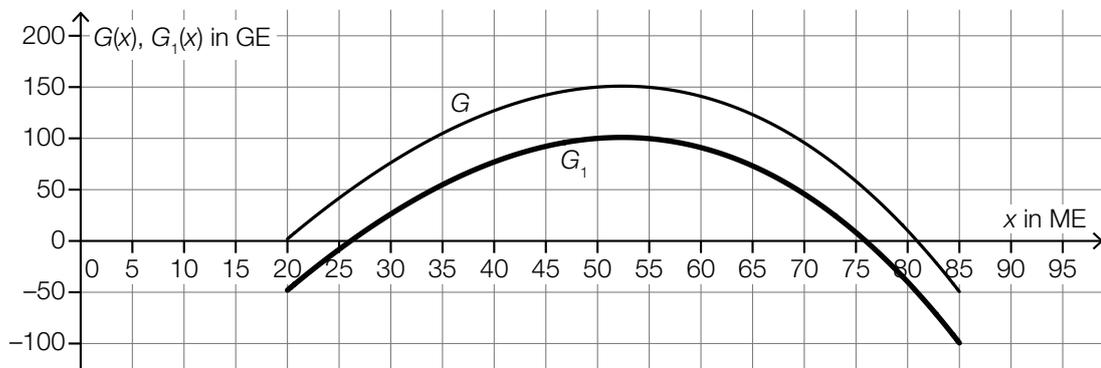
a1)

①	
$c < 0$	<input checked="" type="checkbox"/>

②	
die Grenzkosten bei der Produktionsmenge 0 negativ sind	<input checked="" type="checkbox"/>

a1) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile.

b1)



b2) Die untere Gewinngrenze liegt bei rund 26 ME.
Toleranzbereich: $[25; 28]$

b1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen von G_1 im Intervall $[20; 85]$.
b2) Ein Punkt für das richtige Ablesen der unteren Gewinngrenze.

c1) $p(x) = k \cdot x + d$
 $p(0) = 60$
 $d = 60$

$$p(200) = 20$$
$$k \cdot 200 + 60 = 20$$
$$k = -0,2$$

$$p(x) = -0,2 \cdot x + 60$$

c2) Die Steigung $-0,2$ gibt an, dass eine Preissenkung um $0,2 \text{ €/L}$ zu einer Absatzsteigerung um 1 L führt.

oder:

Soll die Absatzmenge um 1 L gesteigert werden, so muss der Preis um $0,2 \text{ €/L}$ gesenkt werden.

c3) $p(x) = 0$ oder $-0,2 \cdot x + 60 = 0$
 $x = 300$

Die Sättigungsmenge beträgt 300 L .

- c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von p .
- c2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.
- c3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Sättigungsmenge.

d1) $M = 0,14 \cdot 1,1 \cdot 1,2 \cdot A = 0,1848 \cdot A$

- d1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.

Thermometer

Ein digitales Thermometer wird zur Messung der Temperatur des Wassers in einem Becken verwendet. Ausgehend von einem Startwert nähert sich die angezeigte Temperatur der tatsächlichen Temperatur des Wassers an.

- a) Der zeitliche Verlauf der angezeigten Temperatur bei einer bestimmten Messung kann durch die Funktion f beschrieben werden.

$$f(t) = 38 - 6 \cdot 0,758^t$$

t ... Zeit nach Beginn der Messung in s

$f(t)$... angezeigte Temperatur zur Zeit t in °C

- 1) Interpretieren Sie die Zahl 38 in der obigen Funktionsgleichung im gegebenen Sachzusammenhang. [0/1 P.]

Sobald die momentane Änderungsrate der angezeigten Temperatur unter 0,01 °C/s sinkt, ertönt ein Piepton.

- 2) Berechnen Sie, wie viele Sekunden nach Beginn der Messung der Piepton ertönt. [0/1 P.]

- b) Zu Beginn einer anderen Messung zeigt das digitale Thermometer eine Temperatur von 33,0 °C an. Nach 4 s zeigt es eine Temperatur von 36,0 °C an. Der zeitliche Verlauf der angezeigten Temperatur bei dieser Messung kann durch die Funktion g beschrieben werden.

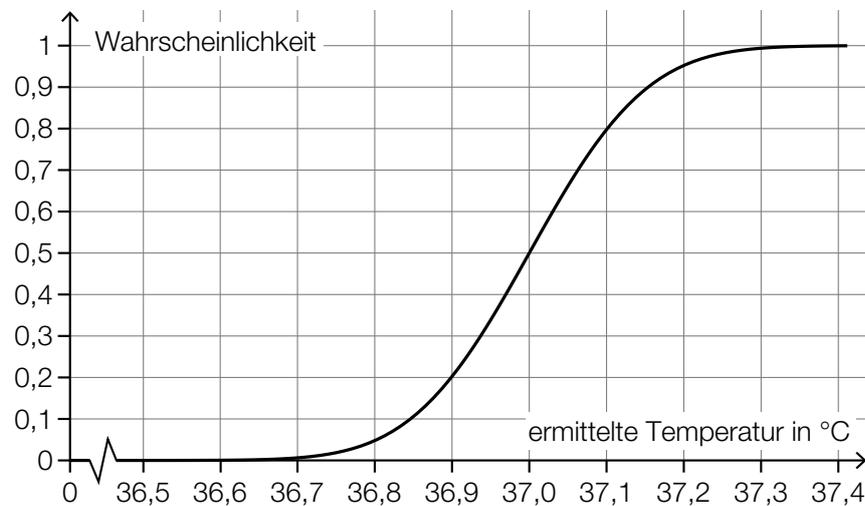
$$g(t) = c - a \cdot e^{-0,275 \cdot t}$$

t ... Zeit nach Beginn der Messung in s

$g(t)$... angezeigte Temperatur zur Zeit t in °C

- 1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Parameter a und c . [0/1 P.]
- 2) Berechnen Sie die Parameter a und c . [0/1 P.]

- c) Ein Unternehmen produziert Thermometer. Im Rahmen einer Qualitätskontrolle werden die produzierten Thermometer unter jeweils gleichen Bedingungen getestet. Die ermittelten Temperaturen können als annähernd normalverteilt angenommen werden. In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Verteilungsfunktion dargestellt.



- 1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Erwartungswert μ ab.

$$\mu = \underline{\hspace{2cm}} \text{ °C}$$

[0/1 P.]

- 2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit ab, dass die ermittelte Temperatur höchstens 36,9 °C beträgt. [0/1 P.]
- 3) Ermitteln Sie die Standardabweichung σ . [0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

a1) Die tatsächliche Temperatur des Wassers beträgt 38 °C.

oder:

Der Grenzwert der angezeigten Temperatur beträgt 38 °C.

a2) $f'(t) = 1,6624... \cdot 0,758^t$
 $0,01 = 1,6624... \cdot 0,758^t$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$t = 18,4...$$

Nach etwa 18 s ertönt der Piepton.

a1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Zeit, nach der der Piepton ertönt.

b1) I: $g(0) = 33$

II: $g(4) = 36$

oder:

I: $c - a = 33$

II: $c - a \cdot e^{-0,275 \cdot 4} = 36$

b2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$a = 4,49...$$

$$c = 37,49...$$

b1) Ein Punkt für das richtige Erstellen des Gleichungssystems.

b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Parameter a und c .

c1) $\mu = 37,0 \text{ }^\circ\text{C}$

c2) Die Wahrscheinlichkeit beträgt 20 %.

c3) $\mu = 37$ und $P(X \leq 36,9) = 0,2$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$\sigma = 0,118\dots$

Auch ein näherungsweise Ermitteln der Standardabweichung mithilfe der Abbildung ist als richtig zu werten. (Toleranzbereich: [0,11; 0,13])

- c1) Ein Punkt für das richtige Ablesen des Erwartungswerts μ .
- c2) Ein Punkt für das richtige Ablesen der Wahrscheinlichkeit.
- c3) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Standardabweichung σ .

Autokauf (3)

Clara möchte ein neues Auto kaufen.

- a) Eine Bank bietet Clara einen Kredit in Höhe von € 15.000 mit einer Laufzeit von 7 Jahren an. Die Rückzahlung erfolgt durch nachschüssige Monatsraten in Höhe von je € 216.

- 1) Berechnen Sie den Monatszinssatz i_{12} für diesen Kredit. [0/1 P.]

Mit dem monatlichen Aufzinsungsfaktor $q_{12} = 1 + i_{12}$ führt Clara die nachstehende Berechnung durch.

$$X = 15000 \cdot q_{12}^{24} - 216 \cdot \frac{q_{12}^{24} - 1}{q_{12} - 1}$$

- 2) Beschreiben Sie die Bedeutung von X im gegebenen Sachzusammenhang. [0/1 P.]

- b) Eine andere Bank bietet Clara einen Kredit in Höhe von € 15.000 mit einem Zinssatz von 6,2 % p. a. an. Die Rückzahlung erfolgt durch nachschüssige Monatsraten in Höhe von je € 219,35.

- 1) Berechnen Sie den zu 6,2 % p. a. äquivalenten Monatszinssatz. [0/1 P.]

- 2) Vervollständigen Sie den nachstehenden Ausschnitt des zugehörigen Tilgungsplans. [0/1 P.]

Monat	Zinsanteil	Tilgungsanteil	monatliche Annuität	Restschuld
0	---	---	---	€ 15.000,00
1				

- c) Clara hat vor 5 Jahren den Geldbetrag B_1 und vor 3 Jahren den Geldbetrag B_2 auf ein Konto eingezahlt. Der Zinssatz beträgt 1 % p. a.

1) Ordnen Sie den beiden Beschreibungen jeweils den passenden Ausdruck aus A bis D zu.

[0/1 P.]

Es wird die Summe der Werte der beiden Spareinlagen zum heutigen Zeitpunkt berechnet.		A	$B_1 \cdot 1,01^5 + B_2 \cdot 1,01^3$
Es wird die Summe der Werte der beiden Spareinlagen zum Zeitpunkt der Einzahlung von B_2 berechnet.		B	$B_1 + B_2 \cdot 1,01^{-2}$
		C	$B_1 \cdot 1,01^5 + B_2 \cdot 1,01^2$
		D	$B_1 \cdot 1,01^2 + B_2$

- d) Der Wert eines Autos verringert sich im Laufe der Zeit. Für ein bestimmtes Auto ist dessen Wert nach 1 Jahr und nach 3 Jahren in der nachstehenden Tabelle angegeben.

Zeit nach dem Kauf in Jahren	1	3
Wert des Autos in €	15 000	10 000

Der Wert des Autos kann im Zeitintervall $[1; 3]$ näherungsweise durch die lineare Funktion f beschrieben werden.

t ... Zeit nach dem Kauf in Jahren

$f(t)$... Wert des Autos zur Zeit t in €

- 1) Stellen Sie eine Gleichung der linearen Funktion f auf.
- 2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung von f im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an.

[0/1 P.]

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

Autokauf

$$a1) 15000 = 216 \cdot \frac{q_{12}^{84} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{84}}$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$q_{12} = 1,00463\dots$$

$$i_{12} = 0,46\dots \%$$

a2) X ist die Restschuld nach 24 Monaten (2 Jahren) in Euro.

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Monatszinssatzes.

a2) Ein Punkt für das richtige Beschreiben im gegebenen Sachzusammenhang.

$$b1) i_{12} = \sqrt[12]{1,062} - 1 = 0,005025\dots$$

Der zu 6,2 % p. a. äquivalente Monatszinssatz beträgt rund 0,503 %.

Eine Berechnung des äquivalenten Monatszinssatzes als $\frac{6,2\%}{12} = 0,5166\dots\%$ ist als falsch zu werten.

b2)

Monat	Zinsanteil	Tilgungsanteil	monatliche Annuität	Restschuld
0	---	---	---	€ 15.000,00
1	€ 75,38	€ 143,97	€ 219,35	€ 14.856,03

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des äquivalenten Monatszinssatzes.

b2) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen des Ausschnitts des Tilgungsplans.

c1)

Es wird die Summe der Werte der beiden Spareinlagen zum heutigen Zeitpunkt berechnet.	A
Es wird die Summe der Werte der beiden Spareinlagen zum Zeitpunkt der Einzahlung von B_2 berechnet.	D

A	$B_1 \cdot 1,01^5 + B_2 \cdot 1,01^3$
B	$B_1 + B_2 \cdot 1,01^{-2}$
C	$B_1 \cdot 1,01^5 + B_2 \cdot 1,01^2$
D	$B_1 \cdot 1,01^2 + B_2$

c1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

d1) $f(t) = k \cdot t + d$

$$k = \frac{10000 - 15000}{3 - 1} = -2500$$

$$d = 15000 + 2500 = 17500$$

$$f(t) = -2500 \cdot t + 17500$$

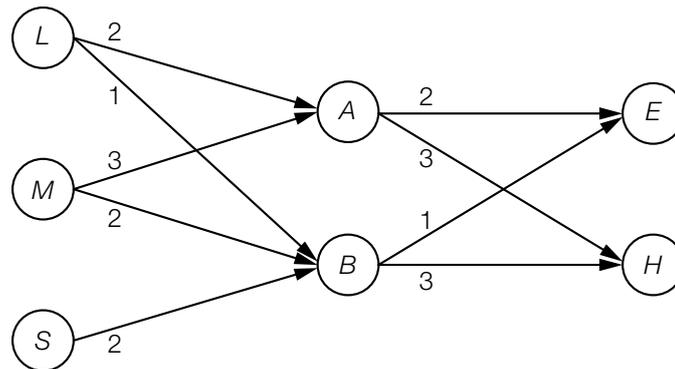
d2) Gemäß diesem Modell nimmt der Wert des Autos um € 2.500 pro Jahr ab.

d1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von f .

d2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der zugehörigen Einheit.

Seminarprüfungen

- a) An einer Universität stellt eine Professorin Prüfungen für ihre Seminare zusammen. Dabei verwendet sie jede Prüfungsfrage nur ein Mal.
Sie teilt ihre Prüfungsfragen in drei Kategorien ein: leicht (L), mittel (M), schwierig (S).
Sie kombiniert die Prüfungsfragen in unterschiedlicher Anzahl für Prüfungen der Niveaustufen A und B . In ihren Einführungsseminaren (E) und Hauptseminaren (H) gibt es jeweils unterschiedlich viele Prüfungen der Niveaustufen A und B .
Die entsprechenden Zahlen können dem nachstehenden Gozinto-Graphen entnommen werden.



In diesem Gozinto-Graphen existiert kein Pfeil von S nach A .

- 1) Interpretieren Sie diesen Sachverhalt im gegebenen Sachzusammenhang. [0/1 P.]

Die Matrix \mathbf{V}_1 beschreibt den Bedarf an Prüfungsfragen für die unterschiedlichen Prüfungen der Niveaustufen A und B .

Die Matrix \mathbf{V}_2 beschreibt den Bedarf an Prüfungen der Niveaustufen A und B für die unterschiedlichen Seminare.

- 2) Ermitteln Sie die beiden Matrizen \mathbf{V}_1 und \mathbf{V}_2 . [0/1 P.]

Die Professorin hält im aktuellen Semester 4 Einführungsseminare (E) und 2 Hauptseminare (H). Der Vektor \vec{a} beschreibt den Bedarf an leichten, mittleren und schwierigen Prüfungsfragen für diese Seminare.

- 3) Berechnen Sie den Vektor \vec{a} . [0/1 P.]

Die Professorin benötigt für die Vorbereitung der Prüfungsfragen unterschiedlich viel Zeit: t_1 Minuten für eine leichte, t_2 Minuten für eine mittlere und t_3 Minuten für eine schwierige Prüfungsfrage. Die insgesamt für alle Prüfungsfragen des aktuellen Semesters benötigte Vorbereitungszeit wird mit t bezeichnet.

- 4) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung von t auf. Verwenden Sie dabei t_1 , t_2 und t_3 sowie den Vektor \vec{a} .

$t =$ _____ [0/1 P.]

b) Über die Matrizen R , S und T weiß man:

R ist eine 3×3 -Matrix.

S ist eine 2×3 -Matrix.

T ist eine 3×2 -Matrix.

1) Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. [1 aus 5]

[0/1 P.]

$R \cdot S$ ist eine 3×2 -Matrix.	<input type="checkbox"/>
$R \cdot T$ ist eine 2×3 -Matrix.	<input type="checkbox"/>
$T \cdot S$ ist eine 3×3 -Matrix.	<input type="checkbox"/>
$S \cdot R$ ist eine 3×2 -Matrix.	<input type="checkbox"/>
$S \cdot T$ ist eine 3×3 -Matrix.	<input type="checkbox"/>

c) Eine Kommission untersucht die Ergebnisse mehrerer Prüfungen. Dabei wird beim Prüfungsergebnis zwischen „positiv“ und „negativ“, beim Geschlecht der Studierenden zwischen „männlich“ und „weiblich“ unterschieden.

In der nachstehenden Vierfeldertafel sind die relativen Häufigkeiten für eine bestimmte Prüfung angegeben.

	männlich	weiblich	Summe
positiv	0,38		0,72
negativ			0,28
Summe	0,58	0,42	1

1) Ergänzen Sie die leeren Felder der obigen Vierfeldertafel.

[0/1 P.]

Von den Studierenden wird eine Person zufällig ausgewählt.

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person männlich ist, wenn bekannt ist, dass die Person ein negatives Prüfungsergebnis hat.

[0/1 P.]

Bei einer anderen Prüfung geht die Kommission von einer (stochastischen) Unabhängigkeit zwischen dem Prüfungsergebnis und dem Geschlecht aus.

3) Ergänzen Sie unter Berücksichtigung dieser Voraussetzung die fehlenden Wahrscheinlichkeiten in der nachstehenden Vierfeldertafel.

[0/1 P.]

	männlich	weiblich	Summe
positiv			0,80
negativ			0,20
Summe	0,55	0,45	1

Möglicher Lösungsweg

Seminarprüfungen

a1) Prüfungen der Niveaustufe A enthalten keine schwierigen Prüfungsfragen.

$$\text{a2) } \mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{a3) } \vec{\mathbf{a}} = \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 8 & 15 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ 62 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\text{a4) } t = (t_1 \ t_2 \ t_3) \cdot \vec{\mathbf{a}}$$

oder:

$$t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \cdot \vec{\mathbf{a}} \quad (\text{als Skalarprodukt})$$

oder:

$$t = 38 \cdot t_1 + 62 \cdot t_2 + 20 \cdot t_3$$

a1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der beiden Matrizen \mathbf{V}_1 und \mathbf{V}_2 .

a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Vektors $\vec{\mathbf{a}}$.

a4) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.

b1)

$\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}$ ist eine 3×3 -Matrix.	<input checked="" type="checkbox"/>

b1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

c1)

	männlich	weiblich	Summe
positiv	0,38	0,34	0,72
negativ	0,20	0,08	0,28
Summe	0,58	0,42	1

c2) $P(\text{„männlich“} | \text{„negativ“}) = \frac{0,2}{0,28} = 0,714\dots$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 71 %.

c3)

	männlich	weiblich	Summe
positiv	0,44	0,36	0,80
negativ	0,11	0,09	0,20
Summe	0,55	0,45	1

c1) Ein Punkt für das richtige Ergänzen der 3 leeren Felder der Vierfeldertafel.

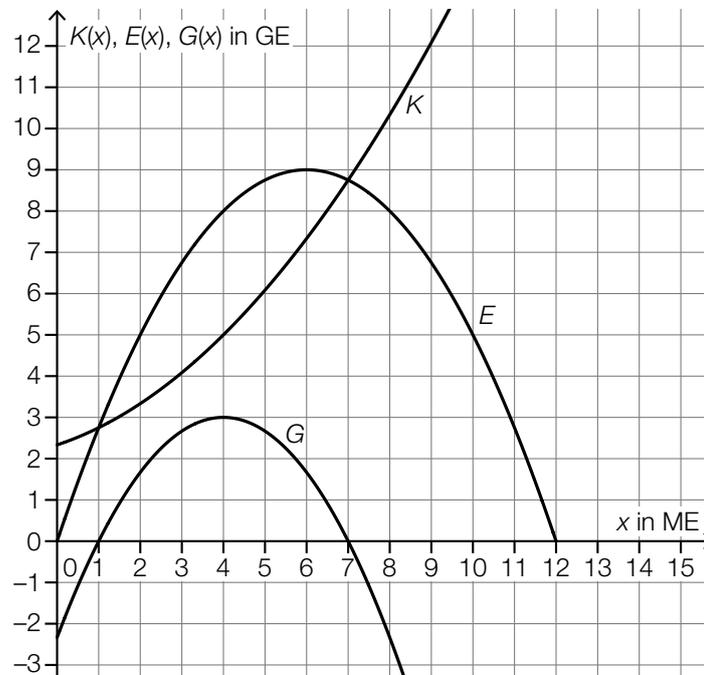
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

c3) Ein Punkt für das richtige Ergänzen der 4 fehlenden Wahrscheinlichkeiten in der Vierfeldertafel.

Trinkflaschen

Ein Unternehmen produziert Trinkflaschen aus verschiedenen Materialien.

- a) In der nachstehenden Abbildung sind für die Produktion von Trinkflaschen aus Glas die Graphen der Kostenfunktion K , der Erlösfunktion E und der Gewinnfunktion G dargestellt.



- 1) Markieren Sie in der obigen Abbildung auf der x -Achse den Gewinnbereich. [0/1 P.]
- 2) Stellen Sie mithilfe der obigen Abbildung eine Gleichung der quadratischen Erlösfunktion E auf. [0/1 P.]
- 3) Kreuzen Sie den Cournot'schen Preis an. [1 aus 5] [0/1 P.]

1 GE/ME	<input type="checkbox"/>
2 GE/ME	<input type="checkbox"/>
3 GE/ME	<input type="checkbox"/>
4 GE/ME	<input type="checkbox"/>
6 GE/ME	<input type="checkbox"/>

b) Für Trinkflaschen aus Edelstahl ist die Kostenfunktion K bekannt:

$$K(x) = 0,035 \cdot x^3 - 0,32 \cdot x^2 + 1,2 \cdot x + 4$$

x ... Produktionsmenge in ME

$K(x)$... Kosten bei der Produktionsmenge x in GE

- 1) Berechnen Sie diejenige Produktionsmenge, bei der die Grenzkosten 2,8 GE/ME betragen. [0/1 P.]
- 2) Berechnen Sie die absolute Änderung der Gesamtkosten bei einer Steigerung der Produktion von 8 ME auf 9 ME. [0/1 P.]
- 3) Berechnen Sie die Kostenkehre. [0/1 P.]

c) Das Unternehmen entwickelt neue Thermosflaschen. In verschiedenen Versuchen wurde untersucht, wie schnell Tee in diesen Thermosflaschen abkühlt. Diese Versuche ergaben, dass die Temperatur des Tees zu einem bestimmten Messzeitpunkt annähernd normalverteilt ist. Der Erwartungswert beträgt $\mu = 64$ °C. Bei 4 % aller Versuche betrug die Temperatur des Tees zu diesem Messzeitpunkt weniger als 60 °C.

- 1) Berechnen Sie die zugehörige Standardabweichung σ . [0/1 P.]

Bei einem dieser Versuche wurde die nachstehende Funktion T ermittelt.

$$T(t) = 20 + 77 \cdot 0,93^t$$

t ... Zeit seit dem Einfüllen des Tees in h

$T(t)$... Temperatur des Tees zur Zeit t in °C

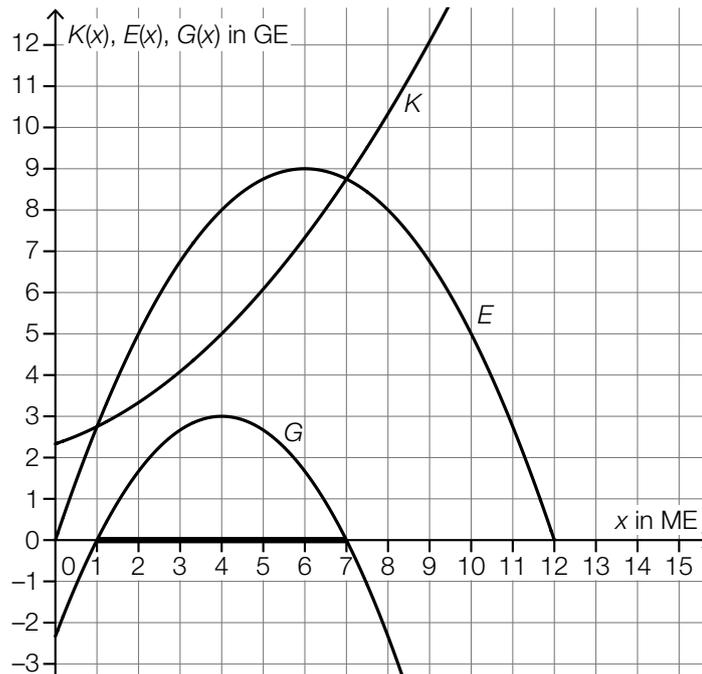
- 2) Geben Sie diejenige Temperatur an, die der Tee beim Einfüllen zur Zeit $t = 0$ hatte.

_____ °C

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) $E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$

$$E(12) = 0$$

$$E(6) = 9$$

oder:

$$a \cdot 12^2 + b \cdot 12 = 0$$

$$a \cdot 6^2 + b \cdot 6 = 9$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$a = -0,25$$

$$b = 3$$

$$E(x) = -0,25 \cdot x^2 + 3 \cdot x$$

a3)

2 GE/ME	<input checked="" type="checkbox"/>

a1) Ein Punkt für das Markieren des richtigen Gewinnbereichs.

a2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Erlösfunktion E .

a3) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

b1) $K'(x) = 0,105 \cdot x^2 - 0,64 \cdot x + 1,2$

$K'(x) = 2,8$ oder $0,105 \cdot x^2 - 0,64 \cdot x + 1,2 = 2,8$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x_1 = 8$ ($x_2 = -1,90\dots$)

Bei einer Produktionsmenge von 8 ME betragen die Grenzkosten 2,8 GE/ME.

b2) $K(9) - K(8) = 3,355$

Die absolute Änderung der Gesamtkosten beträgt 3,355 GE.

b3) $K''(x) = 0,21 \cdot x - 0,64$

$K''(x) = 0$ oder $0,21 \cdot x - 0,64 = 0$

$x = 3,047\dots$

Die Kostenkehre liegt bei rund 3,05 ME.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Produktionsmenge.

b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der absoluten Änderung der Gesamtkosten.

b3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Kostenkehre.

c1) X ... Temperatur des Tees in °C

$P(X < 60) = 0,04$

Berechnung von σ mittels Technologieeinsatz:

$\sigma = 2,28\dots$

Die Standardabweichung beträgt rund 2,3 °C.

c2) 97 °C

c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Standardabweichung σ .

c2) Ein Punkt für das Angeben der richtigen Temperatur.

Umbaufinanzierung

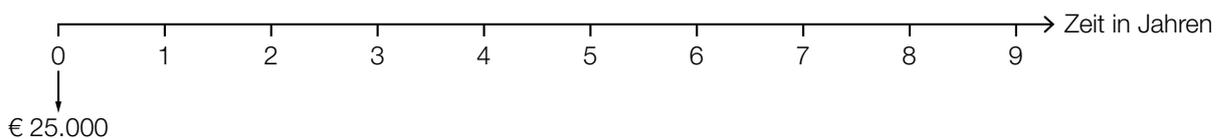
Maria und Johanna bauen ihre gemeinsame Wohnung um und benötigen für die Umbaufinanzierung einen Kredit in Höhe von € 25.000.

a) Maria überlegt sich eine Rückzahlungsvariante.

Sie überlegt, den Kredit in Höhe von € 25.000 durch folgende Rückzahlungen zu tilgen:

- einmalige Rückzahlung in Höhe von € 8.000, die 2 Jahre nach Auszahlung des Kredits erfolgt
- 3 Jahresraten in Höhe von jeweils € 6.500, beginnend 3 Jahre nach der einmaligen Rückzahlung

1) Tragen Sie auf der nachstehenden Zeitachse alle Rückzahlungen ein. [0/1 P.]



2) Stellen Sie eine Gleichung auf, mit der der zugrundeliegende Jahreszinssatz i berechnet werden kann. [0/1 P.]

b) Johanna überlegt sich eine andere Rückzahlungsvariante.

Sie überlegt, den Kredit in Höhe von € 25.000 durch folgende Rückzahlungen zu tilgen:

- 5 Jahresraten in Höhe von jeweils € 5.000, beginnend 1 Jahr nach Auszahlung des Kredits
- Restzahlung, die 1 Jahr nach der letzten Jahresrate erfolgt

Der Zinssatz beträgt 3 % p. a.

1) Berechnen Sie die Höhe der Restzahlung. [0/1 P.]

- c) Maria und Johanna erhalten von ihrer Bank einen Tilgungsplan für die Rückzahlung des Kredits mit gleich bleibenden monatlichen Annuitäten.

In der nachstehenden Tabelle ist ein Ausschnitt dieses Tilgungsplans dargestellt.

Monat	Zinsanteil	Tilgungsanteil	monatliche Annuität	Restschuld
37	€ 26,06	€ 423,94	€ 450,00	€ 9.998,09
38			€ 450,00	

- 1) Ermitteln Sie den Monatszinssatz für den Monat 37. [0/1 P.]

Für den Monat 38 beträgt der Monatszinssatz 0,2 %.

- 2) Vervollständigen Sie die Zeile für den Monat 38. [0/1 P.]

- d) Für den Kredit in Höhe von € 25.000 bietet eine andere Bank Maria und Johanna eine Tilgung mit einem Monatszinssatz von 0,375 % an.

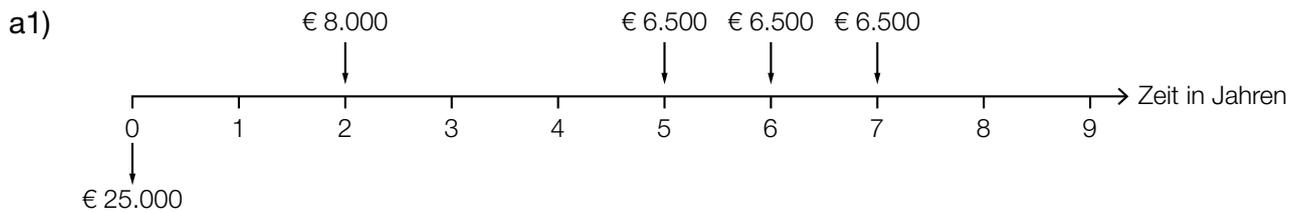
Sie verhandeln mit der Bank über einen Zahlungsaufschub.

- 1) Berechnen Sie, nach wie vielen Monaten ohne Rückzahlungen die Restschuld erstmals € 30.000 übersteigen würde. [0/1 P.]

Maria und Johanna wollen nun doch von Anfang an am Ende jedes Monats genau so viel zurückzahlen, dass die Restschuld am Ende jedes Monats gleich dem ursprünglichen Kreditbetrag von € 25.000 ist.

- 2) Ermitteln Sie, wie hoch die monatlichen Rückzahlungen dazu sein müssen. [0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg



a2) $25\,000 \cdot (1 + i)^7 = 8\,000 \cdot (1 + i)^5 + 6\,500 \cdot (1 + i)^2 + 6\,500 \cdot (1 + i) + 6\,500$

oder:

$$25\,000 \cdot (1 + i)^7 = 8\,000 \cdot (1 + i)^5 + 6\,500 \cdot \frac{(1 + i)^3 - 1}{i}$$

Auch ein Aufstellen der Gleichung unter Verwendung des Aufzinsungsfaktors q ist als richtig zu werten.

- a1) Ein Punkt für das richtige Eintragen aller Rückzahlungen.
a2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung.

b1) $\left(25\,000 \cdot 1,03^5 - 5\,000 \cdot \frac{1,03^5 - 1}{0,03}\right) \cdot 1,03 = 2\,509,257\dots$

Die Höhe der Restzahlung beträgt € 2.509,26.

- b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Höhe der Restzahlung.

c1) $\frac{26,06}{9\,998,09 + 423,94} = 0,00250\dots$

Der Monatszinssatz für den Monat 37 beträgt rund 0,25 %.

c2)

Monat	Zinsanteil	Tilgungsanteil	monatliche Annuität	Restschuld
37	€ 26,06	€ 423,94	€ 450,00	€ 9.998,09
38	€ 20,00	€ 430,00	€ 450,00	€ 9.568,09

- c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Monatszinssatzes für den Monat 37.
c2) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen der Zeile für den Monat 38.

d1) $25\,000 \cdot 1,00375^n = 30\,000$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$n = 48,7\dots$$

Nach 49 Monaten würde die Restschuld erstmals € 30.000 übersteigen.

Für die Punktevergabe ist eine Rundung auf ganze Monate nicht erforderlich.

d2) $25\,000 \cdot 0,00375 = 93,75$

Die monatlichen Rückzahlungen müssen € 93,75 betragen.

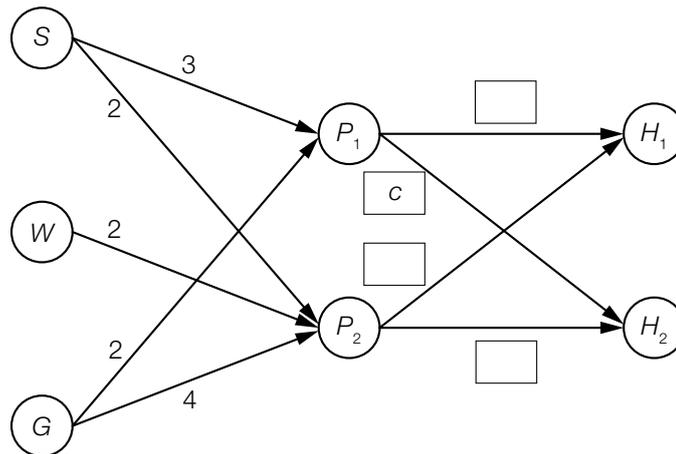
d1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Anzahl der Monate.

d2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Höhe der monatlichen Rückzahlungen.

Tennissocken

Ein Sportartikelhersteller produziert unter anderem schwarze (S), weiße (W) und graue (G) Tennissocken und verkauft diese als einzelne Paare sowie in zwei verschiedenen Großpackungen (P_1 und P_2).

- a) Der nachstehende Gozinto-Graph veranschaulicht den Bedarf an Paaren von Tennissocken für die einzelnen Großpackungen, die später in unterschiedlicher Anzahl an die zwei Sporthändler H_1 und H_2 ausgeliefert werden.



Die 3×2 -Matrix \mathbf{A} beschreibt den Bedarf an Paaren von Tennissocken für die jeweiligen Großpackungen.

- 1) Ermitteln Sie die Matrix \mathbf{A} .

[0/1 P.]

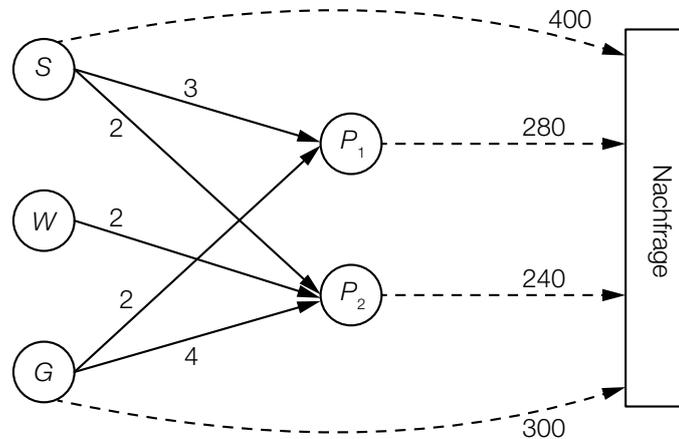
Die Matrix \mathbf{B} beschreibt den Bedarf an Großpackungen für die Sporthändler H_1 und H_2 .

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

- 2) Tragen Sie im obigen Gozinto-Graphen die richtigen Elemente der Matrix \mathbf{B} in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

[0/1 P.]

- b) Im Online-Shop dieses Sportartikelherstellers werden Tennissocken auch als einzelne Paare nachgefragt.
Die gesamte Nachfrage eines Monats ist in der nachstehenden Abbildung durch strichlierte Pfeile dargestellt.



Die quadratische 5×5 -Matrix \mathbf{V} beschreibt die Produktionsverflechtung zwischen den einzelnen Paaren von Tennissocken und den Großpackungen (in der Reihenfolge S, W, G, P_1, P_2).

- 1) Ermitteln Sie die Matrix \mathbf{V} .

[0/1 P.]

Der Vektor \vec{n} beschreibt die Nachfrage nach den einzelnen Paaren von Tennissocken und den Großpackungen (in der Reihenfolge S, W, G, P_1, P_2).

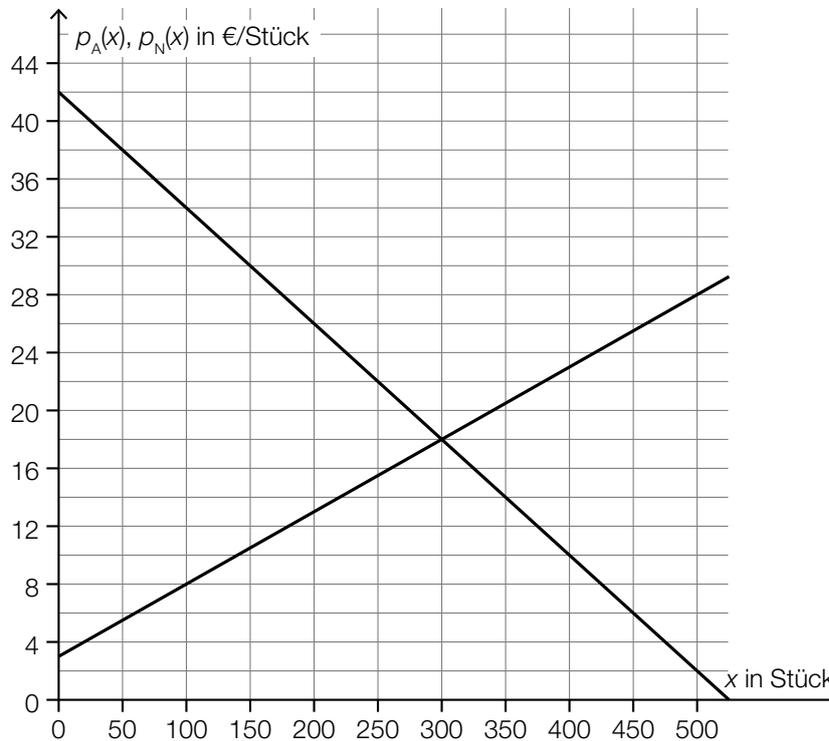
- 2) Ermitteln Sie den Vektor \vec{n} .

[0/1 P.]

- 3) Ermitteln Sie die jeweilige Anzahl der benötigten Paare schwarzer, weißer und grauer Tennissocken für die angegebene Nachfrage.

[0/1 P.]

- c) Der Sportartikelhersteller weiß, wie sich Angebot und Nachfrage für die Großpackung P_1 verhalten. In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Preisfunktion des Angebots p_A und der Graph der Preisfunktion der Nachfrage p_N dargestellt.



- 1) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. [0/1 P.]

Die Gleichung der ① lautet ② .

①	
Preisfunktion des Angebots	<input type="checkbox"/>
Preisfunktion der Nachfrage	<input type="checkbox"/>
Erlösfunktion	<input type="checkbox"/>

②	
$y = -0,08 \cdot x^2 + 3 \cdot x$	<input type="checkbox"/>
$y = -0,05 \cdot x + 3$	<input type="checkbox"/>
$y = -0,08 \cdot x + 42$	<input type="checkbox"/>

- 2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Gleichgewichtspreis ab.

_____ €/Stück

[0/1 P.]

Der Preis wird später auf 14 €/Stück festgelegt. Dadurch übersteigt die Nachfrage das Angebot um eine bestimmte Stückzahl.

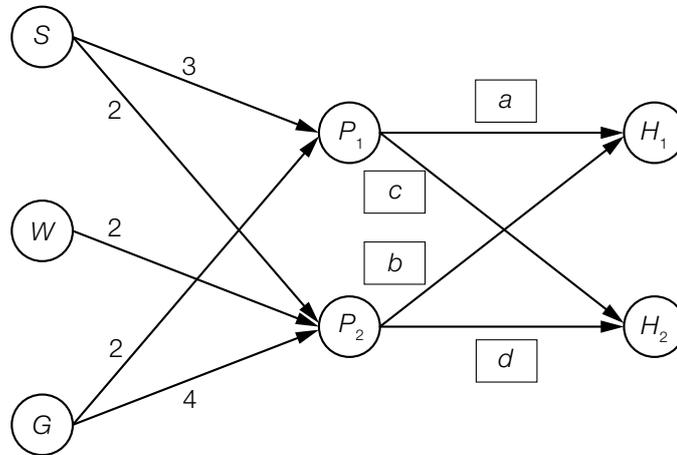
- 3) Markieren Sie in der obigen Abbildung diejenige Strecke, die dieser Stückzahl entspricht.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

a1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

a2)



- a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Matrix A .
a2) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Elemente.

$$\text{b1) } \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b2) } \vec{n} = \begin{pmatrix} 400 \\ 0 \\ 300 \\ 280 \\ 240 \end{pmatrix}$$

$$\text{b3) } (\mathbf{E} - \mathbf{V})^{-1} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 1720 \\ 480 \\ 1820 \\ 280 \\ 240 \end{pmatrix}$$

oder:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 280 \\ 240 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 400 \\ 0 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1720 \\ 480 \\ 1820 \end{pmatrix}$$

oder:

$$3 \cdot 280 + 2 \cdot 240 + 400 = 1720$$

$$2 \cdot 240 = 480$$

$$2 \cdot 280 + 4 \cdot 240 + 300 = 1820$$

Es werden 1 720 Paar schwarze Tennissocken, 480 Paar weiße Tennissocken und 1 820 Paar graue Tennissocken benötigt.

- b1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Matrix \mathbf{V} .
- b2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Vektors \vec{n} .
- b3) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der jeweiligen Anzahl.

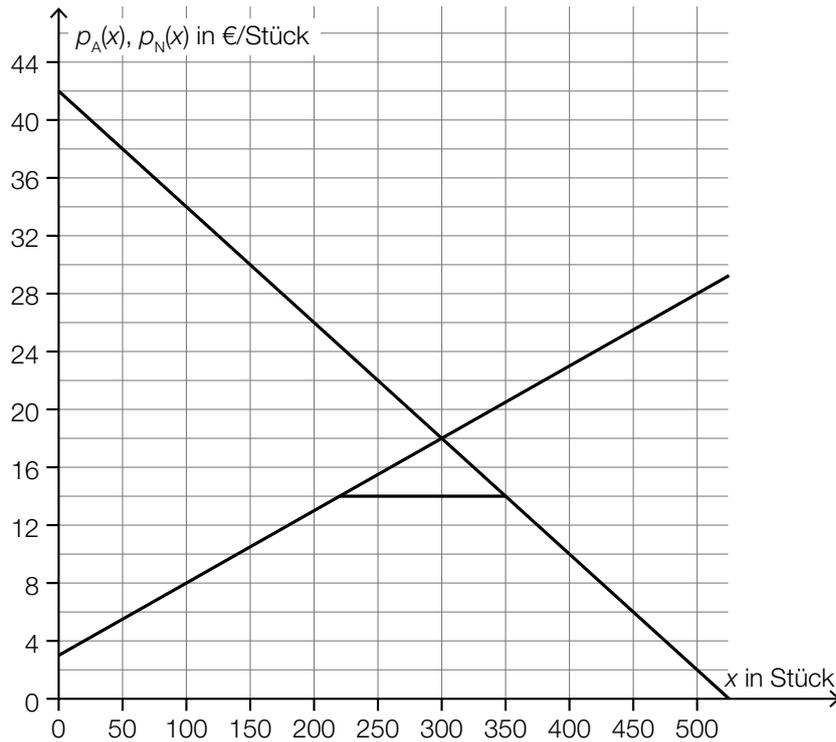
c1)

①	
Preisfunktion der Nachfrage	<input checked="" type="checkbox"/>

②	
$y = -0,08 \cdot x + 42$	<input checked="" type="checkbox"/>

c2) 18 €/Stück

c3)



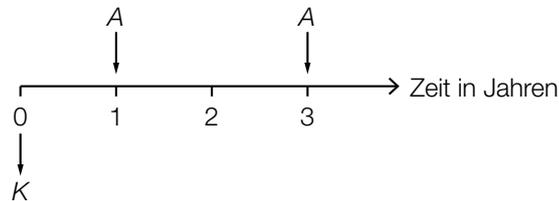
Die Strecke kann auch auf der x-Achse markiert werden.

- c1) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile.
 c2) Ein Punkt für das richtige Ablesen des Gleichgewichtspreises.
 c3) Ein Punkt für das Markieren der richtigen Strecke.

Tischlerei

- a) Für den Kauf einer Sägemaschine wird der Kreditbetrag K aufgenommen. Der Zinssatz beträgt 2 % p. a.

Der Kredit wird durch zwei gleich hohe Zahlungen A getilgt (siehe nachstehende Zeitachse).



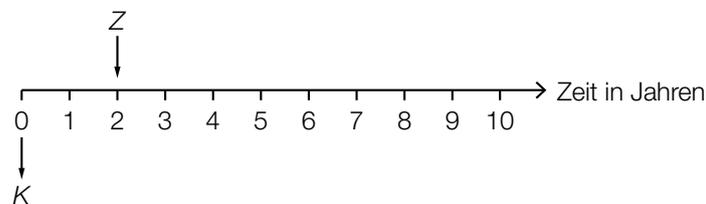
- 1) Stellen Sie mithilfe von K eine Formel für A auf.

$A =$ _____ [0/1 P.]

Alternativ kann der Kreditbetrag K durch eine Einmalzahlung Z und 5 jährliche Raten R zurückgezahlt werden. Der Zinssatz beträgt 2 % p. a.

Es gilt: $K \cdot 1,02^3 = Z \cdot 1,02 + R \cdot \frac{1,02^5 - 1}{1,02 - 1} \cdot \frac{1}{1,02^5}$

Der Kreditbetrag K und die Einmalzahlung Z sind auf der nachstehenden Zeitachse dargestellt.



- 2) Zeichnen Sie auf der obigen Zeitachse die Raten R ein. [0/1 P.]
 3) Berechnen Sie R für $K = € 60.000$ und $Z = € 20.000$. [0/1 P.]

- b) Eine Schleifmaschine wird um den Betrag S gekauft. Die Bezahlung erfolgt mit den Beträgen B_1 und B_2 .

Es gilt: $S = B_1 \cdot q^{-5} + B_2 \cdot q^{-7}$

q ... monatlicher Aufzinsungsfaktor ($q > 1$)

Alternativ könnte die Zahlung auch mit den Beträgen B_1 und B_3 erfolgen.

Es gilt: $S = B_1 \cdot q^{-5} + B_3 \cdot q^{-3}$

- 1) Argumentieren Sie, dass B_3 kleiner als B_2 ist. [0/1 P.]
- 2) Kreuzen Sie diejenige Gleichung an, die nicht zur Gleichung $S = B_1 \cdot q^{-5} + B_2 \cdot q^{-7}$ äquivalent ist. [1 aus 5] [0/1 P.]

$S \cdot q^{10} = B_1 \cdot q^5 + B_2 \cdot q^3$	<input type="checkbox"/>
$S \cdot q^7 = B_1 \cdot q^2 + B_2$	<input type="checkbox"/>
$S \cdot q^6 = B_1 \cdot q + B_2 \cdot q^{-1}$	<input type="checkbox"/>
$S \cdot q^5 = B_1 + B_2 \cdot q^{-2}$	<input type="checkbox"/>
$S \cdot q^2 = B_1 \cdot q^{-5} + B_2 \cdot q^{-3}$	<input type="checkbox"/>

- c) Für den Kauf einer Fräsmaschine wird ein Kredit in Höhe von € 45.000 aufgenommen. Dieser Kredit wird durch nachschüssige Semesterraten in Höhe von je € 3.500 und eine Restzahlung getilgt. Der Semesterzinssatz beträgt 0,8 %.

Für die Rückzahlung des Kredits wurde der nachstehende Tilgungsplan erstellt.

Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	halbjährliche Annuität	Restschuld
0	---	---	---	€ 45.000
1	€ 360	€ 3.140	€ 3.500	

- 1) Vervollständigen Sie im obigen Tilgungsplan die Zeile für das Semester 1. [0/1 P.]

Es werden 13 nachschüssige Semesterraten gezahlt. Ein Semester nach Zahlung der letzten Semesterrate wird der Kredit durch eine Restzahlung vollständig getilgt.

- 2) Vervollständigen Sie im nachstehenden Tilgungsplan die Zeilen für die Semester 13 und 14. [0/1 P.]

Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	halbjährliche Annuität	Restschuld
13	€ 44,94	€ 3.455,06	€ 3.500,00	
14	€ 17,30			€ 0,00

Für eine alternative Rückzahlung wird folgende Berechnung durchgeführt:

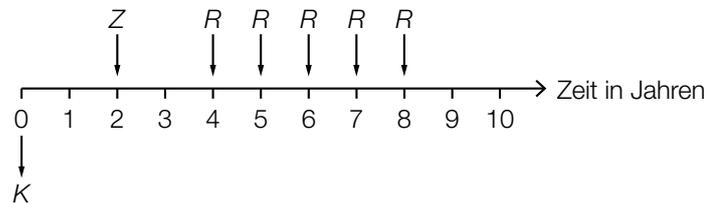
$$\sqrt[13]{1,008} - 1 \approx 0,0013$$

- 3) Interpretieren Sie das Ergebnis der obigen Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang. [0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

a1) $A = \frac{K}{1,02^{-1} + 1,02^{-3}}$

a2)



a3) $60\,000 \cdot 1,02^3 = 20\,000 \cdot 1,02 + R \cdot \frac{1,02^5 - 1}{1,02 - 1} \cdot \frac{1}{1,02^5}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$R = 9\,180,619\dots$$

Die Ratenhöhe beträgt € 9.180,62.

- a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
a2) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen der Raten R .
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen von R .

b1) Der Betrag B_3 ist kleiner als B_2 , weil dieser früher gezahlt wird und damit weniger Zinsen anfallen.

Auch eine rechnerische Argumentation ist als richtig zu werten.

b2)

$S \cdot q^2 = B_1 \cdot q^{-5} + B_2 \cdot q^{-3}$	<input checked="" type="checkbox"/>

- b1) Ein Punkt für das richtige Argumentieren.
b2) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

c1)

Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	halbjährliche Annuität	Restschuld
0	---	---	---	€ 45.000
1	€ 360	€ 3.140	€ 3.500	€ 41.860

c2)

Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	halbjährliche Annuität	Restschuld
13	€ 44,94	€ 3.455,06	€ 3.500,00	€ 2.162,50
14	€ 17,30	€ 2.162,50	€ 2.179,80	€ 0,00

Wird der Tilgungsplan vollständig oder mithilfe der Restschuld im Semester 12 durchgerechnet, ergeben sich aufgrund der Rundung geringfügig abweichende Werte.

c3) Es wird der (äquivalente) Monatszinssatz berechnet.

c1) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen der Zeile für das Semester 1.

c2) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen der Zeilen für die Semester 13 und 14.

c3) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

Fahrradhelme

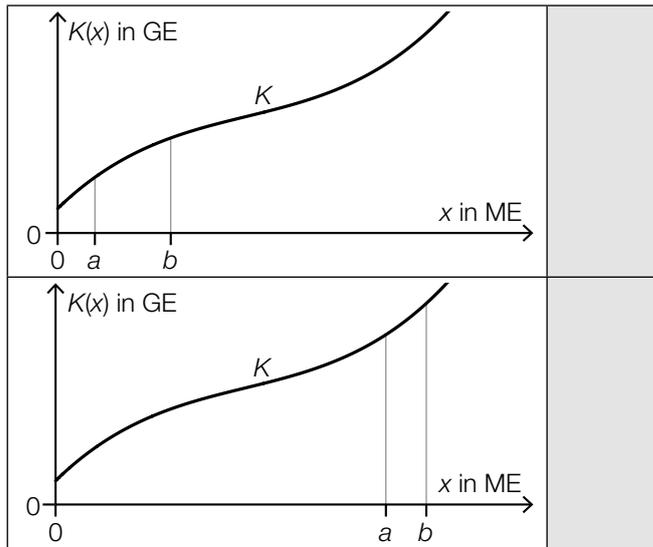
- a) In den zwei unten stehenden Abbildungen ist jeweils der Graph der ertragsgesetzlichen Kostenfunktion K für Fahrradhelme des Modells *Green Protection* dargestellt.

x ... Produktionsmenge in ME

$K(x)$... Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE

- 1) Ordnen Sie den beiden Abbildungen jeweils die zutreffende Aussage aus A bis D zu.

[0/1 P.]



A	Die Gesamtkosten sind bei a ME höher als bei b ME.
B	Die Grenzkosten sind bei a ME geringer als bei b ME.
C	Die Kostenkehre liegt zwischen a ME und b ME.
D	Die Durchschnittskosten sind bei a ME höher als bei b ME.

Für die zugehörige Grenzkostenfunktion K' gilt:

$$K'(x) = 0,003 \cdot x^2 - 0,4 \cdot x + 18$$

Bei einer Produktion von 40 ME betragen die Gesamtkosten 664 GE.

- 2) Berechnen Sie die Fixkosten.

[0/1 P.]

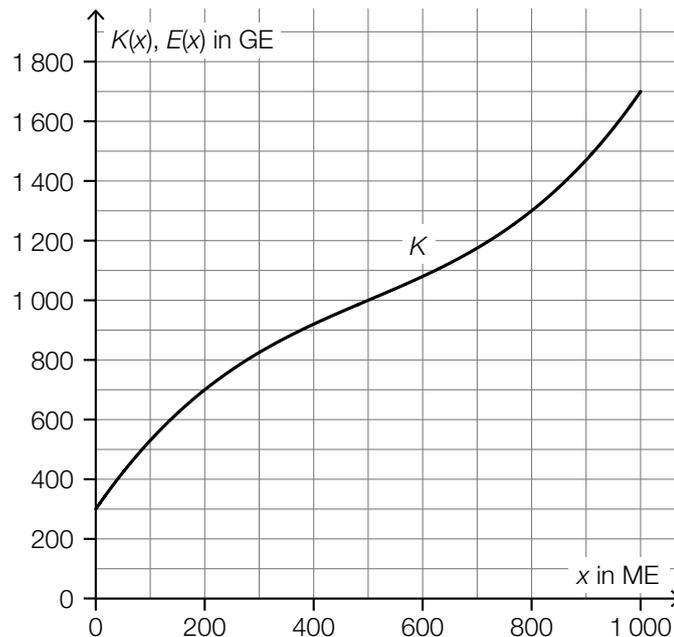
b) Für die Erlösfunktion E für Fahrradhelme des Modells *Silver Protection* gilt:

$$E(x) = -0,0045 \cdot x^2 + 5,45 \cdot x$$

x ... Absatzmenge in ME

$E(x)$... Erlös bei der Absatzmenge x in GE

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Kostenfunktion K für Fahrradhelme des Modells *Silver Protection* dargestellt.



- 1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Erlösfunktion E im Intervall $[0; 1000]$ ein. [0/1 P.]
- 2) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung den Gewinn bei einem Absatz von 500 ME. [0/1 P.]

Es wird die nachstehende Berechnung durchgeführt.

$$\frac{E(700)}{700} = 2,3$$

- 3) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. [0/1 P.]

Das Ergebnis dieser Berechnung entspricht ① bei einem Absatz von 700 ME in der Einheit ② .

①	
dem Grenzerlös	<input type="checkbox"/>
dem Preis	<input type="checkbox"/>
den Durchschnittskosten	<input type="checkbox"/>

②	
GE	<input type="checkbox"/>
ME	<input type="checkbox"/>
GE/ME	<input type="checkbox"/>

c) Für die quadratische Gewinnfunktion G für Fahrradhelme des Modells *Gold Protection* gilt:

$$G(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

x ... Absatzmenge in ME

$G(x)$... Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

Die Fixkosten betragen 220 GE.

Der Break-even-Point liegt bei einem Absatz von 50 ME.

Der maximale Gewinn wird bei einem Absatz von 300 ME erzielt.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a , b und c .

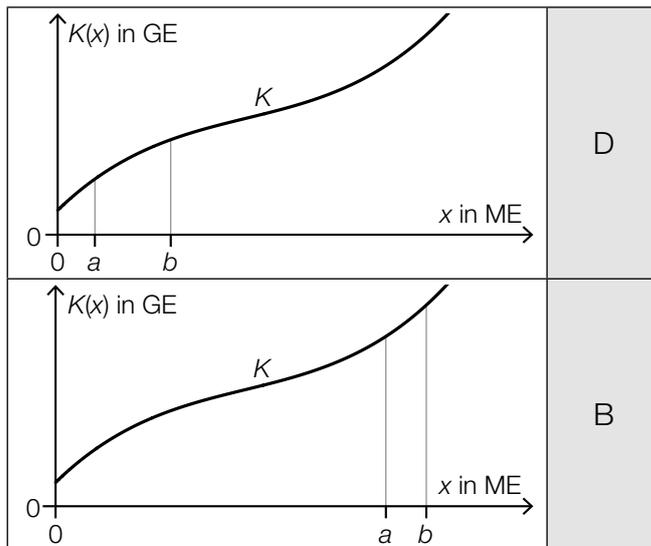
[0/1/2 P.]

2) Berechnen Sie die Koeffizienten a , b und c .

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

a1)



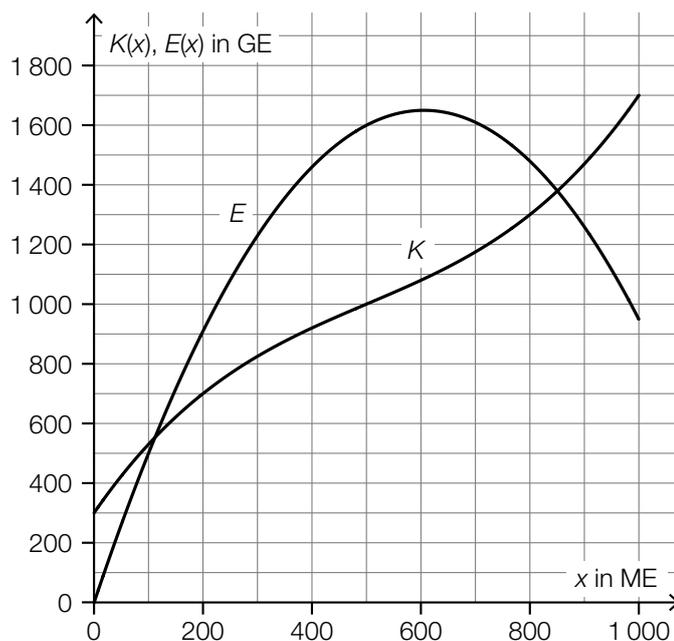
A	Die Gesamtkosten sind bei a ME höher als bei b ME.
B	Die Grenzkosten sind bei a ME geringer als bei b ME.
C	Die Kostenkehre liegt zwischen a ME und b ME.
D	Die Durchschnittskosten sind bei a ME höher als bei b ME.

a2) $K(x) = 0,001 \cdot x^3 - 0,2 \cdot x^2 + 18 \cdot x + F$
 $K(40) = 664$ oder $0,001 \cdot 40^3 - 0,2 \cdot 40^2 + 18 \cdot 40 + F = 664$
 $F = 200$ GE

Die Fixkosten betragen 200 GE.

- a1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Fixkosten.

b1)



b2) $G(500) = E(500) - K(500) = 600$
Toleranzbereich: [570; 630]

Der Gewinn bei einem Absatz von 500 ME beträgt rund 600 GE.

b3)

①	
dem Preis	<input checked="" type="checkbox"/>

②	
GE/ME	<input checked="" type="checkbox"/>

- b1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen der Erlösfunktion E .
b2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Gewinns.
b3) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile.

c1) $G'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$

I: $G(0) = -220$

II: $G(50) = 0$

III: $G'(300) = 0$

oder:

I: $c = -220$

II: $2500 \cdot a + 50 \cdot b + c = 0$

III: $600 \cdot a + b = 0$

c2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$a = -0,008$$

$$b = 4,8$$

$$c = -220$$

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der Fixkosten und des Break-even-Points.

Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung mithilfe der Ableitung.

c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Koeffizienten.

Online-Shopping

Online-Shopping wird in Österreich immer beliebter.

- a) In der nachstehenden Tabelle ist der jeweilige Anteil der Online-Shopper an der Gesamtbevölkerung Österreichs für ausgewählte Jahre angegeben.

Jahr	2007	2009	2011	2013	2015	2017
Anteil der Online-Shopper in %	33	38	44	54	58	62

Der Anteil der Online-Shopper in Prozent soll in Abhängigkeit von der Zeit in Jahren beschrieben werden.

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2007

$S(t)$... Anteil der Online-Shopper zur Zeit t in %

- 1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der zugehörigen linearen Funktion S auf. Wählen Sie dabei $t = 0$ für das Jahr 2007. [0/1 P.]
- 2) Ermitteln Sie mithilfe von S den prognostizierten Wert für den Anteil der Online-Shopper im Jahr 2023. [0/1 P.]

- b) Die zeitliche Entwicklung des Anteils der Online-Shopper an der Gesamtbevölkerung Österreichs kann in einem anderen Modell durch die Funktion A beschrieben werden.

$$A(t) = 70 - 37 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2007

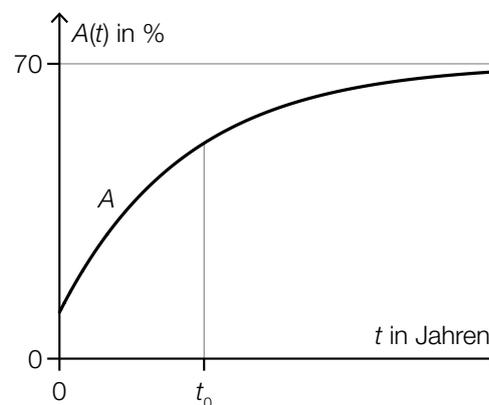
$A(t)$... Anteil der Online-Shopper zur Zeit t in %

Im Jahr 2017 betrug der Anteil der Online-Shopper 62 %.

- 1) Berechnen Sie den Parameter λ .

[0/1 P.]

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion A dargestellt.



- 2) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

[0/1 P.]

Für den Zeitpunkt t_0 gilt, dass _____ ① _____ und _____ ② _____.

①	
$A'(t_0) > 0$	<input type="checkbox"/>
$A'(t_0) = 0$	<input type="checkbox"/>
$A'(t_0) < 0$	<input type="checkbox"/>

②	
$A''(t_0) > 0$	<input type="checkbox"/>
$A''(t_0) = 0$	<input type="checkbox"/>
$A''(t_0) < 0$	<input type="checkbox"/>

- c) In einer Studie wurden die Merkmale „Kaufverhalten“ und „Geschlecht“ für die Altersgruppe der 16- bis 24-Jährigen untersucht. Dabei wurde beim Merkmal „Geschlecht“ zwischen „männlich“ und „weiblich“ unterschieden.

In dieser Altersgruppe sind 81 % Online-Shopper.

51 % dieser Altersgruppe sind männlich.

39 % dieser Altersgruppe sind männlich und Online-Shopper.

Datenquelle: https://www.statistik.at/web_de/presse/121982.html [17.09.2021].

- 1) Vervollständigen Sie die nachstehende Vierfeldertafel so, dass sie den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt. [0/1 P.]

		Kaufverhalten		Summe
		Online-Shopper	kein Online-Shopper	
Geschlecht	männlich			
	weiblich			
Summe				

Eine zufällig ausgewählte Person dieser Altersgruppe ist männlich.

- 2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person Online-Shopper ist. [0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

a1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$S(t) = 3,07 \cdot t + 32,81 \quad (\text{Koeffizienten gerundet})$$

a2) $S(16) = 81,9\dots$

Für das Jahr 2023 ist ein Anteil der Online-Shopper an der Gesamtbevölkerung Österreichs von rund 82 % zu erwarten.

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der linearen Funktion S .

a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des prognostizierten Wertes für das Jahr 2023.

b1) $A(10) = 62$ oder $70 - 37 \cdot e^{-\lambda \cdot 10} = 62$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$\lambda = 0,1531\dots$$

b2)

①		②	
$A'(t_0) > 0$	<input checked="" type="checkbox"/>		
		$A''(t_0) < 0$	<input checked="" type="checkbox"/>

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von λ .

b2) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile.

c1)

		Kaufverhalten		Summe
		Online-Shopper	kein Online-Shopper	
Geschlecht	männlich	0,39	0,12	0,51
	weiblich	0,42	0,07	0,49
Summe		0,81	0,19	

c2) $P(\text{„Online-Shopper“} \mid \text{„männlich“}) = \frac{0,39}{0,51} = 0,764\dots$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 76 %.

c1) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen der Vierfeldertafel.

c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

Bauteile

In einem Betrieb werden verschiedene Bauteile hergestellt.

a) Die Kostenfunktion K für das Bauteil A ist eine Polynomfunktion 3. Grades.

x ... produzierte Menge in ME

$K(x)$... Kosten bei der Menge x in GE

1) Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils die passende Gleichung aus A bis D zu. [0/1 P.]

Der Graph der Grenzkostenfunktion und der Graph der Stückkostenfunktion schneiden einander bei 10 ME.	
Die Stückkosten bei einer Produktion von 10 ME betragen 10 GE/ME.	

A	$\frac{K(10)}{10} = K'(10)$
B	$\frac{K'(10)}{10} = 10$
C	$K''(10) = 0$
D	$K(10) = 100$

b) Für die Kostenfunktion K und die Gewinnfunktion G für das Bauteil B gilt im Intervall $[0; 25]$:

$$K(x) = 2 \cdot x^3 - 60 \cdot x^2 + 700 \cdot x + 6000$$

$$G(x) = -40 \cdot x^2 + 1200 \cdot x - 6000$$

x ... produzierte und verkaufte Menge in ME

$K(x)$... Kosten bei der Menge x in GE

$G(x)$... Gewinn bei der Menge x in GE

- 1) Ermitteln Sie das größtmögliche Intervall der Produktionsmenge, in dem die Grenzkosten maximal 700 GE/ME betragen. [0/1 P.]
- 2) Kreuzen Sie diejenige Gleichung an, deren Lösung das Betriebsminimum ist. [1 aus 5]
[0/1 P.]

$6 \cdot x^2 - 120 \cdot x + 700 = 0$	<input type="checkbox"/>
$12 \cdot x - 120 = 0$	<input type="checkbox"/>
$2 \cdot x^2 + 60 \cdot x + 700 = 0$	<input type="checkbox"/>
$4 \cdot x - 60 = 0$	<input type="checkbox"/>
$6 \cdot x^2 - 120 \cdot x = 0$	<input type="checkbox"/>

Für die Produktion des Bauteils B gilt:

1 ME = 10000 Stück

1 GE = 100 Euro

Es wird genau diejenige Menge produziert, bei der der Gewinn maximal ist.

- 3) Berechnen Sie den Gewinn pro Stück bei dieser Menge. Geben Sie das Ergebnis in Euro/Stück an. [0/1 P.]

Für die zugehörige Erlösfunktion E gilt: $E(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x$

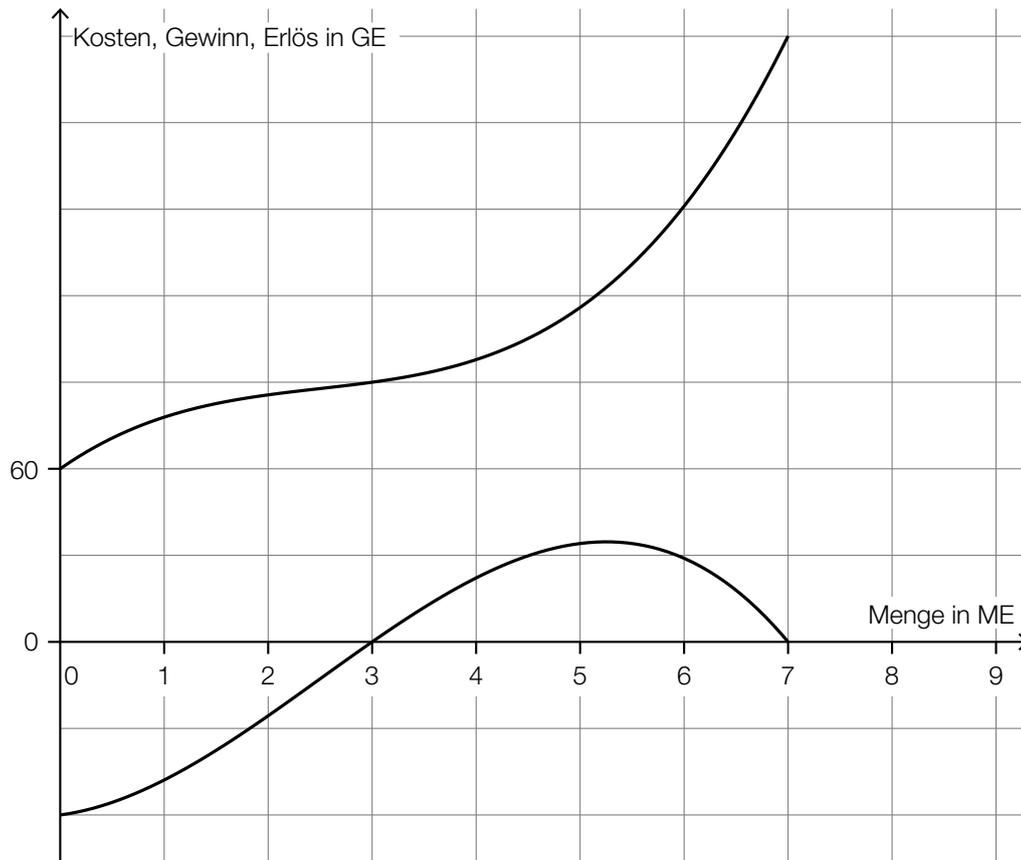
- 4) Ermitteln Sie die Parameter a , b und c . [0/1 P.]

$a =$ _____

$b =$ _____

$c =$ _____

- c) In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Kostenfunktion und der Graph der Gewinnfunktion für das Bauteil C dargestellt.



Die zugehörige Erlösfunktion ist linear.

- 1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Erlösfunktion ein. [0/1 P.]
- 2) Ermitteln Sie den Preis, zu dem das Bauteil C verkauft wird. [0/1 P.]

- d) Für die Preis-Absatz-Funktion für das Bauteil D gilt:

$$p(x) = p_H - 20 \cdot x$$

x ... abgesetzte Menge in ME

$p(x)$... Preis bei der abgesetzten Menge x in GE/ME

p_H ... Höchstpreis in GE/ME

Der Preis bei einem Verkauf von 5 ME beträgt 300 GE/ME.

- 1) Berechnen Sie den Höchstpreis p_H . [0/1 P.]
- 2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung der Preis-Absatz-Funktion im gegebenen Sachzusammenhang. [0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

a1)

Der Graph der Grenzkostenfunktion und der Graph der Stückkostenfunktion schneiden einander bei 10 ME.	A
Die Stückkosten bei einer Produktion von 10 ME betragen 10 GE/ME.	D

A	$\frac{K(10)}{10} = K'(10)$
B	$\frac{K'(10)}{10} = 10$
C	$K''(10) = 0$
D	$K(10) = 100$

a1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

b1) $K'(x) = 700$ oder $6 \cdot x^2 - 120 \cdot x + 700 = 700$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 20$$

Im Intervall $[0; 20]$ betragen die Grenzkosten maximal 700 GE/ME.

Die Angabe in Intervallschreibweise ist für die Punktevergabe nicht erforderlich.

b2)

$4 \cdot x - 60 = 0$	<input checked="" type="checkbox"/>

b3) $G'(x) = 0$ oder $-80 \cdot x + 1200 = 0$
 $x = 15$

$$G(15) = 3000$$

$$15 \text{ ME} = 150000 \text{ Stück}$$

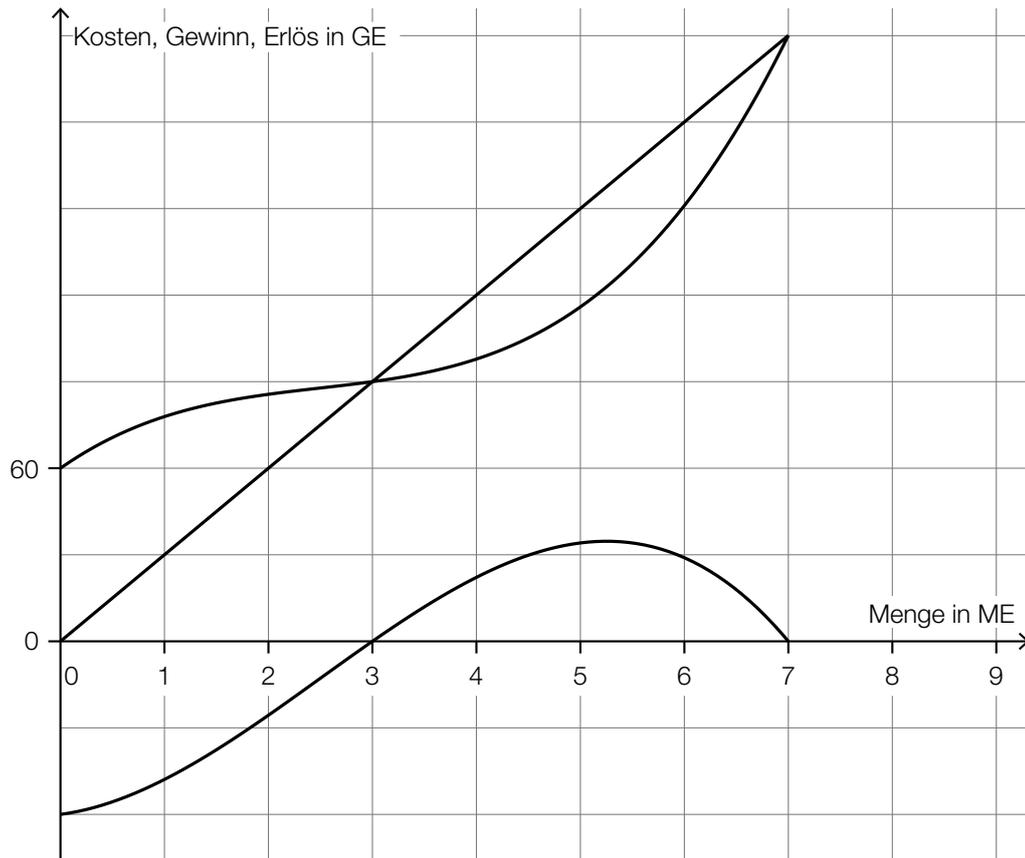
$$3000 \text{ GE} = 300.000 \text{ Euro}$$

$$\frac{300.000 \text{ Euro}}{150000 \text{ Stück}} = 2 \text{ Euro/Stück}$$

b4) $a = 2$
 $b = -100$
 $c = 1900$

- b1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Intervalls.
b2) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.
b3) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Gewinns pro Stück in der Einheit Euro/Stück.
b4) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Parameter a , b und c .

c1)



c2) $\frac{60}{2} = 30$

Der Preis beträgt 30 GE/ME.

- c1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen der Erlösfunktion.
c2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Preises.

d1) $300 = p_H - 20 \cdot 5$
 $p_H = 400 \text{ GE/ME}$

d2) Die Steigung -20 gibt an, dass eine Preissenkung um 20 GE/ME zu einer Absatzsteigerung um 1 ME führt.

oder:

Soll die abgesetzte Menge um 1 ME gesteigert werden, so muss der Preis um 20 GE/ME gesenkt werden.

- d1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Höchstpreises p_H .
d2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

Swimmingpool (2)

- a) Lea möchte einen Pool kaufen. Sie hat dafür über einen Zeitraum von 5 Jahren bei einem konstanten Jahreszinssatz 4 Einzahlungen Z auf ein Konto getätigt und so bis heute € 2.468,39 gespart.

Dabei gilt:

$$Z + Z \cdot 1,0102^2 + Z \cdot 1,0102^4 + Z \cdot 1,0102^5 = 2468,39$$

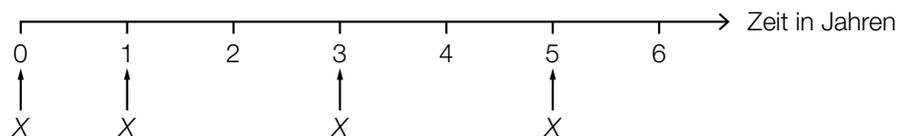
- 1) Lesen Sie den Jahreszinssatz i ab.

$$i = \underline{\hspace{4cm}} \% \text{ p. a.} \quad [0/1 P.]$$

- 2) Berechnen Sie die Höhe von Z .

[0/1 P.]

- b) Melisa möchte einen Pool kaufen. Sie hat dafür 4 Einzahlungen X auf ein Konto getätigt (siehe nachstehende Zeitachse).



Für verschiedene Zeitpunkte soll der Wert dieser Einzahlungen berechnet werden. Der jährliche Aufzinsungsfaktor wird mit q bezeichnet.

- 1) Ordnen Sie den beiden Werten jeweils den zutreffenden Ausdruck aus A bis D zu. [0/1 P.]

Wert aller Einzahlungen zum Zeitpunkt 1	
Wert aller Einzahlungen zum Zeitpunkt 3	

A	$X + X \cdot q + \frac{X}{q^2} + \frac{X}{q^4}$
B	$X + X \cdot q^2 + X \cdot q^3 + \frac{X}{q^2}$
C	$X \cdot q + X \cdot q^3 + X \cdot q^4 + \frac{X}{q}$
D	$X + \frac{X}{q} + \frac{X}{q^3} + \frac{X}{q^5}$

- c) Konstantin möchte einen Pool kaufen. Er nimmt dafür einen Kredit in Höhe von € 20.000 auf, den er durch 120 Monatsraten in Höhe von jeweils € 198,71 zurückzahlen möchte. Die 1. Zahlung erfolgt 1 Monat nach Auszahlung des Kredits.

1) Berechnen Sie den Monatszinssatz für diesen Kredit. [0/1 P.]

- d) Simon möchte einen Pool kaufen. Er nimmt dafür einen Kredit auf, den er durch nachschüssige monatliche Annuitäten bei einem Monatszinssatz i_{12} zurückzahlen soll. Die Höhe der monatlichen Annuitäten ändert sich dabei.

In der nachstehenden Tabelle ist ein Ausschnitt des zugehörigen Tilgungsplans dargestellt.

Monat	Zinsanteil	Tilgungsanteil	monatliche Annuität	Restschuld
12				€ 6.766,03
13				€ 6.492,13
14				€ 6.492,13
15			A_{15}	€ 6.217,55

- 1) Geben Sie denjenigen Monat an, in dem der Tilgungsanteil € 0 beträgt. Begründen Sie Ihre Entscheidung. [0/1 P.]
- 2) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung von A_{15} auf.
Verwenden Sie dabei i_{12} sowie die Werte für die Restschuld im Monat 14 und im Monat 15.

$A_{15} =$ _____ [0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

a1) $i = 1,02 \% \text{ p. a.}$

a2) $Z \cdot (1 + 1,0102^2 + 1,0102^4 + 1,0102^5) = 2468,39$
 $Z = 599,999\dots$

Die Höhe von Z beträgt € 600,00.

a1) Ein Punkt für das Ablesen des richtigen Jahreszinssatzes i .

a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Höhe von Z .

b1)

Wert aller Einzahlungen zum Zeitpunkt 1	A
Wert aller Einzahlungen zum Zeitpunkt 3	B

A	$X + X \cdot q + \frac{X}{q^2} + \frac{X}{q^4}$
B	$X + X \cdot q^2 + X \cdot q^3 + \frac{X}{q^2}$
C	$X \cdot q + X \cdot q^3 + X \cdot q^4 + \frac{X}{q}$
D	$X + \frac{X}{q} + \frac{X}{q^3} + \frac{X}{q^5}$

b1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

c1) $20000 = 198,71 \cdot \frac{(1 + i_{12})^{120} - 1}{i_{12}} \cdot \frac{1}{(1 + i_{12})^{120}}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz: $i_{12} = 0,0030\dots$

Der Monatszinssatz beträgt rund 0,3 %.

c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Monatszinssatzes.

d1) Der Tilgungsanteil im Monat 14 beträgt € 0, weil die Restschuld am Ende des Monats 14 gleich groß wie am Ende des Monats 13 ist.

d2) $A_{15} = 6492,13 - 6217,55 + 6492,13 \cdot i_{12}$

oder:

$$A_{15} = 274,58 + 6492,13 \cdot i_{12}$$

d1) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Monats und das richtige Begründen.

d2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.

Kraftfahrzeug-Bestand

- a) In der nachstehenden Tabelle ist der Kraftfahrzeug-Bestand in Österreich für ausgewählte Jahre angegeben.

Ende des Jahres ...	Kraftfahrzeug-Bestand in Millionen Stück
2008	5,87
2010	6,09
2012	6,30
2014	6,47
2016	6,65
2018	6,90

Datenquelle: https://www.statistik.at/web_de/statistiken/energie_umwelt_innovation_mobilitaet/verkehr/strasse/kraftfahrzeuge_-_bestand/index.html [21.10.2020].

Mit den Zahlen aus der obigen Tabelle wird die nachstehende Berechnung durchgeführt.

$$\frac{6,9 - 6,3}{6,3} \approx 0,095$$

- 1) Interpretieren Sie das Ergebnis der obigen Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang. [0/1 P.]

Der Kraftfahrzeug-Bestand soll in Abhängigkeit von der Zeit näherungsweise durch die lineare Funktion K beschrieben werden.

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Ende des Jahres 2008

$K(t)$... Kraftfahrzeug-Bestand zur Zeit t in Millionen Stück

- 2) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung dieser linearen Funktion K auf. Wählen Sie dabei $t = 0$ für das Ende des Jahres 2008. [0/1 P.]
- 3) Interpretieren Sie den Wert der Steigung von K im gegebenen Sachzusammenhang. [0/1 P.]

Die Funktionswerte weichen von den Tabellenwerten des Kraftfahrzeug-Bestands ab.

- 4) Berechnen Sie diese absolute Abweichung für das Jahr 2018. [0/1 P.]

- b) Die zeitliche Entwicklung des Diesel-PKW-Bestands in Österreich kann modellhaft durch die logistische Funktion D beschrieben werden.

$$D(t) = \frac{2,84}{1 + 277 \cdot e^{-0,19 \cdot t}}$$

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Ende des Jahres 1970

$D(t)$... Diesel-PKW-Bestand zur Zeit t in Millionen Stück

- 1) Ermitteln Sie mithilfe von D den prognostizierten Wert für den Diesel-PKW-Bestand am Ende des Jahres 2025.

_____ Millionen Stück

[0/1 P.]

Für die allgemeine Form einer logistischen Wachstumsfunktion f gilt:

$$f(t) = \frac{a}{b + c \cdot d^t}$$

a, b, c, d ... positive Parameter

$$0 < d < 1$$

- 2) Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, dem sich die Funktionswerte von f mit wachsendem t in jedem Fall annähern. [1 aus 5] [0/1 P.]

$\frac{a}{b}$	<input type="checkbox"/>
$\frac{a}{c}$	<input type="checkbox"/>
$\frac{a}{c \cdot d}$	<input type="checkbox"/>
$\frac{a}{b + c}$	<input type="checkbox"/>
$\frac{a}{b + c \cdot d}$	<input type="checkbox"/>

- c) Der Elektro-PKW-Bestand ist in den letzten Jahren stark gestiegen. In der nachstehenden Tabelle sind für ausgewählte Jahre die prozentuellen Änderungen des Elektro-PKW-Bestands jeweils am Ende eines Jahres gegenüber dem Ende des jeweiligen Vorjahres angegeben (Werte gerundet).

Ende des Jahres ...	2015	2016	2017	2018
Änderung gegenüber dem Ende des Vorjahres	+49 %	+80 %	+61 %	+43 %

- 1) Berechnen Sie die mittlere jährliche prozentuelle Änderung des Elektro-PKW-Bestands für den Zeitraum vom Anfang des Jahres 2015 bis zum Ende des Jahres 2018. [0/1 P.]

Am Ende des Jahres 2018 betrug der Elektro-PKW-Bestand E Stück.
Am Ende des Jahres 2017 betrug der Elektro-PKW-Bestand X Stück.

- 2) Stellen Sie mithilfe von E eine Formel zur Berechnung von X auf.

$X =$ _____

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

a1) Der Kraftfahrzeug-Bestand ist im Zeitraum vom Ende des Jahres 2012 bis zum Ende des Jahres 2018 um rund 9,5 % gestiegen.

a2) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$$K(t) = 0,1 \cdot t + 5,88$$

a3) Gemäß diesem Modell steigt der Kraftfahrzeug-Bestand um 100 000 Stück pro Jahr.

a4) $K(10) = 6,88$

absolute Abweichung vom Tabellenwert: $6,9 - 6,88 = 0,02$

Auch die Angabe von $-0,02$ ist als richtig zu werten.

a1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

a2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung von K .

a3) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

a4) Ein Punkt für das richtige Berechnen der absoluten Abweichung.

b1) 2,817... Millionen Stück

b2)

$\frac{a}{b}$	<input checked="" type="checkbox"/>

b1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des prognostizierten Wertes für den Diesel-PKW-Bestand am Ende des Jahres 2025.

b2) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

c1) $\sqrt[4]{1,49 \cdot 1,8 \cdot 1,61 \cdot 1,43} - 1 = 0,5763\dots$

Die mittlere jährliche prozentuelle Änderung beträgt rund 57,6 %.

c2) $X = \frac{E}{1,43}$

c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der mittleren jährlichen prozentuellen Änderung.

c2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.

Handcreme*

Ein Unternehmen produziert verschiedene Handcremen.

a) Von der Nachfrage nach Handcremen der Marke *Hand Aktiv* ist bekannt:

Bei einem Preis von 4,2 GE/ME werden 500 ME nachgefragt.

Wird der Preis auf 3,2 GE/ME gesenkt, so verdoppelt sich die nachgefragte Menge.

Der Zusammenhang zwischen der nachgefragten Menge und dem Preis soll durch die lineare Preisfunktion der Nachfrage p_N beschrieben werden.

x ... nachgefragte Menge in ME

$p_N(x)$... Preis bei der nachgefragten Menge x in GE/ME

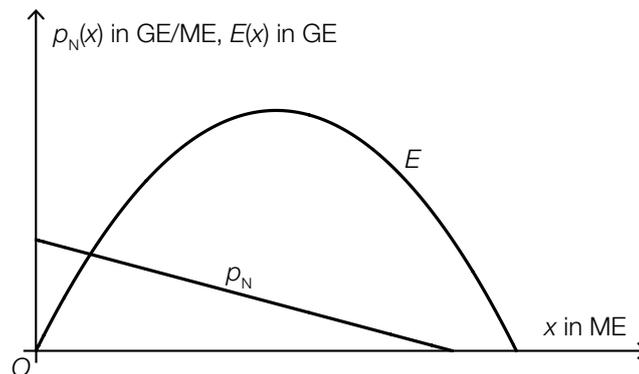
1) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion p_N auf.

[0/1 P.]

2) Berechnen Sie die Sättigungsmenge.

[0/1 P.]

In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Preisfunktion der Nachfrage p_N und der Graph einer Funktion E dargestellt.

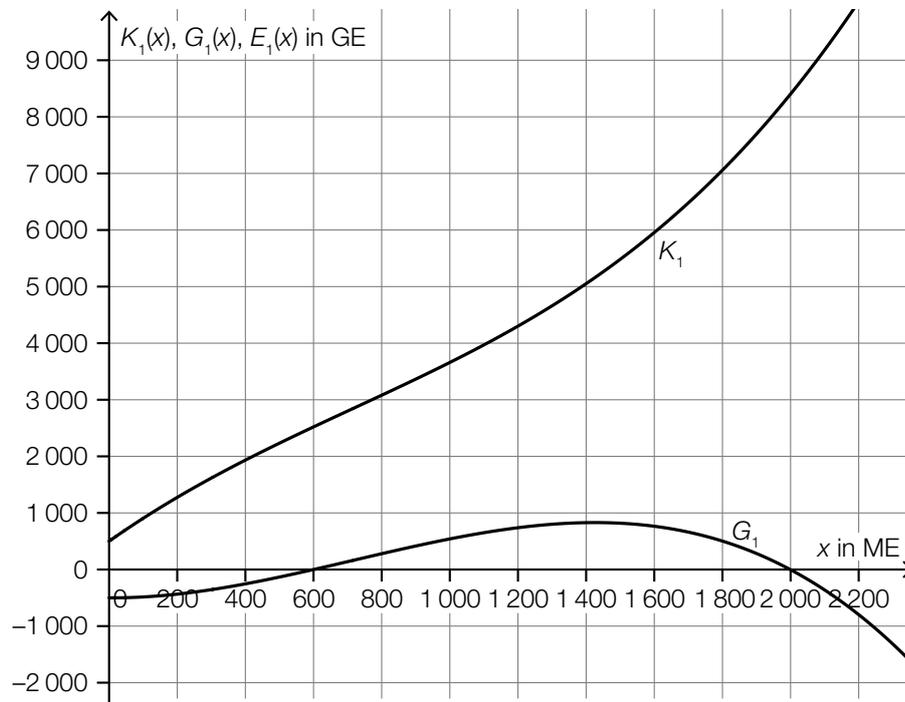


3) Begründen Sie, warum E nicht die zu p_N passende Erlösfunktion sein kann.

[0/1 P.]

b) Die Handcreme *Kamille Classic* wird zu einem fixen Preis verkauft.

In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen der Kostenfunktion K_1 und der Gewinnfunktion G_1 dargestellt.



1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der zugehörigen Erlösfunktion E_1 ein. [0/1 P.]

c) Für die Grenzkostenfunktion K_2' bei der Produktion der Handcreme *Handrepair* gilt:

$$K_2'(x) = 0,0003 \cdot x^2 + b \cdot x + 40$$

x ... Produktionsmenge in ME

$K_2'(x)$... Grenzkosten bei der Produktionsmenge x in GE/ME

Die Fixkosten betragen 500 GE.

1) Tragen Sie in der nachstehenden Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K_2 die fehlenden Zahlen ein.

$$K_2(x) = \boxed{} \cdot x^3 + \frac{1}{2} \cdot b \cdot x^2 + \boxed{} \cdot x + \boxed{} \quad [0/1 P.]$$

Bei der Produktion von 100 ME betragen die Gesamtkosten 3 600 GE.

2) Berechnen Sie b . [0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

a1) $p_N(x) = k \cdot x + d$
 $p_N(500) = 4,2$
 $p_N(1\,000) = 3,2$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$k = -0,002$$
$$d = 5,2$$

$$p_N(x) = -0,002 \cdot x + 5,2$$

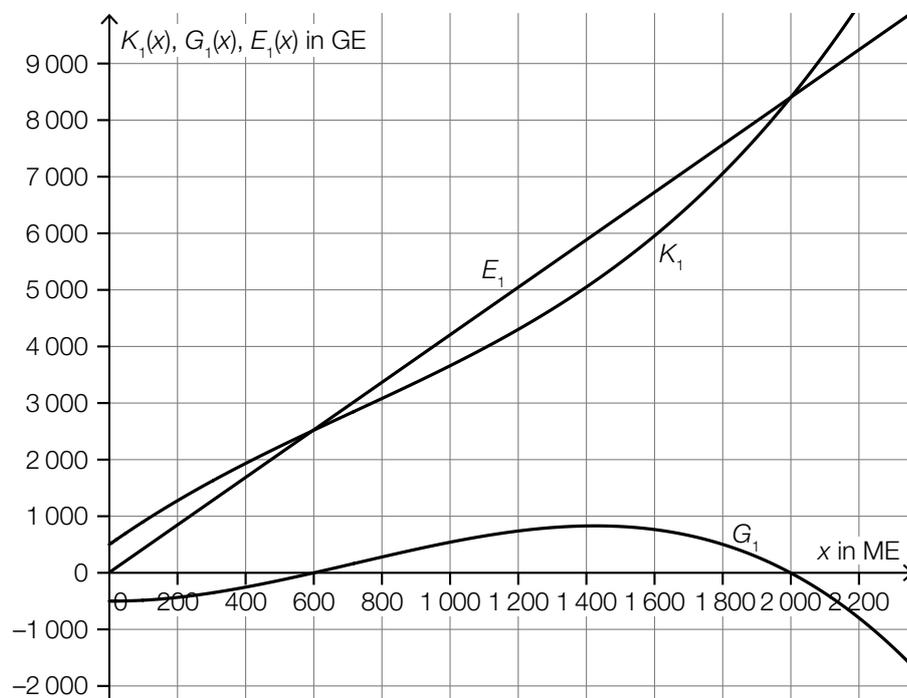
a2) $p_N(x) = 0$ oder $-0,002 \cdot x + 5,2 = 0$
 $x = 2\,600$

Die Sättigungsmenge beträgt 2 600 ME.

a3) Die Nullstelle von p_N und die positive Nullstelle von E müssten übereinstimmen.

- a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Funktion p_N .
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Sättigungsmenge.
a3) Ein Punkt für das richtige Begründen.

b1)



b1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen der Erlösfunktion E_1 .

$$\text{c1) } K_2(x) = \boxed{0,0001} \cdot x^3 + \frac{1}{2} \cdot b \cdot x^2 + \boxed{40} \cdot x + \boxed{500}$$

$$\text{c2) } K_2(100) = 3600 \quad \text{oder} \quad 0,0001 \cdot 100^3 + \frac{1}{2} \cdot b \cdot 100^2 + 40 \cdot 100 + 500 = 3600$$
$$b = -0,2$$

c1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Zahlen.

c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen von b .

Neuwagen*

a) Lorena möchte einen Neuwagen um € 20.000 kaufen. Sie hat dafür auf einem Sparbuch einen Betrag von € 18.500 angespart. Der Zinssatz beträgt 2,1 % p. a.

- 1) Berechnen Sie, wie lange dieser Betrag auf dem Sparbuch veranlagt werden müsste, um einen Wert von € 20.000 zu erreichen. [0/1 P.]

Bei einer anderen Veranlagung werden Lorena die Jahreszinssätze i und j angeboten. Dabei gilt:

$$18500 \cdot (1 + i)^n \cdot (1 + j)^{m-n} = 20000 \quad \text{mit} \quad m \geq n > 0$$

- 2) Beschreiben Sie die Bedeutung von m im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an. [0/1 P.]

b) Mario hat vor 6 Jahren ein Konto eröffnet, um für einen Neuwagen zu sparen. Er zahlte 4 Jahre lang nachschüssige Quartalsraten auf dieses Konto ein. Die restlichen 2 Jahre tätigte er keine Einzahlungen mehr.

R ... Höhe der nachschüssigen Quartalsraten

i_4 ... Quartalszinssatz

q_4 ... vierteljährlicher Aufzinsungsfaktor

- 1) Tragen Sie die zwei fehlenden Hochzahlen in der nachstehenden Formel zur Berechnung des heutigen Kontostands K ein.

$$K = R \cdot \frac{q_4^{\boxed{}} - 1}{q_4 - 1} \cdot q_4^{\boxed{}} \quad \text{[0/1 P.]}$$

- 2) Berechnen Sie R für $K = € 6.916,22$ und $i_4 = 0,5 \%$. [0/1 P.]

- c) Helena erhält von einem Autohändler ein Zahlungsangebot für einen Neuwagen mit einem Kaufpreis von € 20.990. Dieses Zahlungsangebot kann durch die nachstehende Gleichung beschrieben werden.

$$20990 \cdot q_{12}^{36} = 5200 \cdot q_{12}^{36} + 220 \cdot \frac{q_{12}^{36} - 1}{q_{12} - 1} + 9870$$

q_{12} ... monatlicher Aufzinsungsfaktor

- 1) Tragen Sie in der nachstehenden Tabelle die Höhe der Zahlung nach 1 Monat und die Höhe der Zahlung nach 36 Monaten ein. [0/1 P.]

Zeit in Monaten	Höhe der Zahlung in €
0	5200
1	
...	...
36	

Helena will auch noch andere Zahlungsangebote des Autohändlers vergleichen. Dabei muss sie den gegebenen positiven Quartalszinssatz i_4 in den äquivalenten Monatszinssatz i_{12} umrechnen.

- 2) Kreuzen Sie die richtige Umrechnung an. [1 aus 5] [0/1 P.]

$i_{12} = \sqrt[4]{1 + i_4} - 1$	<input type="checkbox"/>
$i_{12} = (1 + i_4)^{\frac{1}{3}} - 1$	<input type="checkbox"/>
$i_{12} = (1 + i_4)^4 - 1$	<input type="checkbox"/>
$i_{12} = \sqrt[3]{1 + i_4}$	<input type="checkbox"/>
$i_{12} = \frac{i_4}{3}$	<input type="checkbox"/>

Möglicher Lösungsweg

a1) $18500 \cdot 1,021^t = 20000$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t = 3,7\dots$

Der Betrag müsste rund 4 Jahre lang auf dem Sparbuch veranlagt werden.

a2) m ist die gesamte Laufzeit der Veranlagung in Jahren.

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Zeitdauer.

a2) Ein Punkt für das richtige Beschreiben der Bedeutung von m im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der zugehörigen Einheit.

b1) $K = R \cdot \frac{q_4^{\boxed{16}} - 1}{q_4 - 1} \cdot q_4^{\boxed{8}}$

b2) $R \cdot \frac{1,005^{16} - 1}{0,005} \cdot 1,005^8 = 6916,22$
 $R = \text{€ } 400,00\dots$

b1) Ein Punkt für das Eintragen der zwei richtigen Hochzahlen.

b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen von R .

c1)

Zeit in Monaten	Höhe der Zahlung in €
0	5 200
1	220
...	...
36	10 090

c2)

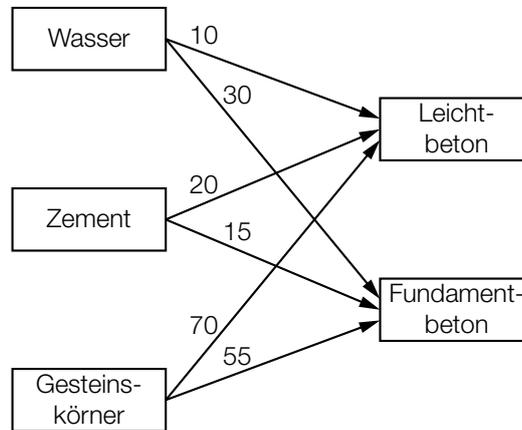
$i_{12} = (1 + i_4)^{\frac{1}{3}} - 1$	<input checked="" type="checkbox"/>

c1) Ein Punkt für das Eintragen der zwei richtigen Zahlen.

c2) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Beton*

- a) Für die Herstellung von Leichtbeton und Fundamentbeton werden Wasser, Zement und Gesteinskörner benötigt. Der Bedarf an diesen 3 Rohstoffen ist im nachstehenden Gozinto-Graphen dargestellt (Wasser und Gesteinskörner in L, Zement in kg, Leichtbeton und Fundamentbeton in ME).



- 1) Vervollständigen Sie den nachstehenden Satz durch Eintragen der richtigen Zahl.

Für die Herstellung von 1 ME Leichtbeton und 2 ME Fundamentbeton werden insgesamt

_____ kg Zement benötigt. [0/1 P.]

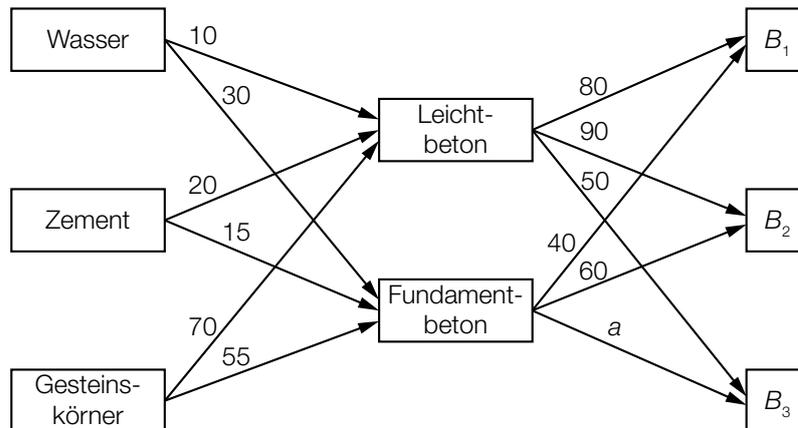
Die 3×2 -Matrix \mathbf{R} beschreibt den Bedarf an den 3 Rohstoffen für die Herstellung von jeweils 1 ME der beiden Betonsorten.

- 2) Ermitteln Sie die Matrix \mathbf{R} . [0/1 P.]

Für eine Baustelle werden 50 ME Leichtbeton und 30 ME Fundamentbeton bestellt.

- 3) Ermitteln Sie den Mengenbedarf an den 3 Rohstoffen für diese Bestellung. [0/1 P.]

Im erweiterten Gozinto-Graphen (siehe nachstehende Abbildung) ist auch der Bedarf an Leichtbeton und Fundamentbeton für die 3 Baustellen B_1 , B_2 und B_3 dargestellt.



Die Matrix \mathbf{A} beschreibt den Bedarf an Rohstoffen für die 3 Baustellen B_1 , B_2 und B_3 .

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2000 & 2700 & 1340 \\ 2200 & 2700 & 1420 \\ 7800 & 9600 & 5040 \end{pmatrix}$$

4) Ermitteln Sie die Mengenangabe a .

[0/1 P.]

- b) Ein Bauunternehmen möchte ein Förderband anschaffen. Die Anschaffungskosten betragen € 28.000. Als Nutzungsdauer werden 7 Jahre angenommen. Das Bauunternehmen erwartet durch diese Investition jährliche Einnahmen in Höhe von € 5.000. Jeweils nach 2 Jahren entstehen Wartungskosten in Höhe von € 1.000. Am Ende der Nutzungsdauer beträgt der Liquidationserlös € 3.000.

- 1) Übertragen Sie die Einnahmen und Ausgaben für die gesamte Nutzungsdauer in die nachstehende Tabelle. [0/1 P.]

Zeit nach der Anschaffung in Jahren	Einnahmen in €	Ausgaben in €
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

Das Bauunternehmen rechnet mit einem kalkulatorischen Zinssatz von 3 % p. a.

- 2) Berechnen Sie den Kapitalwert der Investition.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

a1) Für die Herstellung von 1 ME Leichtbeton und 2 ME Fundamentbeton werden insgesamt 50 kg Zement benötigt.

$$a2) \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 20 & 15 \\ 70 & 55 \end{pmatrix}$$

$$a3) \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 20 & 15 \\ 70 & 55 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1400 \\ 1450 \\ 5150 \end{pmatrix}$$

Es werden 1 400 L Wasser, 1 450 kg Zement und 5 150 L Gesteinskörner benötigt.

$$a4) 10 \cdot 50 + 30 \cdot a = 1340$$

oder:

$$20 \cdot 50 + 15 \cdot a = 1420$$

oder:

$$70 \cdot 50 + 55 \cdot a = 5040$$

$$a = 28$$

a1) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen des Satzes.

a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Matrix \mathbf{R} .

a3) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Mengenbedarfs an Rohstoffen.

a4) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von a .

b1)

Zeit nach der Anschaffung in Jahren	Einnahmen in €	Ausgaben in €
0	0	28000
1	5000	0
2	5000	1000
3	5000	0
4	5000	1000
5	5000	0
6	5000	1000
7	8000	0

$$b2) C_0 = -28000 + \frac{5000}{1,03} + \frac{4000}{1,03^2} + \frac{5000}{1,03^3} + \frac{4000}{1,03^4} + \frac{5000}{1,03^5} + \frac{4000}{1,03^6} + \frac{8000}{1,03^7} = 2922,122\dots$$

Der Kapitalwert beträgt € 2.922,12.

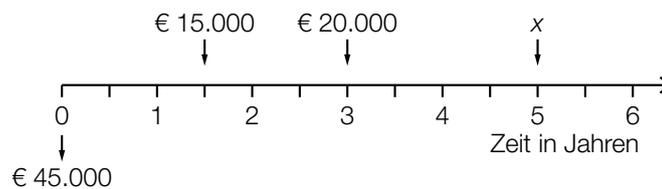
b1) Ein Punkt für das richtige Übertragen der Einnahmen und Ausgaben.

b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Kapitalwerts.

Almhütte*

Ein Hüttenwirt möchte seine Gästezimmer renovieren. Für die Finanzierung der Renovierung benötigt er einen Kredit in Höhe von € 45.000 und holt Angebote bei verschiedenen Banken ein.

- a) Die Bank A bietet dem Hüttenwirt einen Kredit mit einer Laufzeit von 5 Jahren bei einem Semesterzinssatz von 4,5 % p. s. an.
Die nachstehende Zeitachse stellt eine Rückzahlungsvariante dieses Kredits dar.



Die oben dargestellte Rückzahlungsvariante soll als Gleichung angeschrieben werden.

- 1) Tragen Sie die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$$45000 \cdot 1,045^{10} = 15000 \cdot 1,045^{\boxed{}} + 20000 \cdot 1,045^{\boxed{}} + x \quad [0/1 P.]$$

- 2) Berechnen Sie den zu 4,5 % p. s. äquivalenten Jahreszinssatz. [0/1 P.]

- b) Die Bank B bietet dem Hüttenwirt einen Kredit in Höhe von € 45.000 bei einem Monatszinssatz von 0,74 % p. m. an.

Der Kredit soll in 4 Jahren durch monatliche nachschüssige Annuitäten gleicher Höhe getilgt werden.

- 1) Berechnen Sie die Höhe der monatlichen Annuität. [0/1 P.]

Der Hüttenwirt kann allerdings nur € 800 monatlich zurückzahlen.

- 2) Vervollständigen Sie im nachstehenden Tilgungsplan die Zeile für den Monat 1. [0/1 P.]

Monat	Zinsanteil	Tilgungsanteil	monatliche Annuität	Restschuld
0	---	---	---	€ 45.000
1			€ 800	

- c) Die Bank C legt dem Hüttenwirt als Angebot für den Kredit in Höhe von € 45.000 einen Tilgungsplan vor. In der nachstehenden Tabelle ist der unvollständige Tilgungsplan für das Quartal 1 angegeben.

Quartal	Zinsanteil	Tilgungsanteil	vierteljährliche Annuität	Restschuld
0	---	---	---	€ 45.000
1	€ 900		A	K_1

- 1) Stellen Sie mithilfe von A eine Formel zur Berechnung von K_1 auf.

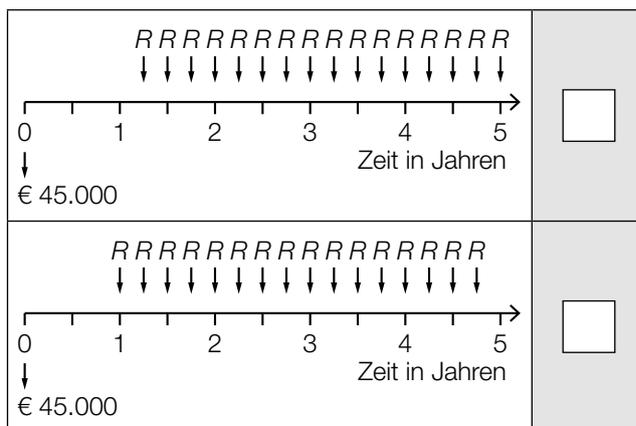
$K_1 =$ _____ [0/1 P.]

- d) Der Hüttenwirt vergleicht die Angebote von zwei weiteren Banken für den Kredit in Höhe von € 45.000. Bei beiden Angeboten beträgt der Quartalszinssatz 2 % p. q.

In den unten stehenden Abbildungen sind die Rückzahlungen für diese zwei Angebote jeweils auf einer Zeitachse dargestellt.

- 1) Ordnen Sie den beiden Abbildungen jeweils die passende Gleichung aus A bis D zu.

[0/1 P.]



A	$45\,000 = R \cdot \frac{1,02^{16} - 1}{1,02 - 1} \cdot \frac{1}{1,02^{15}}$
B	$45\,000 = R \cdot \frac{1,02^{16} - 1}{1,02 - 1} \cdot \frac{1}{1,02^{17}}$
C	$45\,000 = R \cdot \frac{1,02^{16} - 1}{1,02 - 1} \cdot \frac{1}{1,02^{19}}$
D	$45\,000 = R \cdot \frac{1,02^{16} - 1}{1,02 - 1} \cdot \frac{1}{1,02^{20}}$

Möglicher Lösungsweg

$$\text{a1) } 45\,000 \cdot 1,045^{10} = 15\,000 \cdot 1,045^{\boxed{7}} + 20\,000 \cdot 1,045^{\boxed{4}} + x$$

$$\text{a2) } 1,045^2 - 1 = 0,0920\dots$$

Der äquivalente Jahreszinssatz beträgt rund 9,2 % p. a.

a1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Zahlen.

a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des äquivalenten Jahreszinssatzes.

$$\text{b1) } 45\,000 = R \cdot \frac{1,0074^{48} - 1}{1,0074 - 1} \cdot \frac{1}{1,0074^{48}}$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$R = 1\,117,264\dots$$

Die Höhe der monatlichen Annuität beträgt € 1.117,26.

b2)

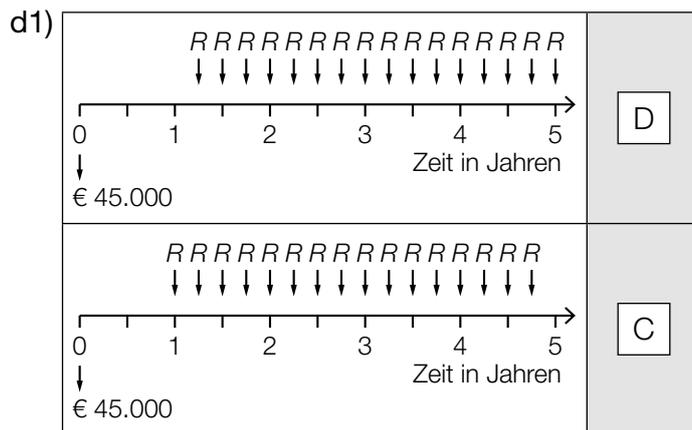
Monat	Zinsanteil	Tilgungsanteil	monatliche Annuität	Restschuld
0	---	---	---	€ 45.000
1	€ 333	€ 467	€ 800	€ 44.533

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Höhe der monatlichen Annuität.

b2) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen des Tilgungsplans.

$$\text{c1) } K_1 = 45\,000 - (A - 900)$$

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.



A	$45\,000 = R \cdot \frac{1,02^{16} - 1}{1,02 - 1} \cdot \frac{1}{1,02^{15}}$
B	$45\,000 = R \cdot \frac{1,02^{16} - 1}{1,02 - 1} \cdot \frac{1}{1,02^{17}}$
C	$45\,000 = R \cdot \frac{1,02^{16} - 1}{1,02 - 1} \cdot \frac{1}{1,02^{19}}$
D	$45\,000 = R \cdot \frac{1,02^{16} - 1}{1,02 - 1} \cdot \frac{1}{1,02^{20}}$

d1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

Drucker*

Ein Unternehmen produziert und verkauft Drucker.

a) Für ein bestimmtes Druckermodell wurde die Kostenfunktion K ermittelt:

$$K(x) = 2 \cdot x^3 - 30 \cdot x^2 + 187 \cdot x + 1000$$

x ... Produktionsmenge in ME

$K(x)$... Kosten bei der Produktionsmenge x in GE

1) Berechnen Sie die langfristige Preisuntergrenze.

[0/1 P.]

b) Das Unternehmen produziert ein weiteres Druckermodell. Es geht für dieses Druckermodell von der Kostenfunktion K aus.

$$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

x ... Produktionsmenge in ME

$K(x)$... Kosten bei der Produktionsmenge x in GE

1) Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils die entsprechende Gleichung aus A bis D zu (für alle möglichen Werte von a , b , c und d).

[0/1 P.]

Die Kostenkehre liegt bei 4 ME.	<input type="checkbox"/>
Die Grenzkosten bei 4 ME betragen 1 GE/ME.	<input type="checkbox"/>

A	$48 \cdot a + 8 \cdot b + c = 1$
B	$6 \cdot a + 2 \cdot b = 4$
C	$64 \cdot a + 16 \cdot b + 4 \cdot c + d = 1$
D	$24 \cdot a + 2 \cdot b = 0$

- c) Das Unternehmen produziert und verkauft ein weiteres Druckermodell. Es geht für dieses Druckermodell von der Gewinnfunktion G aus.

$$G(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

x ... Absatzmenge in ME

$G(x)$... Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

- 1) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. [0/1 P.]

_____ ① _____ entspricht einer Lösung der Gleichung _____ ② _____.

①		②	
Diejenige Absatzmenge in ME, bei der der maximale Gewinn erzielt wird,	<input type="checkbox"/>	$G(x) = 0$	<input type="checkbox"/>
Der Cournot'sche Preis in GE/ME	<input type="checkbox"/>	$G'(x) = 0$	<input type="checkbox"/>
Der maximale Gewinn in GE	<input type="checkbox"/>	$G''(x) = 0$	<input type="checkbox"/>

- d) Das Unternehmen produziert und verkauft auch 3-D-Drucker. Für die Kostenfunktion K und für die Gewinnfunktion G gilt:

$$K(x) = 0,01 \cdot x^3 - 5,6 \cdot x^2 + 1\,125 \cdot x + 20\,000$$

$$G(x) = -0,01 \cdot x^3 + 4,4 \cdot x^2 - 225 \cdot x - 20\,000$$

x ... Absatzmenge in ME

$K(x)$... Kosten bei der Absatzmenge x in GE

$G(x)$... Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

- 1) Vervollständigen Sie die nachstehende Gleichung der zugehörigen Preisfunktion der Nachfrage p_N durch Eintragen der fehlenden Zahlen.

$$p_N(x) = \boxed{} \cdot x + \boxed{} \quad [0/1 P.]$$

- 2) Berechnen Sie den Cournot'schen Preis für diese 3-D-Drucker. [0/1 P.]

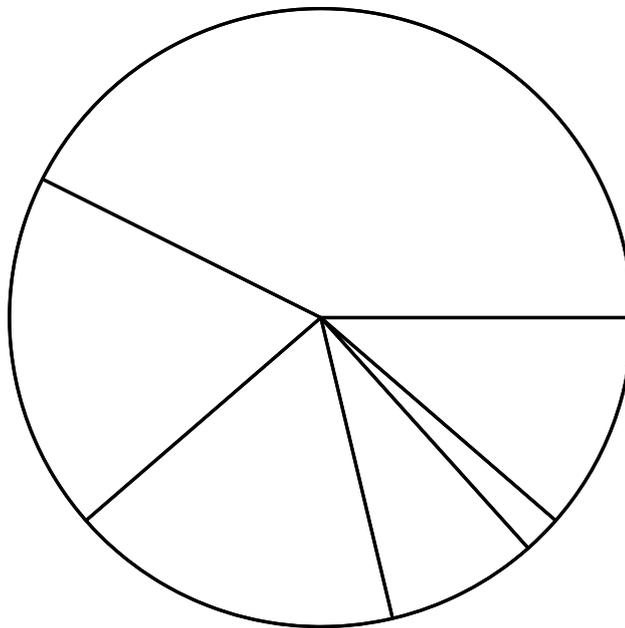
e) Das Unternehmen führt eine Marktanalyse durch.

In der nachstehenden Tabelle sind die weltweiten Marktanteile von Unternehmen, die Drucker verkaufen, für das 2. Quartal 2019 angegeben.

Unternehmen	HP Inc.	Canon Group	Epson	Brother	Kyocera Group	andere Unternehmen
Marktanteil	42,6 %	18,8 %	17,3 %	7,9 %	2 %	11,4 %

Datenquelle: https://www.druckerchannel.de/artikel.php?ID=4135&t=marktzahlen_2019_zweites_quartal [05.09.2022].

1) Kennzeichnen Sie im nachstehenden Kreisdiagramm denjenigen Sektor, der dem Marktanteil von Epson entspricht. [0/1 P.]



Möglicher Lösungsweg

$$\text{a1) } \bar{K}(x) = 2 \cdot x^2 - 30 \cdot x + 187 + \frac{1000}{x}$$

$$\bar{K}'(x) = 0 \quad \text{oder} \quad 4 \cdot x - 30 - \frac{1000}{x^2} = 0$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$x = 10$$

$$\bar{K}(10) = 187$$

Die langfristige Preisuntergrenze beträgt 187 GE/ME.

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der langfristigen Preisuntergrenze.

b1)

Die Kostenkehre liegt bei 4 ME.	<input type="checkbox"/> D
Die Grenzkosten bei 4 ME betragen 1 GE/ME.	<input type="checkbox"/> A

A	$48 \cdot a + 8 \cdot b + c = 1$
B	$6 \cdot a + 2 \cdot b = 4$
C	$64 \cdot a + 16 \cdot b + 4 \cdot c + d = 1$
D	$24 \cdot a + 2 \cdot b = 0$

b1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

c1)

①	
Diejenige Absatzmenge in ME, bei der der maximale Gewinn erzielt wird,	<input checked="" type="checkbox"/>

②	
$G'(x) = 0$	<input checked="" type="checkbox"/>

c1) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile.

d1) $p_N(x) = \boxed{-1,2} \cdot x + \boxed{900}$

d2) $G'(x) = 0$ oder $G'(x) = -0,03 \cdot x^2 + 8,8 \cdot x - 225$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$x_1 = 28,2... \quad x_2 = 265,0...$$

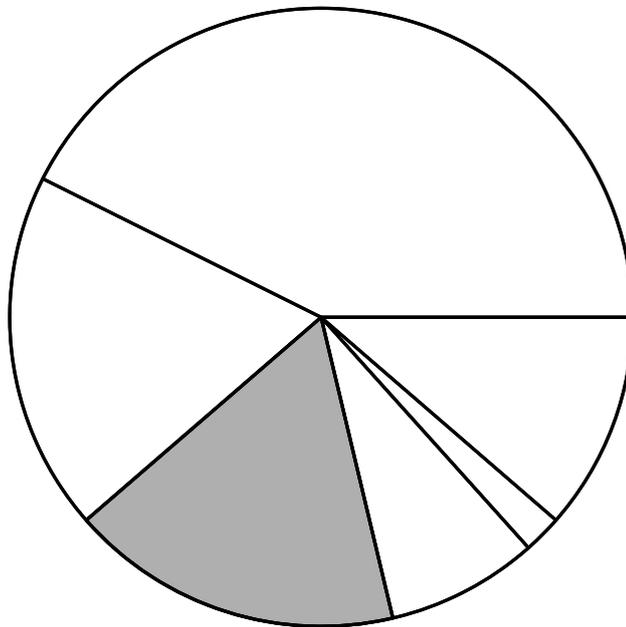
$$G(28,2...) = -23\,070,2... \quad G(265,0...) = 43\,268,7...$$

$$p_N(265,0...) = 581,957...$$

Der Cournot'sche Preis beträgt 581,96 GE/ME.

- d1) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen der Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage p_N .
d2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Cournot'schen Preises.

e1)

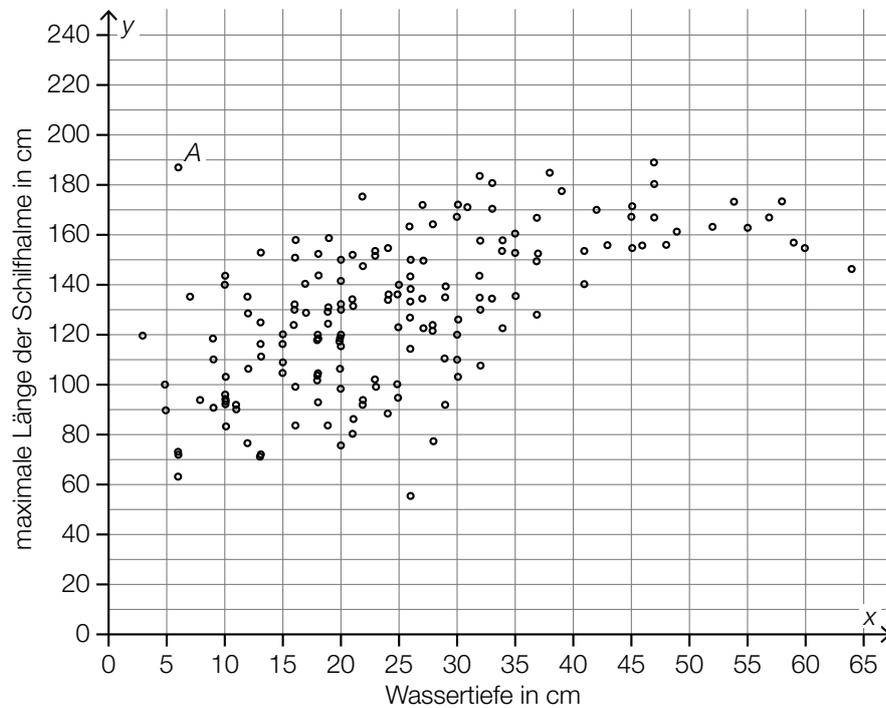


- e1) Ein Punkt für das Kennzeichnen des richtigen Sektors.

Schilf*

Schilf ist eine Pflanze, die häufig im Uferbereich von Gewässern vorkommt. Die röhrenförmigen Stängel werden als *Schilfhalme* bezeichnet.

- a) An verschiedenen Standorten von Schilf wurden die Wassertiefe und die maximale Länge der Schilfhalme gemessen. Die Ergebnisse sind in der nachstehenden Abbildung als Punktwolke dargestellt.



Es wurde dazu folgende Regressionsgerade ermittelt:

$$y = 1,4 \cdot x + 94$$

- 1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung diese Regressionsgerade ein. [0/1 P.]
- 2) Kreuzen Sie diejenige Zahl an, die als Korrelationskoeffizient für den dargestellten Zusammenhang infrage kommt. [1 aus 5] [0/1 P.]

-0,4	<input type="checkbox"/>
0	<input type="checkbox"/>
0,6	<input type="checkbox"/>
1	<input type="checkbox"/>
1,4	<input type="checkbox"/>

Um die Gleichung der Regressionsgeraden zu ermitteln, wird das arithmetische Mittel aller x -Koordinaten der Punkte berechnet.

In der obigen Abbildung sind 161 Punkte eingezeichnet, das arithmetische Mittel ihrer x -Koordinaten wird mit \bar{x} bezeichnet.

Der mit A bezeichnete Punkt hat die x -Koordinate $x = 6$. Für eine weitere Analyse soll dieser Punkt entfernt werden. Es soll das arithmetische Mittel \bar{x}_{neu} der x -Koordinaten aller verbliebenen 160 Punkte berechnet werden.

3) Stellen Sie mithilfe von \bar{x} eine Formel zur Berechnung von \bar{x}_{neu} auf.

$$\bar{x}_{\text{neu}} = \underline{\hspace{10em}} \quad [0/1 P.]$$

b) An einem bestimmten Standort ist der Durchmesser der Schilfhalme annähernd normalverteilt mit einem Erwartungswert von 4,3 cm. Ein Viertel dieser Schilfhalme hat einen Durchmesser von mehr als 5 cm.

1) Argumentieren Sie, dass ein Viertel dieser Schilfhalme einen Durchmesser von weniger als 3,6 cm hat. [0/1 P.]

2) Berechnen Sie die zugehörige Standardabweichung. [0/1 P.]

c) Die mit Schilf bewachsene Fläche im Uferbereich des Neusiedler Sees ist seit dem Jahr 1900 immer größer geworden.

Der Inhalt dieser Fläche kann näherungsweise durch die logistische Funktion S beschrieben werden.

$$S(t) = \frac{185}{1 + 1,15 \cdot 0,96^t}$$

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 1900

$S(t)$... Inhalt der zur Zeit t mit Schilf bewachsenen Fläche in km^2

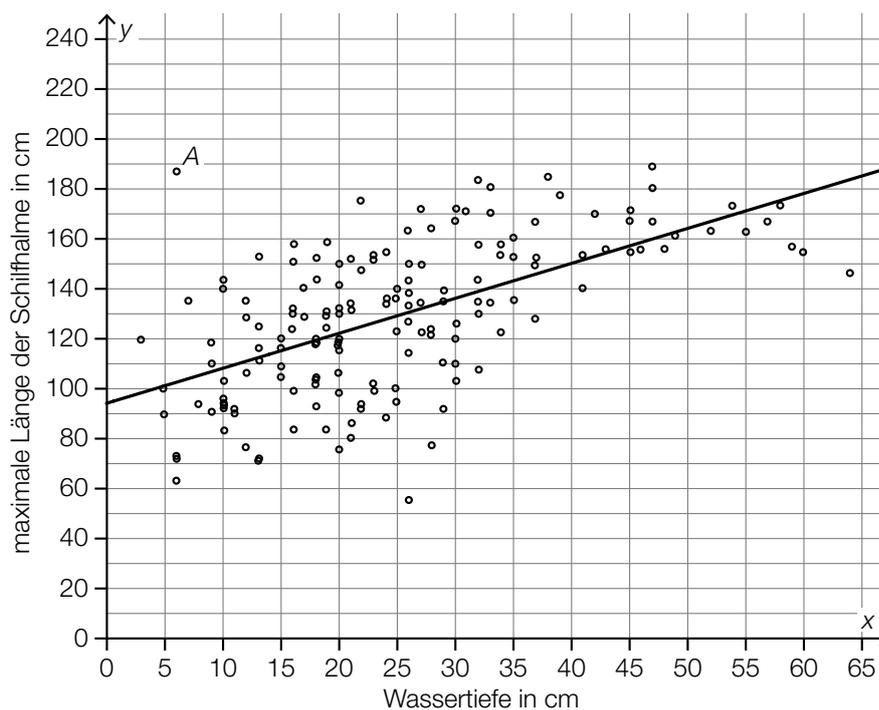
1) Vervollständigen Sie den nachstehenden Satz durch Eintragen der fehlenden Zahl.

Mit zunehmender Zeitdauer nähert sich der Inhalt der mit Schilf bewachsenen Fläche dem

Wert km^2 beliebig nahe an. [0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

a1)



a2)

0,6	<input checked="" type="checkbox"/>

a3) $\bar{x}_{\text{neu}} = \frac{161 \cdot \bar{x} - 6}{160}$

a1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen der Regressionsgeraden.

a2) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

a3) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.

b1) X ... Durchmesser in cm

Die Dichtefunktion der Normalverteilung ist symmetrisch um den Erwartungswert $\mu = 4,3$.
Daher gilt $P(X > \mu + 0,7) = P(X < \mu - 0,7)$, also $P(X > 5) = P(X < 3,6) = 0,25$.

b2) $P(X > 5) = 0,25$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$\sigma = 1,03... \text{ cm}$$

b1) Ein Punkt für das richtige Argumentieren.

b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Standardabweichung.

c1) Mit zunehmender Zeitdauer nähert sich der Inhalt der mit Schilf bewachsenen Fläche dem Wert 185 km^2 beliebig nahe an.

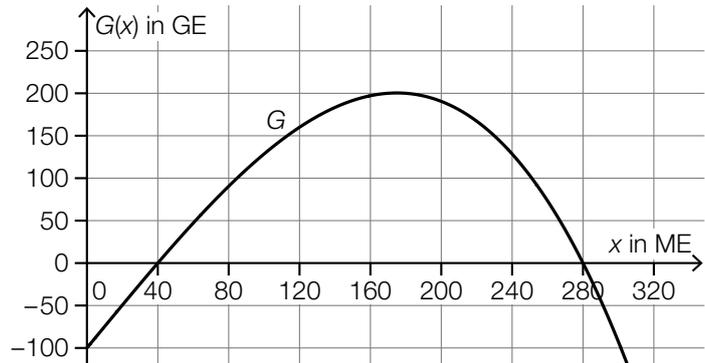
c1) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen des Satzes.

Sonnenbrillen

Ein Betrieb produziert Sonnenbrillen.

- a) In der nebenstehenden Abbildung ist der Graph der Gewinnfunktion G für Sonnenbrillen des Typs A dargestellt.

x ... Absatzmenge in ME
 $G(x)$... Gewinn bei der Absatzmenge x in GE



- 1) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. [0/1 P.]

Bei einer Absatzmenge von ① gilt, dass ② .

①	
0 ME	<input type="checkbox"/>
100 ME	<input type="checkbox"/>
280 ME	<input type="checkbox"/>

②	
der Gewinn maximal ist	<input type="checkbox"/>
die Kosten und der Erlös gleich hoch sind	<input type="checkbox"/>
der Gewinn 100 GE beträgt	<input type="checkbox"/>

Jemand behauptet, die nachstehend angegebene Funktion K sei die Kostenfunktion für Sonnenbrillen des Typs A.

$$K(x) = 0,00003 \cdot x^3 - 0,008 \cdot x^2 + 1,194 \cdot x + 120$$

x ... Produktionsmenge in ME

$K(x)$... Kosten bei der Produktionsmenge x in GE

- 2) Begründen Sie anhand der obigen Abbildung und der Gleichung von K , warum K nicht die Kostenfunktion für Sonnenbrillen des Typs A sein kann. [0/1 P.]

b) Für die Erlösfunktion E für Sonnenbrillen des Typs B gilt:

$$E(x) = -0,08 \cdot x^2 + 10 \cdot x$$

x ... Absatzmenge in ME

$E(x)$... Erlös bei der Absatzmenge x in GE

1) Berechnen Sie die kleinste Absatzmenge, bei der ein Erlös von mindestens 200 GE erreicht wird. [0/1 P.]

c) Für die Produktion eines neuen Brillenmodells wird eine Fräsmaschine angekauft. Dazu wird ein Kredit in Höhe von € 40.000 aufgenommen. Die Rückzahlung erfolgt durch gleich hohe Jahresraten R .

Dabei gilt:

$$40\,000 \cdot 1,0325 = R \cdot \frac{1,0325^4 - 1}{1,0325 - 1} \cdot \frac{1}{1,0325^4}$$

1) Berechnen Sie R . [0/1 P.]

2) Lesen Sie aus der gegebenen Gleichung den Jahreszinssatz i ab.

$i =$ _____ % p. a. [0/1 P.]

3) Veranschaulichen Sie auf der nachstehenden Zeitachse alle Jahresraten R . [0/1 P.]



Möglicher Lösungsweg

a1)

①	
280 ME	<input checked="" type="checkbox"/>

②	
die Kosten und der Erlös gleich hoch sind	<input checked="" type="checkbox"/>

a2) Der Gewinn bei 0 ME für Sonnenbrillen des Typs A beträgt entsprechend der Abbildung -100 GE. Dieser Gewinn müsste den negativen Fixkosten entsprechen. Die Fixkosten betragen in der Gleichung von K jedoch 120 GE. Somit kann K nicht die Kostenfunktion für Sonnenbrillen des Typs A sein.

a1) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile.

a2) Ein Punkt für das richtige Begründen.

b1) $E(x) = 200$ oder $-0,08 \cdot x^2 + 10 \cdot x = 200$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$x_1 = 25 \quad (x_2 = 100)$$

Die kleinste Absatzmenge, bei der ein Erlös von mindestens 200 GE erreicht wird, beträgt 25 ME.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Absatzmenge.

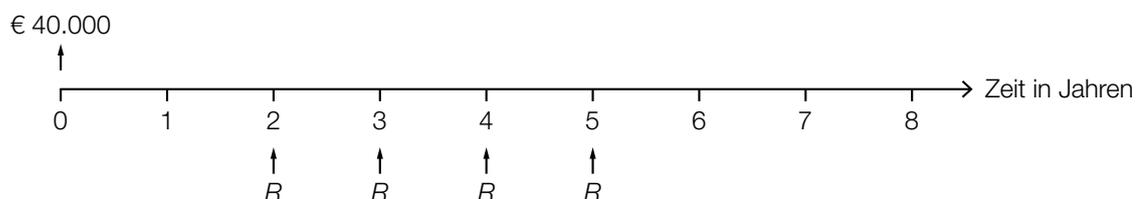
c1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$R = 11\,177,317\dots$$

Die Höhe der Jahresraten R beträgt $\text{€ } 11.177,32$.

c2) $i = 3,25 \%$ p. a.

c3)



c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von R .

c2) Ein Punkt für das Ablesen des richtigen Jahreszinssatzes i .

c3) Ein Punkt für das richtige Veranschaulichen aller Jahresraten auf der Zeitachse.

Weltbevölkerung

Die Vereinten Nationen veröffentlichen Daten und Prognosen zur Entwicklung der Weltbevölkerung.

Datenquelle: United Nations, Department of Economic and Social Affairs, Population Division (2019). World Population Prospects 2019, Online Edition. Rev. 1.

a) Im Jahr 1950 betrug die Weltbevölkerung gemäß dieser Daten 2,536 Milliarden Menschen.

In einem Modell geht man davon aus, dass die Weltbevölkerung im Zeitraum von 1950 bis 1980 um jeweils 1,9 % pro Jahr im Vergleich zum jeweiligen Vorjahr gewachsen ist.

Die zeitliche Entwicklung der Weltbevölkerung ab 1950 soll näherungsweise durch die Funktion N_1 beschrieben werden.

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 1950

$N_1(t)$... Weltbevölkerung zur Zeit t in Milliarden Menschen

1) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion N_1 auf.

$N_1(t) =$ _____ [0/1 P.]

2) Berechnen Sie denjenigen Zeitraum, in dem sich die Weltbevölkerung gemäß diesem Modell jeweils verdoppelt. [0/1 P.]

- b) In der nachstehenden Tabelle ist die Weltbevölkerung für einige ausgewählte Jahre im Zeitraum von 1980 bis 2020 angegeben.

Jahr	Weltbevölkerung in Milliarden Menschen
1980	4,458
1990	5,327
2000	6,143
2010	6,957
2020	7,795

In diesem Zeitraum ist die Weltbevölkerung annähernd linear gewachsen.

Die zeitliche Entwicklung der Weltbevölkerung ab 1980 soll näherungsweise durch die lineare Funktion N_2 beschrieben werden.

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 1980

$N_2(t)$... Weltbevölkerung zur Zeit t in Milliarden Menschen

- 1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Funktion N_2 auf.
Wählen Sie dabei $t = 0$ für das Jahr 1980. [0/1 P.]

Für das Jahr 2030 prognostizieren die Vereinten Nationen eine Weltbevölkerung von 8,5 bis 8,6 Milliarden Menschen.

- 2) Überprüfen Sie nachweislich, ob der zugehörige Funktionswert der linearen Funktion N_2 zwischen 8,5 und 8,6 Milliarden Menschen liegt. [0/1 P.]

- c) Die Fertilitätsrate (Anzahl der Lebendgeburten pro Frau) ist seit 1970 weltweit gesunken und lässt sich näherungsweise durch die Funktion f beschreiben.

$$f(t) = 2 + b \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 1970

$f(t)$... Fertilitätsrate zur Zeit t

b, λ ... positive Parameter

- 1) Argumentieren Sie mathematisch, dass die Fertilitätsrate gemäß diesem Modell für $t \rightarrow \infty$ dem Wert 2 beliebig nahe kommt. [0/1 P.]

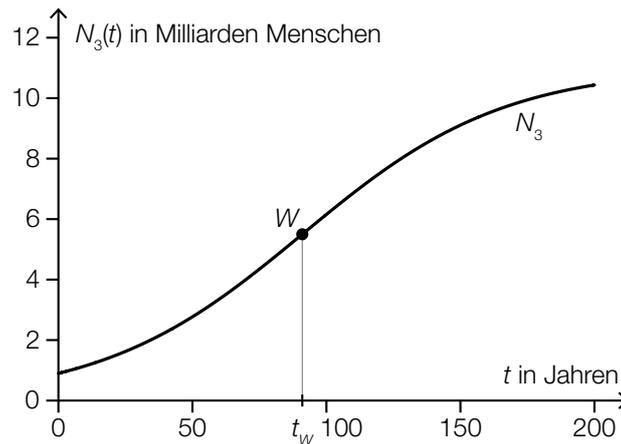
- d) Die Vereinten Nationen gehen davon aus, dass sich die Weltbevölkerung langfristig stabilisieren wird.

Die zeitliche Entwicklung der Weltbevölkerung ab 1900 kann näherungsweise durch die logistische Funktion N_3 beschrieben werden.

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 1900

$N_3(t)$... Weltbevölkerung zur Zeit t in Milliarden Menschen

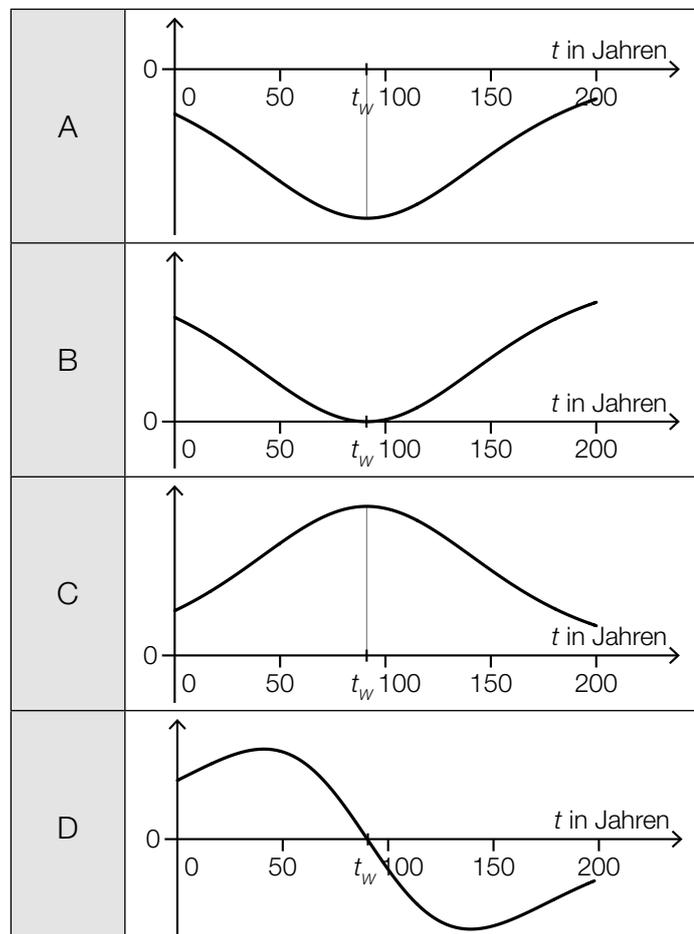
In der nachstehenden Abbildung ist der Graph von N_3 mit dem Wendepunkt W dargestellt.



- 1) Ordnen Sie den beiden Ableitungen jeweils den zutreffenden Graphen aus A bis D zu.

[0/1 P.]

1. Ableitung von N_3	<input type="checkbox"/>
2. Ableitung von N_3	<input type="checkbox"/>



Möglicher Lösungsweg

a1) $N_1(t) = 2,536 \cdot 1,019^t$

a2) $2 = 1,019^t$

$$t = \frac{\ln(2)}{\ln(1,019)} = 36,8\dots$$

Gemäß diesem Modell verdoppelt sich die Weltbevölkerung nach jeweils rund 37 Jahren.

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Funktion N_1 .

a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Verdoppelungszeit.

b1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$N_2(t) = 0,083 \cdot t + 4,475 \quad (\text{Koeffizienten gerundet})$$

b2) $N_2(50) = 8,627\dots$

Der zugehörige Funktionswert der linearen Funktion N_2 liegt nicht zwischen 8,5 und 8,6 Milliarden Menschen.

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der linearen Funktion N_2 .

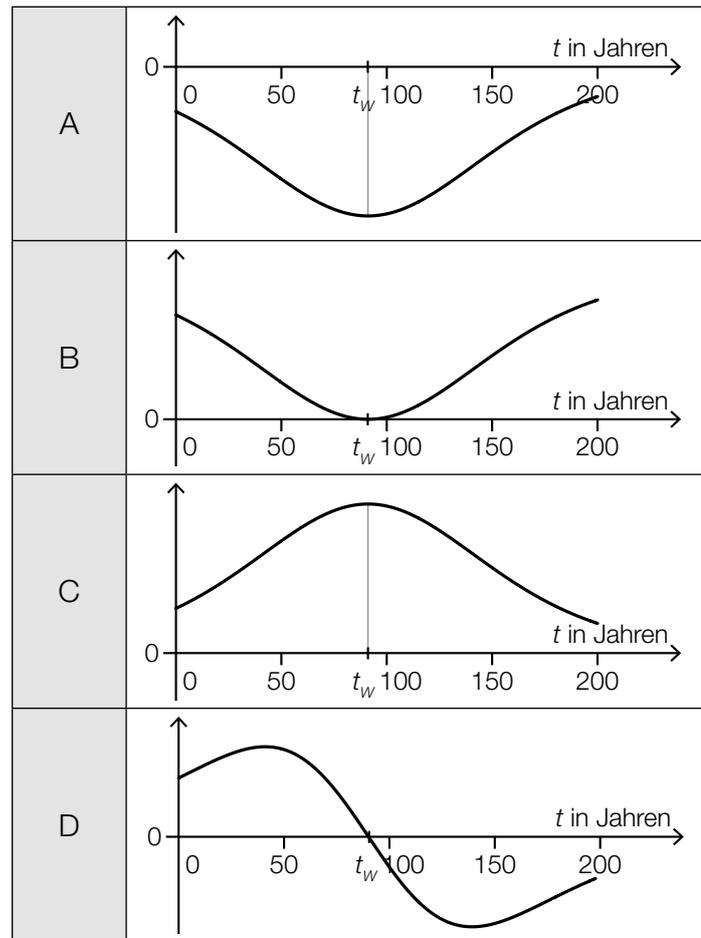
b2) Ein Punkt für das richtige nachweisliche Überprüfen.

c1) Für $t \rightarrow \infty$ geht $e^{-\lambda \cdot t}$ gegen 0, damit geht auch $b \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ gegen 0 und $f(t)$ geht gegen 2.

c1) Ein Punkt für das richtige Argumentieren.

d1)

1. Ableitung von N_3	<input type="text" value="C"/>
2. Ableitung von N_3	<input type="text" value="D"/>

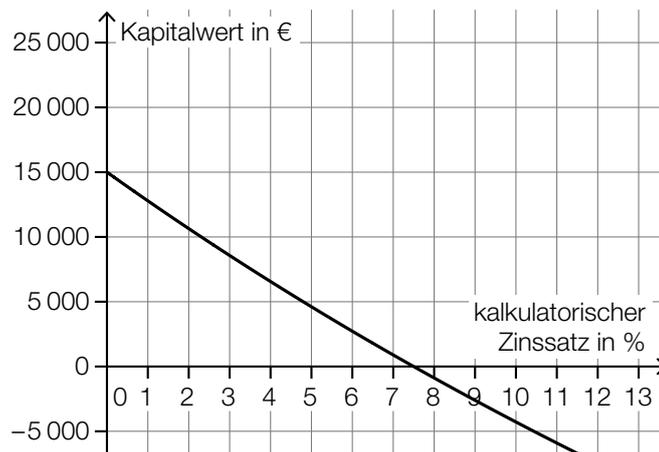


d1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

Strategische Überlegungen

Ein Unternehmen beauftragt zwei seiner leitenden Angestellten aus unterschiedlichen Bereichen damit, Überlegungen für zukünftige Vorhaben anzustellen.

- a) Herr Markowicz soll die Investition in eine neue Produktionsmaschine bewerten. Er betrachtet die nachstehende Abbildung, in der der Kapitalwert der Investition in Abhängigkeit vom kalkulatorischen Zinssatz dargestellt ist (Kapitalwertkurve).



- Argumentieren Sie, dass diese Investition bei einem kalkulatorischen Zinssatz von 6 % vorteilhaft ist. [0/1 P.]
- Vervollständigen Sie den nachstehenden Satz durch Eintragen der fehlenden Zahl.

Bei einem kalkulatorischen Zinssatz von _____ % sind die Anschaffungskosten und die Summe der abgezinsten Rückflüsse gleich. [0/1 P.]

Herr Markowicz betrachtet auch eine zweite Kapitalwertkurve, die sich ergibt, wenn die Anschaffungskosten um € 5.000 höher als bei der oben dargestellten Investition sind.

- Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. [0/1½/1 P.]

Die zweite Kapitalwertkurve schneidet die vertikale Achse bei _____ ① und der interne Zinssatz ist _____ ② bei der oben dargestellten Investition.

①	
€ 5.000	<input type="checkbox"/>
€ 10.000	<input type="checkbox"/>
€ 20.000	<input type="checkbox"/>

②	
kleiner als	<input type="checkbox"/>
gleich groß wie	<input type="checkbox"/>
größer als	<input type="checkbox"/>

- b) Frau Posch aus der IT-Abteilung soll sich um die in den letzten Monaten stark gestiegene Anzahl an Spam-Mails kümmern.

Monat	Februar	März	April
prozentuelle Änderung der Anzahl der Spam-Mails gegenüber dem jeweiligen Vormonat	+52 %	+61 %	+113 %

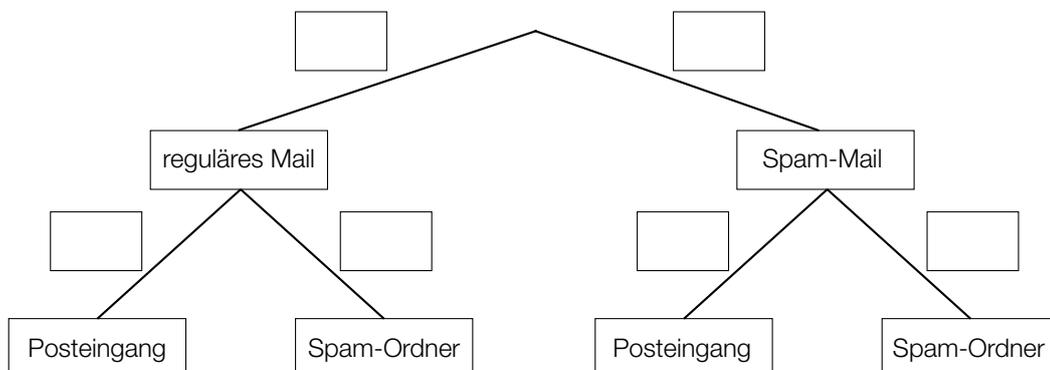
- 1) Berechnen Sie die mittlere monatliche prozentuelle Änderung für die angegebenen drei Monate. [0/1 P.]

Das installierte Mail-Programm unterscheidet zwischen den zwei Kategorien *Spam-Mail* und *reguläres Mail*. Es erkennt Spam-Mails und verschiebt diese in den Spam-Ordner, reguläre Mails erscheinen im Posteingang. Dieser Vorgang ist aber fehleranfällig: Es erscheinen immer wieder Spam-Mails im Posteingang und reguläre Mails werden in den Spam-Ordner verschoben.

Frau Posch stellt fest:

- Jedes 3. Mail ist ein Spam-Mail.
- 15 % der Spam-Mails erscheinen im Posteingang.
- 6 % der regulären Mails werden in den Spam-Ordner verschoben.

- 2) Vervollständigen Sie das nachstehende Baumdiagramm mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten so, dass es den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt. [0/1 P.]



- 3) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei einem zufällig ausgewählten Mail, das in den Spam-Ordner verschoben worden ist, um ein reguläres Mail handelt. [0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

- a1) Die Investition ist vorteilhaft, weil der Kapitalwert bei einem kalkulatorischen Zinssatz von 6 % positiv ist.

oder:

Die Investition ist vorteilhaft, weil der kalkulatorische Zinssatz von 6 % kleiner als der interne Zinssatz ist.

- a2) Bei einem kalkulatorischen Zinssatz von **7,5 %** sind die Anschaffungskosten und die Summe der abgezinsten Rückflüsse gleich.

Toleranzbereich: [7,3 %; 7,7 %]

- a3)

①	
€ 10.000	<input checked="" type="checkbox"/>

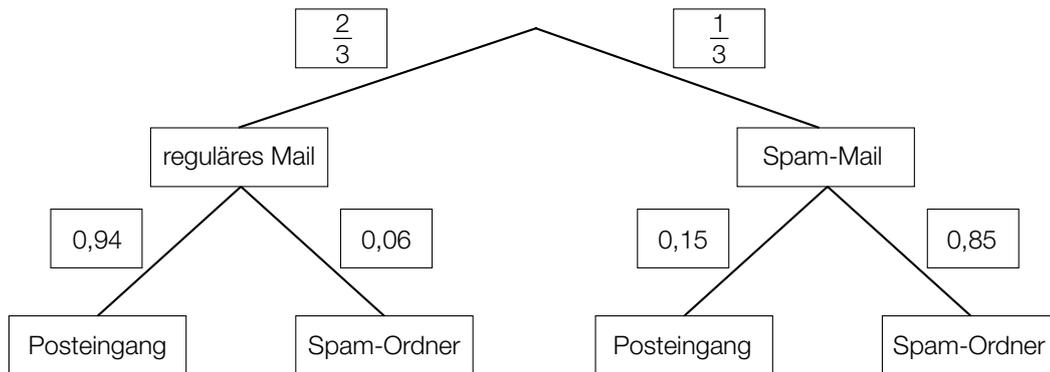
②	
kleiner als	<input checked="" type="checkbox"/>

- a1) Ein Punkt für das richtige Argumentieren.
a2) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Zahl.
a3) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile, ein halber Punkt, wenn nur ein richtiger Satzteil angekreuzt ist.

b1) $\sqrt[3]{1,52 \cdot 1,61 \cdot 2,13} - 1 = 0,7338\dots$

Die mittlere monatliche prozentuelle Änderung beträgt rund 73,4 %.

b2)



b3) $P(\text{„reguläres Mail“} | \text{„Spam-Ordner“}) = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0,06}{\frac{2}{3} \cdot 0,06 + \frac{1}{3} \cdot 0,85} = 0,1237\dots$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 12,4 %.

- b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der mittleren monatlichen prozentuellen Änderung.
b2) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen des Baumdiagramms.
b3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

Kleiderständer*

Ein Betrieb stellt Kleiderständer her.

- a) Mittels einer Befragung wurde der Zusammenhang zwischen der nachgefragten Menge und dem Preis von Kleiderständern der Marke A untersucht.
In der nachstehenden Tabelle sind die ermittelten Daten dargestellt.

nachgefragte Menge in ME	40	60	70	90
Preis in GE/ME	82	72	64	55

- 1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Preisfunktion der Nachfrage p_N auf.

$$p_N(x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

x ... nachgefragte Menge in ME

$p_N(x)$... Preis bei der Menge x in GE/ME

[0/1 P.]

- 2) Berechnen Sie mithilfe von p_N die Sättigungsmenge.

[0/1 P.]

Für die zugehörige Gewinnfunktion G gilt:

$$G(x) = -0,001 \cdot x^3 - 0,02 \cdot x^2 + 22,4 \cdot x - 200$$

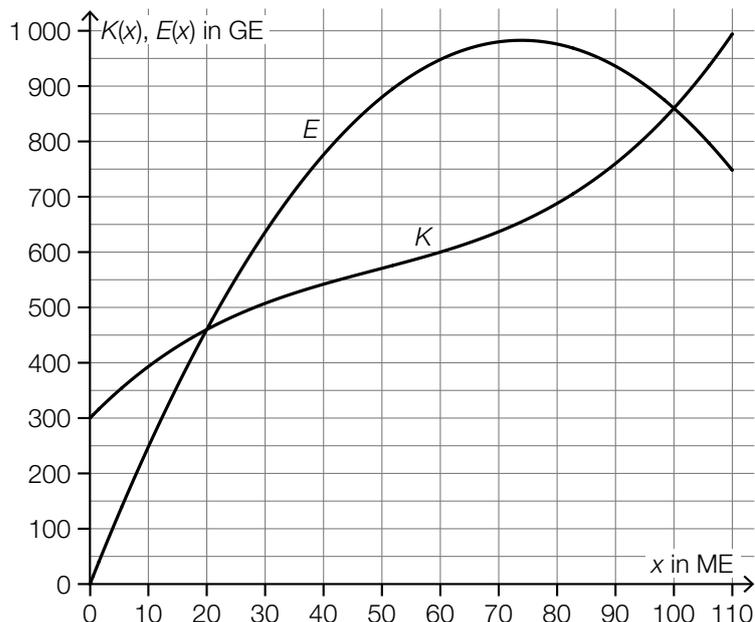
x ... abgesetzte Menge in ME

$G(x)$... Gewinn bei der Menge x in GE

- 3) Berechnen Sie den Cournot'schen Preis.

[0/1 P.]

- b) In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen der Kostenfunktion K und der Erlösfunktion E für die Produktion und den Verkauf von Kleiderständern der Marke B dargestellt.



- 1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den maximalen Gewinn ab.

_____ GE

[0/1 P.]

- 2) Ermitteln Sie die Durchschnittskosten bei einer Produktion von 60 ME.

_____ GE/ME

[0/1 P.]

- c) 1) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. [0/1 P.]

Durch das Einsetzen der Stelle des Betriebsminimums in die _____ ① erhält man die _____ ②.

①	
Gesamtkostenfunktion	<input type="checkbox"/>
Durchschnittskostenfunktion	<input type="checkbox"/>
variable Durchschnittskostenfunktion	<input type="checkbox"/>

②	
minimalen Kosten	<input type="checkbox"/>
langfristige Preisuntergrenze	<input type="checkbox"/>
kurzfristige Preisuntergrenze	<input type="checkbox"/>

Möglicher Lösungsweg

a1) $p_N(x) = -0,55 \cdot x + 104$

a2) $p_N(x) = 0$ oder $-0,55 \cdot x + 104 = 0$
 $x = \frac{104}{0,55} = 189,09\dots$

Die Sättigungsmenge beträgt rund 189,1 ME.

a3) $G'(x) = 0$ oder $-0,003 \cdot x^2 - 0,04 \cdot x + 22,4 = 0$
 $x_1 = 80$ ($x_2 = -93,3\dots$)
 $p_N(80) = -0,55 \cdot 80 + 104 = 60$

Der Cournot'sche Preis beträgt 60 GE/ME.

- a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Funktion p_N .
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Sättigungsmenge.
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Cournot'schen Preises.

b1) 350 GE

Toleranzbereich: [340 GE; 360 GE]

b2) 10 GE/ME

Toleranzbereich: [9,8 GE/ME; 10,2 GE/ME]

- b1) Ein Punkt für das richtige Ablesen des maximalen Gewinns.
b2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Durchschnittskosten.

c1)

①	
variable Durchschnittskostenfunktion	<input checked="" type="checkbox"/>

②	
kurzfristige Preisuntergrenze	<input checked="" type="checkbox"/>

- c1) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile.

Konsumkredite*

Konsumkredite werden aufgenommen, um den Kauf von Gegenständen des persönlichen Bedarfs wie etwa neuen Möbeln oder Elektrogeräten zu finanzieren. Auch das Überziehen eines Kontos oder die Nutzung von Ratenzahlungen können als Konsumkredit bezeichnet werden. Dabei fallen oft hohe Zinsen an.

- a) Herr Donner richtet in seiner Wohnung ein Heimkino ein. Um die Rechnung für das Heimkino sofort bezahlen zu können, überzieht er sein Konto. Der Kontostand ist nun negativ und beträgt € –2.350.

Nach einem Monat zahlt er auf sein Konto € 1.200 ein.

Nach einem weiteren Monat zahlt er erneut € 1.200 auf sein Konto ein.

Unmittelbar nach der 2. Einzahlung ist der Kontostand positiv und beträgt € 16,58.

- 1) Stellen Sie eine Gleichung zur Berechnung des Monatszinssatzes i_{12} auf, mit dem bei dieser Kontoüberziehung gerechnet wird. [0/1 P.]
- 2) Berechnen Sie den zugehörigen effektiven Jahreszinssatz. [0/1 P.]

- b) Ein Elektronikmarkt bietet Ratenzahlungen an.

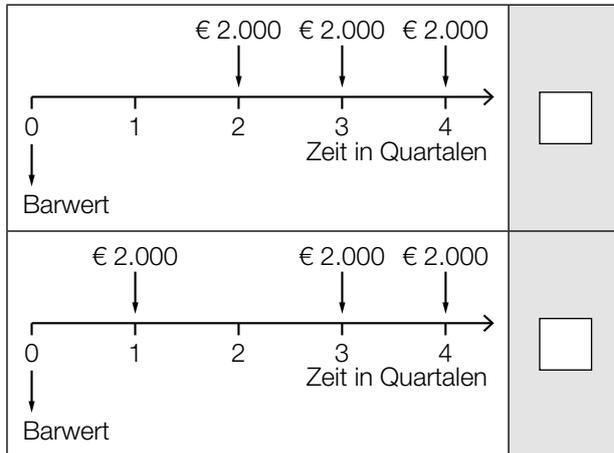
Herr Pecile kauft bei diesem Elektronikmarkt einen neuen Fernseher zu einem Preis von € 4.499. Er vereinbart nachschüssige Monatsraten bei einer Laufzeit von 4 Jahren und einem fixen Monatszinssatz von 1,15 %.

- 1) Berechnen Sie die zugehörige Ratenhöhe. [0/1 P.]

c) Ein Tischler bietet Ratenzahlungen an.

Frau Berger kauft bei diesem Tischler eine Wohnzimmer-Einrichtung. Der Tischler bietet zwei mögliche Varianten einer Ratenzahlung mit einem fixen Quartalszinssatz von 1 % an.

1) Ordnen Sie den beiden Zeitachsen jeweils die zutreffende Berechnung des Barwerts aus A bis D zu. [0/1/2/1 P.]



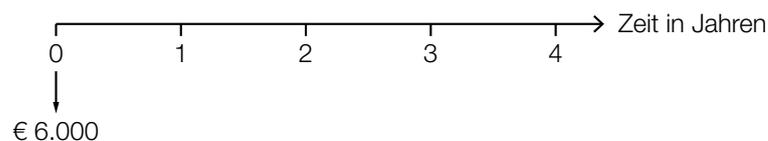
A	$2000 \cdot \frac{1,01^3 - 1}{1,01 - 1} \cdot 1,01^{-3}$
B	$2000 \cdot \frac{1,01^3 - 1}{1,01 - 1} \cdot 1,01^{-4}$
C	$2000 \cdot (1,01^{-1} + 1,01^{-3} + 1,01^{-4})$
D	$2000 \cdot 3$

Herr Reiningger bestellt bei diesem Tischler eine Küche. Es wird eine Ratenzahlung vereinbart, die im nachstehenden Tilgungsplan nicht vollständig dargestellt ist. Dabei gilt ein fixer Jahreszinssatz von 4 %.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	---	---	---	€ 6.000,00
1	€ 240,00	€ 2.260,00	€ 2.500,00	€ 3.740,00
2	€ 149,60	€ 2.350,40	€ 2.500,00	€ 1.389,60
3	€ 55,58	€ -55,58	€ 0,00	€ 1.445,18
4				€ 0,00

2) Vervollständigen Sie im obigen Tilgungsplan die Zeile für das Jahr 4. [0/1 P.]

3) Veranschaulichen Sie auf der nachstehenden Zeitachse alle Annuitäten. [0/1 P.]



Möglicher Lösungsweg

$$\text{a1) } -2350 \cdot (1 + i_{12})^2 + 1200 \cdot (1 + i_{12}) + 1200 = 16,58$$

a2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$i_{12} = 0,00948\dots$$

$$i = (1 + i_{12})^{12} - 1 = 0,119\dots$$

Der effektive Jahreszinssatz beträgt rund 12 %.

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung.

a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des effektiven Jahreszinssatzes.

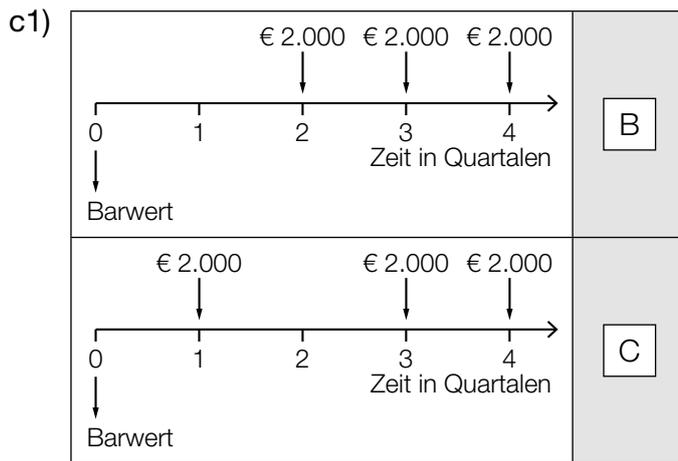
$$\text{b1) } 4499 = R \cdot \frac{1,0115^{48} - 1}{0,0115} \cdot \frac{1}{1,0115^{48}}$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$R = 122,490\dots$$

Die Ratenhöhe beträgt € 122,49.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Ratenhöhe.

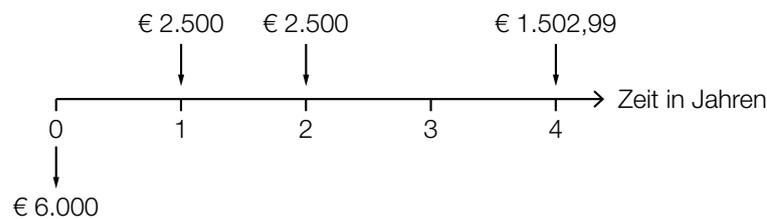


A	$2000 \cdot \frac{1,01^3 - 1}{1,01 - 1} \cdot 1,01^{-3}$
B	$2000 \cdot \frac{1,01^3 - 1}{1,01 - 1} \cdot 1,01^{-4}$
C	$2000 \cdot (1,01^{-1} + 1,01^{-3} + 1,01^{-4})$
D	$2000 \cdot 3$

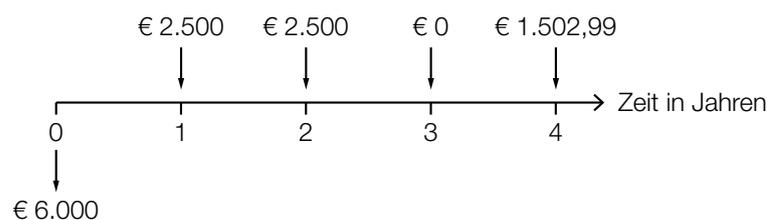
c2)

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	---	---	---	€ 6.000,00
1	€ 240,00	€ 2.260,00	€ 2.500,00	€ 3.740,00
2	€ 149,60	€ 2.350,40	€ 2.500,00	€ 1.389,60
3	€ 55,58	€ -55,58	€ 0,00	€ 1.445,18
4	€ 57,81	€ 1.445,18	€ 1.502,99	€ 0,00

c3)



oder:



c1) Ein halber Punkt für die erste richtige Zuordnung, ein halber Punkt für die zweite richtige Zuordnung.

c2) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen der Zeile für das Jahr 4.

c3) Ein Punkt für das richtige Veranschaulichen aller Annuitäten.

Socken*

- a) Ein Unternehmen produziert Wandersocken. Für die zugehörige Grenzkostenfunktion K' bei der Produktion gilt:

$$K'(x) = 0,09 \cdot x^2 - 0,8 \cdot x + 3$$

x ... Produktionsmenge in ME

$K'(x)$... Grenzkosten bei der Produktionsmenge x in GE/ME

- 1) Stellen Sie eine Gleichung der zugehörigen variablen Durchschnittskostenfunktion \bar{K}_v auf.

$$\bar{K}_v(x) = \underline{\hspace{15em}} \quad [0/1 P.]$$

Die zugehörige Kostenfunktion K ist ertragsgesetzlich. Die Kostenkehre liegt bei rund 4,4 ME.

- 2) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. [0/1 P.]

Bei einer Produktionsmenge von ① hat die Kostenfunktion K ② .

①	
0 ME	<input type="checkbox"/>
3,4 ME	<input type="checkbox"/>
4,6 ME	<input type="checkbox"/>

②	
eine negative Steigung	<input type="checkbox"/>
eine positive Krümmung	<input type="checkbox"/>
eine Wendestelle	<input type="checkbox"/>

b) Ein neues Produkt für Babys, sogenannte *Knistersocken*, wird auf dem Markt getestet.

Durch Marktforschung wurde ein Höchstpreis von 15 €/Paar und eine Sättigungsmenge von 800 Paaren ermittelt. Die Preisfunktion der Nachfrage p_N kann modellhaft als linear angenommen werden.

x ... nachgefragte Menge in Paaren

$p_N(x)$... Preis bei der nachgefragten Menge x in €/Paar

1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung von p_N auf.

[0/1 P.]

Die Knistersocken werden zu einem Preis von 11,25 €/Paar verkauft.

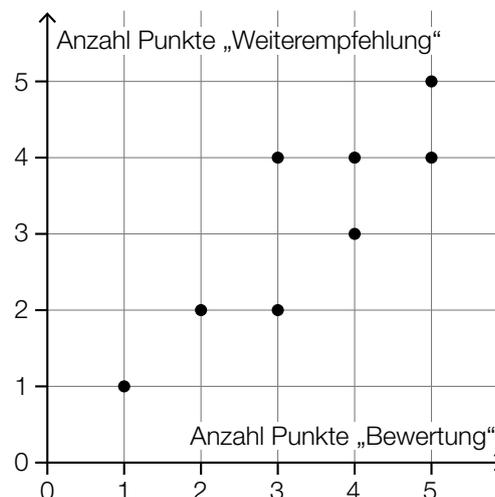
2) Berechnen Sie die bei diesem Preis nachgefragte Menge.

[0/1 P.]

8 Personen, die Knistersocken gekauft haben, nahmen an einer Umfrage zu diesen Socken teil. Dabei sollten sie auf folgende Fragen 0 bis 5 Punkte vergeben:

- Wie bewerten Sie die Knistersocken? („Bewertung“)
- Würden Sie die Knistersocken weiterempfehlen? („Weiterempfehlung“)

In der nachstehenden Abbildung sind die Ergebnisse der Umfrage in Form einer Punktwolke dargestellt.



3) Geben Sie die Anzahl der befragten Personen an, die mehr Punkte bei „Bewertung“ als bei „Weiterempfehlung“ vergeben haben.

[0/1 P.]

4) Ermitteln Sie den Korrelationskoeffizienten r zwischen „Bewertung“ und „Weiterempfehlung“.

$r \approx$ _____

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

a1) $\overline{K}_V(x) = 0,03 \cdot x^2 - 0,4 \cdot x + 3$

a2)

①	
4,6 ME	<input checked="" type="checkbox"/>

②	
eine positive Krümmung	<input checked="" type="checkbox"/>

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der variablen Durchschnittskostenfunktion \overline{K}_V .

a2) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile.

b1) $p_N(x) = k \cdot x + d$

$$k = -\frac{15}{800} = -\frac{3}{160} = -0,01875$$

$$p_N(x) = -\frac{3}{160} \cdot x + 15$$

b2) $p_N(x) = 11,25$ oder $-\frac{3}{160} \cdot x + 15 = 11,25$
 $x = 200$

Bei einem Preis von 11,25 €/Paar beträgt die nachgefragte Menge 200 Paar Knistersocken.

b3) Es haben 3 Personen mehr Punkte bei „Bewertung“ als bei „Weiterempfehlung“ vergeben.

b4) $r \approx 0,870$

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung von p_N .

b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der nachgefragten Menge.

b3) Ein Punkt für das Angeben der richtigen Anzahl der Personen.

b4) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Korrelationskoeffizienten r .

Eigenheim*

- a) Am sogenannten *Häuserpreisindex* kann man die Entwicklung der Preise für Häuser ablesen. In der nachstehenden Tabelle ist der Häuserpreisindex für ausgewählte Jahre angegeben.

Jahr	2010	2011	2013	2016	2018	2020
Häuserpreisindex	100,00	106,25	119,92	141,32	155,79	177,38

Die zeitliche Entwicklung des Häuserpreisindex kann näherungsweise durch die Exponentialfunktion H beschrieben werden.

$$H(t) = c \cdot a^t$$

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2010

$H(t)$... Häuserpreisindex zum Zeitpunkt t

c, a ... positive Parameter

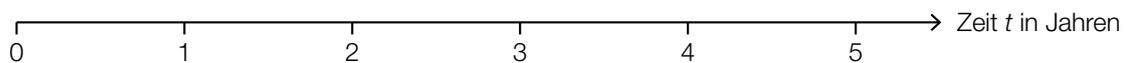
- 1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der Exponentialfunktion H auf.

$H(t) =$ _____ [0/1 P.]

- 2) Interpretieren Sie den Wert des Parameters a im gegebenen Sachzusammenhang. [0/1 P.]

- b) Erika plant, ein Haus mit einem Kaufpreis von € 340.000 zu kaufen.
Der Verkäufer schlägt vor, dass Erika den Kaufpreis in 3 Teilzahlungen vollständig bezahlen soll.
Die erste Teilzahlung in Höhe von € 180.000 soll bei Vertragsabschluss ($t = 0$) erfolgen.
Die zweite Teilzahlung in Höhe von € 100.000 soll nach 1 Jahr erfolgen.
Die dritte Teilzahlung in Höhe von X soll nach 3 Jahren erfolgen.

- 1) Tragen Sie alle 4 oben angeführten Geldbeträge (Kaufpreis und Teilzahlungen) auf der nachstehenden Zeitachse ein. [0/1 P.]



Erika schlägt eine andere Teilzahlungsvariante vor. Dabei soll der Kaufpreis durch 3 gleich hohe Teilzahlungen in Höhe von jeweils Z vollständig bezahlt werden.

Die erste Teilzahlung soll bei Vertragsabschluss, die zweite Teilzahlung nach 1 Jahr und die dritte Teilzahlung nach 3 Jahren erfolgen.

Der Jahreszinssatz soll 3 % betragen.

- 2) Berechnen Sie Z . [0/1 P.]

Um den gesamten Kaufpreis sofort bezahlen zu können, nimmt Erika einen Kredit in Höhe von € 340.000 auf.

Sie möchte diesen Kredit innerhalb von 20 Jahren durch nachschüssige Monatsraten der Höhe R vollständig tilgen.

Der Jahreszinssatz beträgt 3 %.

- 3) Berechnen Sie R . [0/1 P.]
4) Berechnen Sie die Höhe der Restschuld am Ende des 10. Jahres. [0/1 P.]

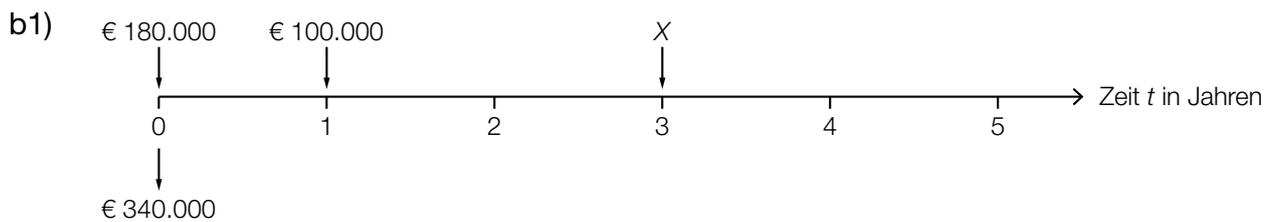
Möglicher Lösungsweg

a1) $H(t) = 100,4 \cdot 1,058^t$ (Parameter gerundet)

a2) Gemäß diesem Modell steigt der Häuserpreisindex um rund 5,8 % pro Jahr im Vergleich zum jeweiligen Vorjahr.

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Exponentialfunktion H .

a2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.



b2) $340\,000 \cdot 1,03^3 = Z \cdot 1,03^3 + Z \cdot 1,03^2 + Z$
 $Z = 117\,809,487\dots$

Die Höhe einer Teilzahlung Z beträgt € 117.809,49.

b3) $q_{12} = \sqrt[12]{1,03}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$340\,000 = R \cdot \frac{q_{12}^{240} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{240}}$$

$R = 1\,878,750\dots$

Die Höhe einer Rate R beträgt € 1.878,75.

b4) $340\,000 \cdot q_{12}^{120} - 1\,878,75 \cdot \frac{q_{12}^{120} - 1}{q_{12} - 1} = 194\,943,644\dots$

Die Höhe der Restschuld am Ende des 10. Jahres beträgt € 194.943,64.

b1) Ein Punkt für das richtige Eintragen der 4 Geldbeträge.

b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen von Z .

b3) Ein Punkt für das richtige Berechnen von R .

b4) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Restschuld am Ende des 10. Jahres.